# Bifurkationstheorie

## 1. Verzweigungen stationärer Zustände

Die Lage, Anzahl und Stabilität der stationären Zustände von nichtlinearen Systemen hängt in der Regel noch von bestimmten Systemparametern ab. Die Untersuchung dieser Abhängigkeit ist der Gegenstand der **Bifurkationstheorie**.

Einfachstes Beispiel: eine gewöhnliche autonome DGL, welche nur von einem (relevanten) Parameter $\lambda$ (dem **Bifurkationsparameter**) abhängt:

$$\frac{dX}{dt} = f(X,\lambda)$$

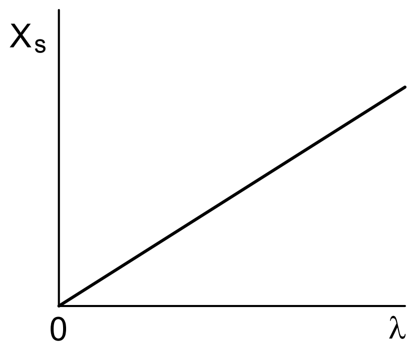
**Verschiedene Spezialfälle der Funktion f(X, λ):**

1) **lineare Funktion**, z.B. lineares chem. Gleichgewicht:

$A \rightleftharpoons X$, $A = \text{const.}$

$f = k_1 A - k_2 X = k_2(\lambda - X)$

$X_s = \lambda$ : nur ein stat. Zustand

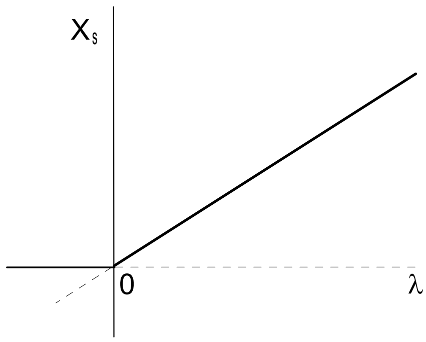



**Stabilität**: für nur eine DGL enthält die charakteristische Matrix nur ein Element, welches gleich dem (einzigen) Eigenwert $\omega$ ist:

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial X} = -k_2 < 0 \;\Rightarrow \text{Zustand ist immer stabil!}$$

In linearen Systemen sind **keine** Verzweigungen möglich.

2) **quadratische Funktion I**, z.B.
einfache Autokatalyse mit begrenzter Substratmenge:




$A + X \rightarrow 2X, \quad A(0) = A_0$

$f = k\,X\,(A_0 - X) = k\,X\,(\lambda - X)$

$X_{s1} = 0, \; X_{s2} = \lambda$ :

zwei stat. Zustände mit einem Schnittpunkt (Verzweigungspunkt, Bifurkationspunkt) bei $\lambda = 0$ !

**Stabilität**:

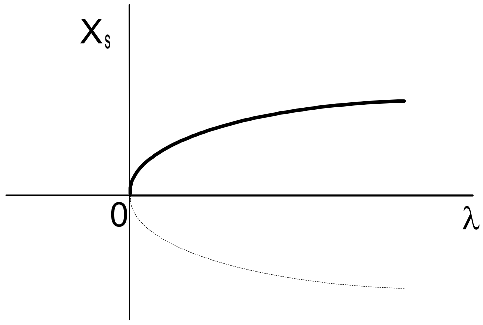
$$\omega = \frac{\partial f}{\partial X} = k(\lambda - 2X_s) \quad :$$

für $X_{s1}$: $\omega = k\lambda > 0$ (instabil) wenn $\lambda > 0$, sonst stabil

für $X_{s2}$: $\omega = -k\lambda < 0$ (stabil) wenn $\lambda > 0$, sonst instabil

$\Rightarrow$ beide Zustände wechseln ihre Stabilität genau im Schnittpunkt! Das gilt auch, wenn die beiden Kurven keine Geraden sind. Die entsprechende Bifurkation heißt "**Stabilitätswechsel**" oder "**transkritische Bifurkation**".

3) **quadratische Funktion II**, z.B. Zerfall 2. Ordnung eines Stoffes, der mit konstanter Geschwindigkeit produziert wird:




$A \rightarrow X,\ \ 2X \rightarrow P,\ \ A = \text{const.}$

$f = k_1A - k_2X^2 = k_2\,(\lambda - X^2)$

$X_{s1} = \sqrt{\lambda},\ \ X_{s2} = -\sqrt{\lambda}$ :

zwei stat. Zustände mit einem Schnittpunkt bei $\lambda = 0$, der einen Wendepunkt (d.h. $dX_s/d\lambda = \infty$) darstellt!

**Stabilität**:

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial X} = -2k_2X_s \quad :$$

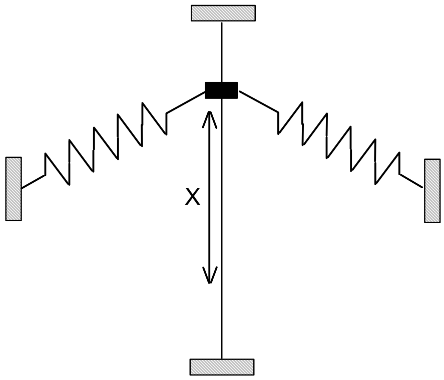
für $X_{s1}$: $\omega = -2k_2\sqrt{\lambda} < 0$ immer stabil

für $X_{s2}$: $\omega = 2k_2\sqrt{\lambda} > 0$ immer instabil

$\Rightarrow$ beide Zustände wechseln ihre Stabilität genau im Wendepunkt! Die entsprechende Bifurkation heißt "**Tangentenbifurkation**".

| |
|---|
| Diese Aussage ist verallgemeinerbar: nur in Bifurkationspunkten, also in Schnittpunkten bzw. in Wendepunkten kann die Stabilität eines Zustandes wechseln! |

4) **kubische Funktion**, z.B. bistabiles überdämpftes Federsystem:

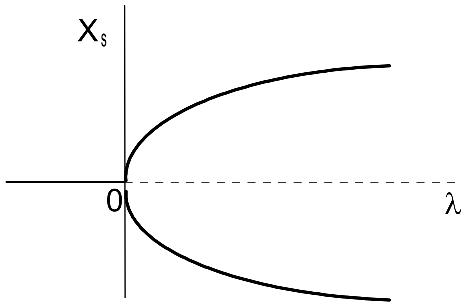



$$m\ddot{X} + \gamma\dot{X} - f(X,\lambda) = 0$$

bei großer Reibung: $m \approx 0$

$f = X(\lambda - X^2)$

$X_{s0} = 0$, $X_{s1} = \sqrt{\lambda}$, $X_{s2} = -\sqrt{\lambda}$ :




drei stat. Zustände mit einem Schnittpunkt bei $\lambda = 0$

**Stabilität**:

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial X} = \lambda - 3X_s^2 \;:$$

für $X_{s1,2}$: $\omega = -2\lambda < 0$ immer stabil für $\lambda > 0$

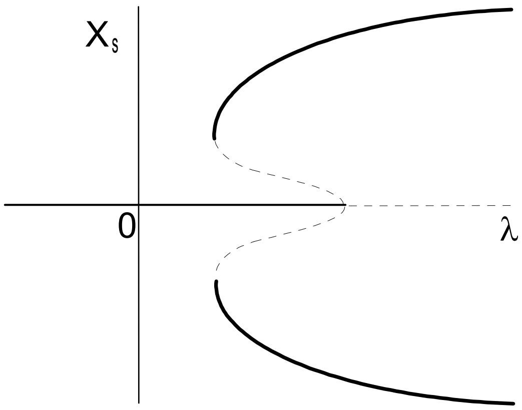
für $X_{s0}$: $\omega = \lambda$ stabil für $\lambda < 0$, instabil für $\lambda > 0$

⇒ der Nullzustand verliert seine Stabilität genau im Schnittpunkt! Dabei entstehen zwei neue, stabile Zustände (echte Verzweigung). Die entsprechende Bifurkation heißt "**(superkritische) Heugabelbifurkation** ". Die entsprechenden Zustände werden auch "Lösungszweige" genannt.

Bistabile Systeme entstehen häufig durch Heugabelbifurkationen.

5) **Funktion 5. Grades**:

$f = X(\lambda - (X^4 - X^2 + a))$

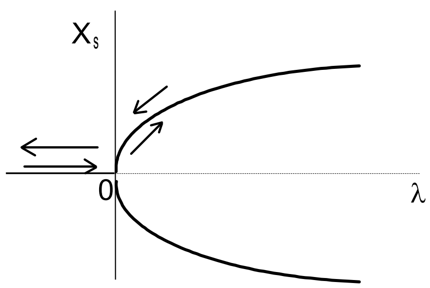


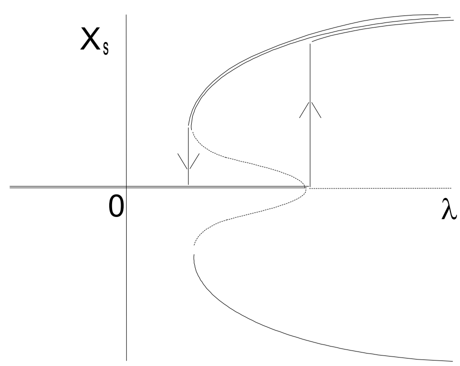

5 stat. Zustände ( 5 Äste) mit einem Schnittpunkt bei $\lambda = 0$

**Stabilität**:

⇒Die entsprechende Bifurkation im Punkt λ = 0 heißt "**subkritische Heugabelbifurkation**". Davor gibt es im obigen Beispiel einen Bereich, wo drei stabile Zustände miteinander koexistieren (**Multistabilität**), da noch zwei Tangentenbifurkationen hinzukommen. In diesem Bereich kann nur eine endliche Anregung dazu führen, daß der (metastabile) Nullzustand verlassen wird.

Im Vergleich zur superkritischen Heugabelbifurkation kann es hier keinen kontinuierlichen Übergang in den neuen Zustand geben, d.h. es wird immer ein **Sprung** bei der kontinuierlichen Vergrößerung des Bifurkationsparameters λ auftreten. Gleichzeitig unterscheidet sich der Rückweg (Verkleinerung von λ) vom Hinweg: **Hysterese**.



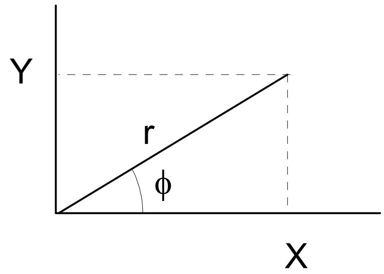



## 2. Die Abzweigung einer periodischen Lösung

Einfachstes Beispiel: zwei gewöhnliche autonome DGL mit einem Bifurkationsparameter λ:

$$\dot{X} = \lambda X - Y - X\left(X^2 + Y^2\right)$$

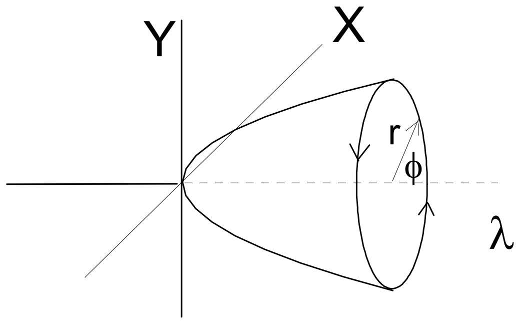
$$\dot{Y} = X + \lambda Y - Y\left(X^2 + Y^2\right)$$




Transformation in Polarkoordinaten zur besseren Analysemöglichkeit:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\dot{r} = \left(\lambda - r^2\right)r, \quad \dot{\phi} = 1$$




"stationäre Zustände":

$r_{s1} = 0$ , $r_{s2} = \sqrt{\lambda}$

Schnittpunkt bei $\lambda = 0$

**Stabilität:**

$\omega_1 = \lambda - 2r^2$ :

für $r_{s1}$: $\omega_1 = \lambda$ : stabil für $\lambda < 0$, sonst instabil

für $r_{s2}$: $\omega_1 = -\lambda$ : instabil für $\lambda < 0$, sonst stabil

Abzweigung eines stabilen Grenzzyklus bei $\lambda = 0$: "**superkritische Hopf-Bifurkation**" (Hopf, 1942). In Polarkoordinaten entspricht die Hopf-Bifurkation einer Heugabelbifurkation des Radialanteiles.

## 3. Höherdimensionale Systeme

Systeme aus mehr als zwei DGL lassen erwarten, daß hier entsprechend kompliziertere Bifurkationen auftreten werden. In Vielen Fällen läßt sich jedoch die Komplexität des Systems erheblich reduzieren.

Allgemein gilt: nur in einem Bifurkationspunkt kann sich die Stabilität eines Zustandes ändern ⇒ Nur dort, wo sich das Vorzeichen des Realteiles von mindestens einem Eigenwert des Systems ändert, kann ein Bifurkationspunkt auftreten!

Dabei gilt folgender allgemeiner **Reduktionssatz**:

| |
|---|
| Die Dimension des jeweiligen Bifurkationsproblemes (eines n-dimensionalen Systems) hängt nur von der Anzahl m der Eigenwerte ab, welche am untersuchten Bifurkationspunkt gleichzeitig (im Realteil) das Vorzeichen wechseln. (Satz von der zentralen Mannigfaltigkeit) |

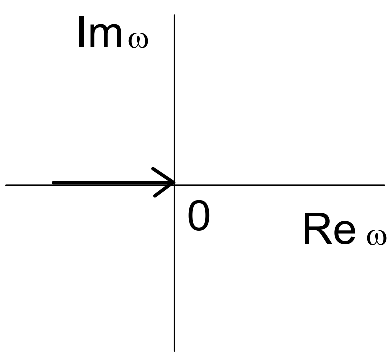
Meistens ist bei großen Systemen $m << n$.

Folgende Fälle sind zu unterscheiden:

1) **m = 1, genau ein Eigenwert kreuzt die imaginäre Achse**:

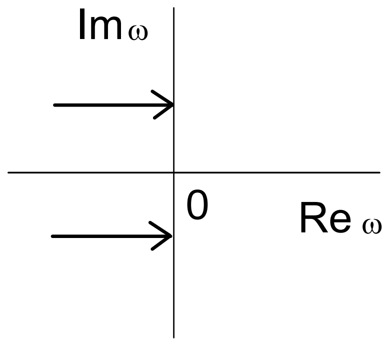
dann gibt es nur transkritische und Heugabelbifurkationen!

**Stabilität**: superkritische abzweigende Äste sind stabil, subkritische instabil



1) **m = 2, genau zwei komplex konjugierte Eigenwerte kreuzen die imaginäre Achse**:

dann tritt im Bifurkationspunkt die Abzweigung eines Grenzzyklus ein (Satz von Hopf)




**Stabilität**: superkritische abzweigende Grenzzyklen sind stabil, subkritische instabil

Damit wurde gezeigt, daß die verschiedenen Typen von Bifurkationen für ein und zweidimensionale Systeme alle Möglichkeiten von Bifurkationen erschöpfen, wenn nur ein Bifurkationsparameter variiert wird und entweder nur ein Eigenwert, oder aber ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte, die imaginäre Achse schneiden.