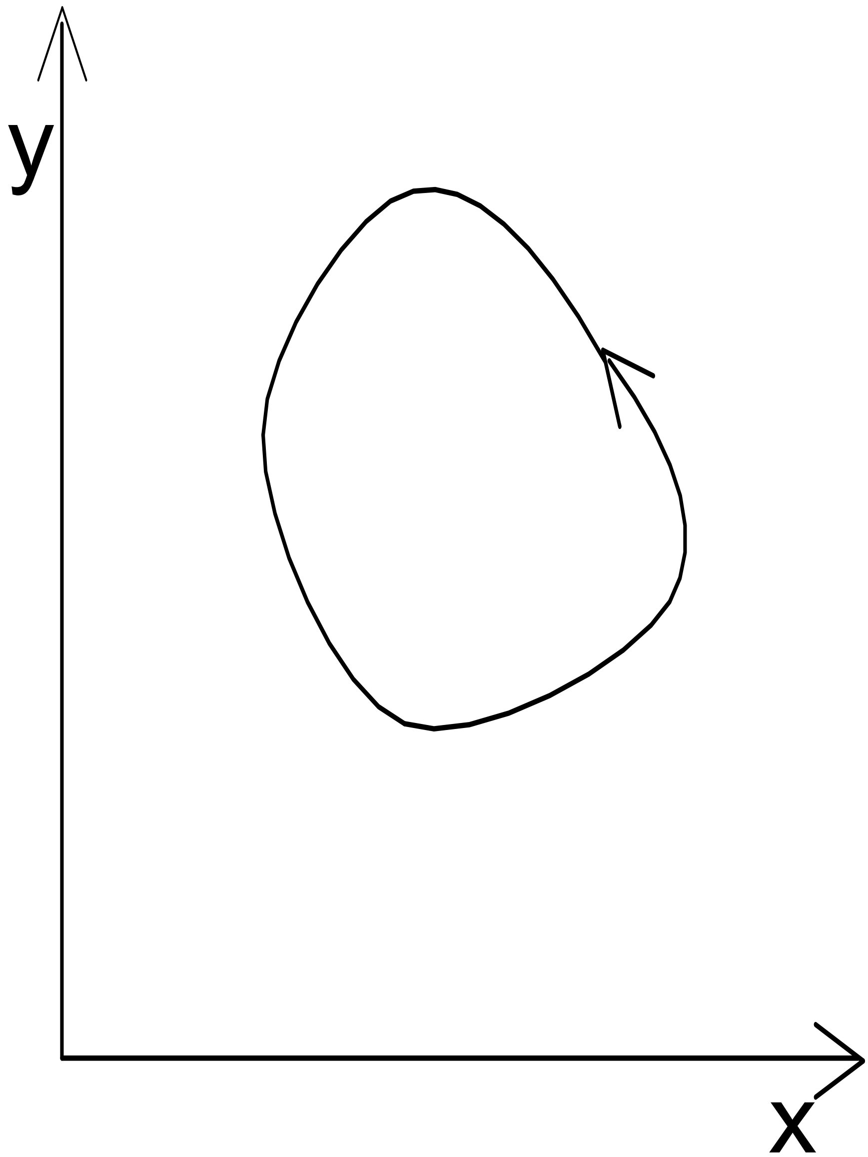
Stabile periodische Bewegungen (Grenzzyklen)

1. Nichtlineare Systeme mit zwei Gleichungen

Prinzipiell neu: Alle Systeme mit mindestens 2 unabhängigen DGL können als Lösungen geschlossene Kurven im Phasenraum haben. Das aber sind **zeitlich periodische Lösungen**:

$x(t) = x(t + T), \quad y(t) = y(t + T), \quad T > 0$



1) **Wann sind periodische Lösungen <u>nicht</u> möglich?**

Wenn das System ein sogenanntes "Gradientensystem" ist, d.h. wenn eine "Potentialfunktion" $V(x,y)$ existiert, aus der man die rechten Seiten des Systems ableiten kann:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$$

Bedingung dafür, daß ein DGL-System ein Gradientensystem ist:

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y \partial x} \; .$$

Eigenschaften von Gradientensystemen:

1) Stationäre Lösungen sind Extrema des Potentials $V(x,y)$

2) Ist das das Extremum ein Minimum, so ist der entsprechende Zustand asymptotisch stabil

3) entlang einer Trajektorie (außerhalb eines stationären Punktes) nimmt das Potential immer ab

$\Rightarrow$ Dann kann es im gesamten Phasenraum keine geschlossenen Lösungskurven geben:

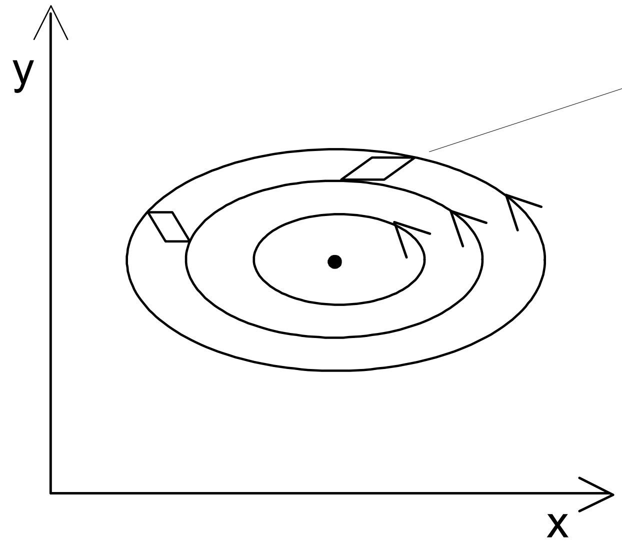
Beweis: aus x(t) = x(t + T) für alle t folgt, daß V(x(t)) = V(x(t + T)), d.h. die Konstanz von V entlang einer Trajektorie $\Leftrightarrow$ Widerspruch zu Punkt 3) !

2) **Geschlossene Kurven in konservativen Systemen**

Konservatives System: Es existiert eine Erhaltungsgröße, die auf allen Lösungskurven konstant ist, z.B. die Energie in Hamiltonschen Systemen:

$$E(x,v) = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const.} \quad \text{für alle } x(t), v(t)$$

Die einzigen geschlossenen Kurven sind hier Wirbel, die **beliebig dicht** um einen Wirbelpunkt herum liegen, z.B. die elliptischen Kurven im Falle des harmonischen Oszillators:



In konservativen Systemen ist das Phasenvolumen (die Phasenfläche) einer beliebigen Gruppe von Punkten, die auf den Trajektorien liegen, konstant:

$V(t) = \text{const.}$ bzw. $\text{div}(\mathbf{f}(x,y) = 0$

$\Rightarrow$ in konservativen Systemen ist nur **einfache Stabilität** möglich, denn jede asymptotische Stabilität bedeutet, daß sich die Phasenvolumina kontrahieren!

3) **Geschlossene Kurven in dissipativen Systemen**

Allgemeine Definition: **Dissipativ** wird ein System genannt, wenn jedes Phasenvolumen letztendlich gegen Null geht:

$$\lim_{t \to \infty} V(t) = 0 \ .$$

Hinreichende Bedingung der Dissipativität in einem Gebiet des Phasenraumes:

$$\mathrm{div}(\mathbf{f}(x,y) < 0 \ .$$

Daraus folgt, daß es nur in dissipativen Systemen Attraktoren geben kann!

Beispiel: **harmonischer Oszillator mit Reibung**:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m}x - \frac{\gamma}{m}v \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{div}\,\mathbf{f}(x,v) = -\frac{\gamma}{m} < 0$$

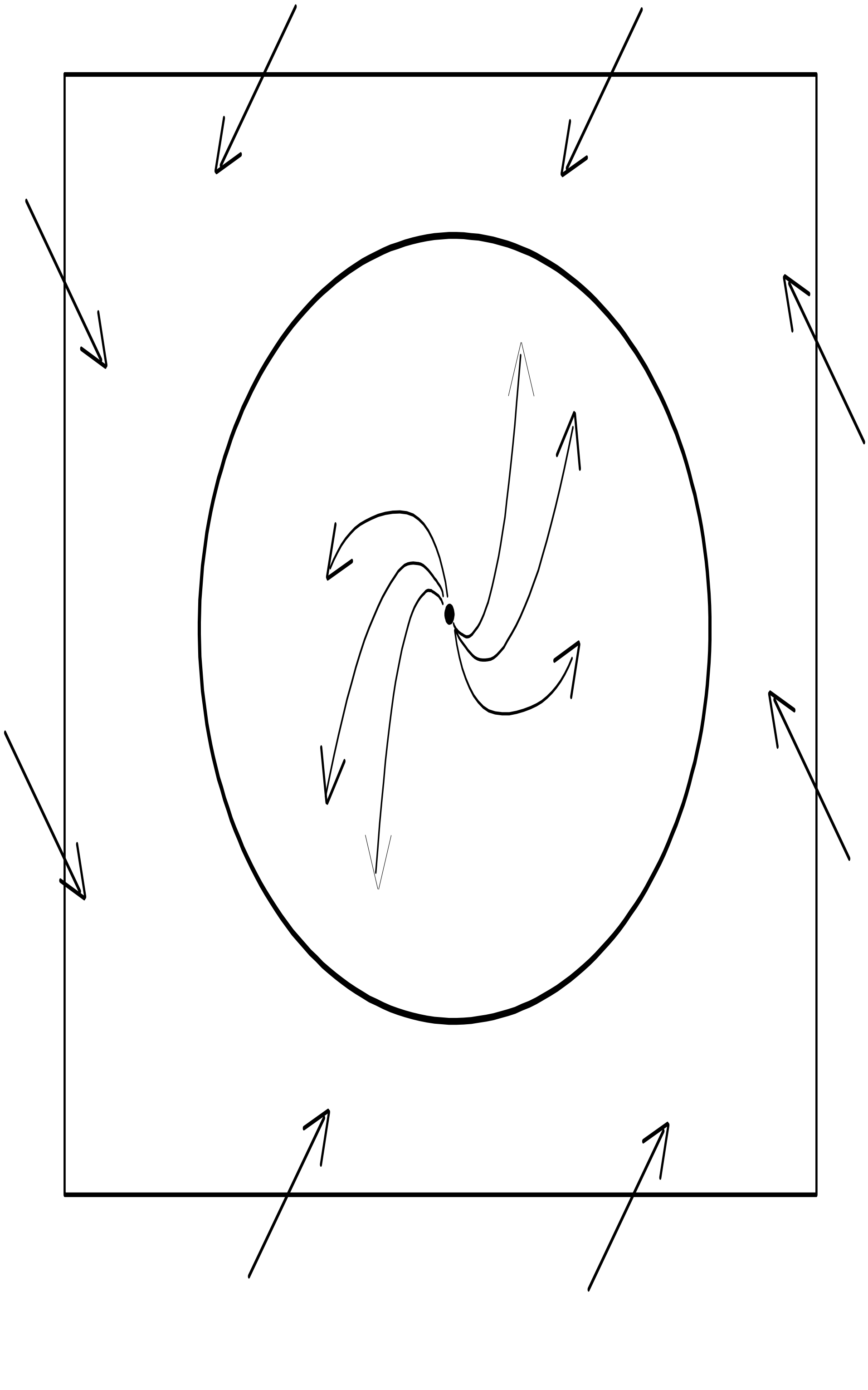
Lösungen: stabiler Strudel als Attraktor

Weiterhin folgt: Wenn es in dissipativen **Systemen geschlossene Kurven** gibt, so sind dies entweder **Attraktoren oder Repelloren**, d.h. diese Kurven können nur isoliert auftreten.

Poincaré nannte sie "Grenzzyklen" (engl. *limit cycles*)

Poincarésches Kriterium für die Existenz eines Grenzzykles in einem Gebiet des Phasenraumes:

Wenn im Phasenraum ein Gebiet existiert, in das von allen Seiten die Kurven hineinlaufen, und welches im Innern mindestens einen instabilen stationären Punkt besitzt, so muß es in diesem Gebiet mindestens einen stabilen Grenzzyklus geben.



Negatives Kriterium von Bendixon:

Wenn innerhalb eines Gebietes im Phasenraum der folgende Ausdruck

$$\mathrm{div}(\mathbf{f}(x,y)$$

sein Vorzeichen **nicht** wechselt, so kann es innerhalb dieses Gebietes **keine** geschlossenen Lösungskurven geben.