

Deterministisches Chaos - Versuch einer neuen Begriffbestimmung

Ludwig Pohlmann

AdW der DDR, Zentralinstitut für physikalische Chemie,

Berlin, Rudower Chaussee 5, DDR-1199

Begriffe haben ihre Dynamik, und diese ist um so bewegter, je mehr auch der Begriffsgegenstand und die Theorie, die mit ihm verbunden ist, im Fluß ihrer Entwicklung sind. Das trifft auch für einen Begriff zu, der eng mit der stürmischen Entwicklung der Lehre von der Selbstorganisation (Synergetik, Irreversible Thermodynamik) verbunden ist und der unter dem Namen "Deterministisches Chaos" bekannt wurde. (Für weiterführende Zitate und Originalarbeiten sei hier auf die Artikelfolge "Singuläre Determiniertheit" /Wiss. Z. d. MLU, Mat.-nat. Reihe, 1987, 1988, 1989/ verwiesen.)

Geboren wurde dieser Begriff in der Mathematik, allerdings in einem Gebiet, welches über die Brücke der Modellbildung mit den Naturwissenschaften in engem Kontakt stand: in der Theorie dynamischer Systeme. So war es auch ein

Mathematiker, der im Rahmen meteorologischer Forschungen versuchte, ein einfaches, berechenbares Differentialgleichungsmodell der Luftzirkulation herzuleiten und (numerisch) zu lösen (E. LORENZ /J.Atmos.Sci. 20(1963)130/). Bei der Lösung merkte Lorenz aber zu seiner Überraschung, daß die Trajektorien des Systems völlig regellos waren, also keine Periodizitäten aufwiesen. Deshalb nannte er dieses Phänomen auch erst nur eine "Deterministische nichtperiodische Strömung". Mit dem "deterministisch" unterstrich er dabei nur die Tatsache, daß es sich um normale Differentialgleichungen ohne Zufallsterme handelte, die bekanntlich für jeden Satz von Anfangsbedingungen eine eindeutige Lösung (Bahnkurve) besitzen.

Bald wurde daraus das "Deterministische Chaos", ein Begriff, der wohl weniger exakt seinen Gegenstand beschreibt, als vielmehr die Überraschung seiner Entdecker über die Existenz völlig irregulärer Lösungen von deterministischen mathematischen Gleichungen - die ihrerseits wieder als Modelle für reale Bewegungen standen - zum Ausdruck bringt.

Heute wissen wir, daß diese Erscheinung, die wir der Kürze halber - bis wir zur genaueren Begriffsbestimmung kommen - einfach als "Chaos" bezeichnen wollen, kein esoterisches mathematisches Ergebnis ist, sondern daß sie in sehr vielen Prozessen in Natur, Gesellschaft und Denken (Turbulenz in der Flüssigkeitsströmung, Wetterentwicklung, Schwankungen des Erdmagnetfeldes u.a.m.) auftritt. Eine immer weiter auffächernde Forschung bringt dabei ständig neue und überraschende Eigenschaften des Chaos an den Tag. Das Chaos zeigt sich dabei strukturell und prozessual immer deutlicher als eine hochkomplizierte Form von Ordnung.

Ohne auf diese Eigenschaften hier näher eingehen zu können, sei auf zwei der grundlegendsten hingewiesen:

1. Die chaotische Bewegung ist begrenzt und das Chaos-Gebiet zieht die Trajektorien aus der Umgebung an, es ist ein Attraktor.
2. Die chaotische Bewegung hängt empfindlich von den Anfangsbedingungen ab, so daß sich auch ganz eng benachbarte Bahnen im allgemeinen mit exponentieller Geschwindigkeit voneinander entfernen (Hypersensitivität).

Aus diesen beiden Eigenschaften, sowie aus der Tatsache, daß sich die Lösungen eines Differentialgleichungssystems niemals schneiden können, folgt zwangsläufig eine Bewegung, die zwar begrenzt ist, aber niemals zur Ruhe kommt und auch nie in eine periodische oder quasiperiodische Bahn einmünden kann. Die Bahn ist folglich völlig aperiodisch und irregulär - eben "chaotisch".

Hier sind wir aber an einem Punkt angelangt, wo sich eine weitere Begriffspräzisierung als nötig erweist. Denn durch diese neuen Eigenschaften des Chaos erweist sich die übliche Praxis der mathematisch-physikalischen Begriffsbildung selbst als inadäquat. Bisher war es möglich, gute mathematische Modelle bestimmter physikalischer Prozesse als idealtypische Charakteristika dieser Prozesse zu verstehen. Denn

in normalen, nichtsensitiven realen Systemen sind die kleinen Störungen von außen und innen, die prinzipiell nicht vollständig eliminierbar sind, nicht wesentlich für die Bewegung des Systems. Deshalb kann die modellierende mathematische Beschreibung, die von solchen Störungen in irgend einem Maße immer abstrahieren muß, trotzdem adäquat sein: Da die Hypersensitivität fehlt, können die reale und die mathematische Bahnkurve beliebig lange beliebig nahe beieinander bleiben, d.h. eine anfänglich gute Approximation der realen Bewegung bleibt auch eine gute Approximation.

Gerade diese Korrespondenz von Modell und realem System kann in dieser Form für chaotische Systeme nicht mehr gelten, da sie ja hypersensitiv sind. Konnte man noch in der klassischen (vorchaotischen) Mechanik mit dem Begriff der Bahn eines Massenpunktes gleichzeitig sowohl den realen Prozeß (die Bahn des Schwerpunktes eines Körpers), als auch die zeitliche Lösung der entsprechenden newtonschen Bewegungsgleichung verstehen, ist dies bei der chaotischen Bewegung nicht mehr möglich. Denn hier kann jede kleine Störung einen wesentlichen Charakter bekommen, wenn sie nur im hypersensitiven Bereich auftritt.

Aus dem Gesagten wird deutlich, daß in der umfangreichen Literatur zum Thema Chaos eigentlich die Rede von zwei verschiedenen Chaos-Erscheinungen ist:

1. Zum einen handelt es sich um das rein mathematische Chaos, d.h. um die entsprechenden mathematischen Gleichungen, theoretisch-mathematisch betrachtet. Da es per definitionem in den (nichtstochastischen) Differential- oder Differenzgleichungen keinen Zufall geben kann und die Existenz eindeutiger Lösungen bewiesen ist, so ist auch die "mathematische" zeitliche Bewegung streng deterministisch. Diese Bewegung ist zwar irregulär und nichtperiodisch, aber wenn sie zum zweiten Male an genau demselben mathematischen Punkt gestartet wird, so wird sie auch Punkt für Punkt die vorhergehende Bewegung wiederholen.

Diese Bewegung wollen wir als **ideales Chaos** bezeichnen. Viele mathematische Arbeiten, in denen mit analytischen und qualitativen Methoden Sätze über das Chaos bewiesen werden, beziehen sich auf dieses ideale Chaos (z.B. von SMALE, RUELLE, TAKENS, ECKMANN).

2. Zum anderen handelt es sich um das Chaos, welches wir als makroskopischen Prozeß selbst erleben, selbst sehen können, sei es in der turbulenten Flüssigkeitsbewegung oder auch beim numerischen Lösen

chaotischer Gleichungen (also des idealen Chaos!) auf dem Computer. Dieses Chaos als realer Prozeß ist notwendigerweise immer kleinen Störungen von innen (Fluktuationen, Rundungsfehler) und außen ausgesetzt. Deshalb werden in Bereichen der Hypersensitivität diese Störungen, und sind sie auch noch so klein, dazu führen, daß die Bahn wesentlich gestört wird, d.h. die ursprüngliche, nach der Störung nur noch fiktive, Bahn und die neue reale Bahn werden sich mit exponentieller Geschwindigkeit voneinander entfernen. Und dieser Störprozeß passiert immer wieder, solange nur die chaotische Bewegung anhält. Hier ist also das Rauschen, der Zufall **wesentlich** und **untrennbar** mit der realen chaotischen Bewegung verbunden. In der Realität gibt es keine chaotische (allgemeiner, keine instabile) Bewegung ohne die wesentliche Rolle des Zufalls. Das chaotische System ist hypersensitiv, es transformiert dadurch gleichsam den Zufall, das mikroskopische Rauschen auf ein makroskopisch-dynamisches Niveau hinauf. Entsprechend läuft auch ein ständiger Informationsstrom: Die ursprünglichen Anfangsbedingungen werden immer wieder vergessen und dafür schöpft das System ständig neu Information aus dem Mikroniveau für die weitere Bewegung.

Aus diesen Gründen erscheint es sinnvoll, diese Bewegung als **reales Chaos** zu bezeichnen. Alle experimentellen Chaosforschungen einschließlich aller numerischen mathematischen Untersuchungen beziehen sich auf das reale Chaos. Diese Chaos kann man aber, im Unterschied zum idealen Chaos, nicht mehr als "deterministisch" bezeichnen, da es, wie wir betonten, **intrinsisch** mit dem Zufall als objektiver Kategorie (Störung, Fluktuation) verbunden ist.

Beide Formen des Chaos sind von wissenschaftlichem Interesse. Zwischen ihnen gibt es immer noch viele Gemeinsamkeiten, so daß die Ergebnisse, die für die eine Form des Chaos gewonnen wurden, von **heuristischer** Bedeutung für die andere Form sein werden. Aber jede dieser möglichen Übereinstimmungen in den Eigenschaften muß separat bewiesen werden. Denn es gibt auch wesentliche Unterschiede. Wenn diese nicht beachtet werden, kann es zu großer Konfusion kommen. Einer dieser wichtigen Unterschiede soll hier stellvertretend angeführt werden: Von einigen Chaos-Forschern (z.B. JENSEN, CHIRIKOV) wird behauptet, die Komplexität, die Irregularität einer chaotischen Trajektorie sei nichts anderes als die dynamische Umsetzung (Interpretation) der Information des Anfangspunktes, der als reelle Zahl ja im allg. eine unendliche Anzahl von Dezimalstellen enthält, in die Bewegung. So wird also eine nichtperiodische unendliche Dezimalzahl (also eine irrationale Zahl) in eine unendliche

nichtperiodische Bewegung "entrollt". Diese Behauptung stimmt - allerdings nur für das ideale Chaos. Beim realen Chaos kann es, wenn überhaupt, nur für einen endlichen Zeitraum, zwischen zwei hypersensitiven Phasen (wenn solche Lücken auftreten), gelten. Das o.g. "Vergessen" des Systems wird die Information des Startpunktes in einer endlichen Zeit für das System irrelevant werden lassen.

Eine andere wichtige Eigenschaft, die jedoch nur dem realen Chaos zukommt, besteht in dem endlichen Vorhersagehorizont (LIGHTHILL, /Proc. Roy. Soc. Ser. A407 (1986)35/) bzw. in der Existenz einer makroskopischen Unbestimmtheitsrelation (NIEDERSEN u. POHLMANN 1989). Interessant ist auch eine andere Analogie zur Quantenmechanik: Jede Messung realer chaotischer Prozesse kann diese in ihrem Verlauf wesentlich stören und damit verfälschen (KRAVCOV, /Uspekhi fis. nauk 158(1989)93/).

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß der Begriff des "deterministischen Chaos" nicht mehr als exakter wissenschaftlicher Begriff verwendet werden sollte, da er, zumindest zum Teil, nicht zutreffend ist. Man sollte deshalb der Entwicklung in der neueren Chaos-Literatur folgen und einfach von "Chaos" sprechen. Darüber hinaus macht sich aber die Unterscheidung in "ideales" und "reales" Chaos notwendig, wie oben ausgeführt werden konnte. Dabei sind die Beziehungen zwischen beiden Formen des Chaos alles andere als trivial und können noch viele Überraschungen bergen.

Diese notwendig gewordene Präzisierung eines allgemeinen wissenschaftlichen Begriffes kann aber auch Rückwirkungen auf die Definition des philosophischen Begriffes des objektiven Zufalls haben, denn der geht ja unter anderem auch von den Erfahrungen der vorchaotischen Physik aus, wonach kleine Störungen unwesentlich für die Systemdynamik und deshalb zufällig sind!

Was die Naturwissenschaft und die Philosophie vor allem interessieren wird, ist das reale Chaos. Das ideale Chaos ist mehr Untersuchungsgegenstand der reinen Mathematik (dynamische Systeme), aber wichtige dort gewonnene Erkenntnisse können von großer heuristischer Bedeutung für die Erforschung des realen Chaos sein. Das reale Chaos kann übrigens auch Untersuchungsgegenstand der Mathematik sein, nur handelt es sich dann zum einen um stochastisch gestörte dynamische Systeme (z.B. Langevin-Gleichung), also um keine dynamischen Systeme im engeren Sinne, zum anderen um die Theorie invarianter Maße (z.B. Wahrscheinlichkeitsmaße) auf Attraktoren dynamischer Systeme. Diese Theorien sind aber noch viel weniger entwickelt als die Theorie der dynamischen Systeme.

Berlin, den 6. 7. 1989