Dynamisches Chaos

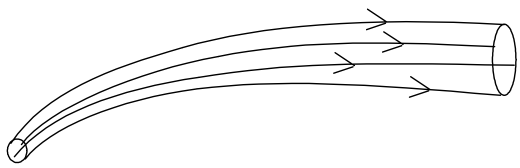
1. Einleitung: Determinismus und Chaos

In der üblichen Betrachtungsweise ist der Zufall nur auf dem Mikroniveau erlaubt:
- das Boltzmannsche molekulare Chaos;
- die quantenmechanischen Unbestimmtheitsrelationen.

Makroskopische Systeme dagegen werden durch deterministische Gesetze beschrieben, die nicht notwendigerweise durch stochastische Kräfte ergänzt werden müssen.

Auf jeden Fall gilt das **Prinzip der schwachen Kausaliät**:

Kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen führen auch nur zu kleinen Unterschieden bei den Bewegungstrajektorien.



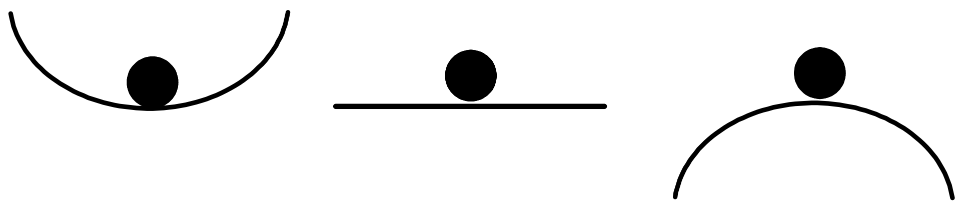
Aus diesem Grunde ist es legitim, Zufall, Fluktuationen und kleine Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen zu vernachlässigen und zur Beschreibung rein dynamische Modelle zu verwenden: Himmelsmechanik, Elektrodynamik, chemische Kinetik, Hydrodynamik usw.

philosophische Verabsolutierung: mechanischer Determinismus (Laplacescher Dämon)

Allerdings gibt es auch in der klassischen Mechanik Ausnahmen ...

Die Tücken der Newtonschen Mechanik:

Gleichgewicht einer Kugel:

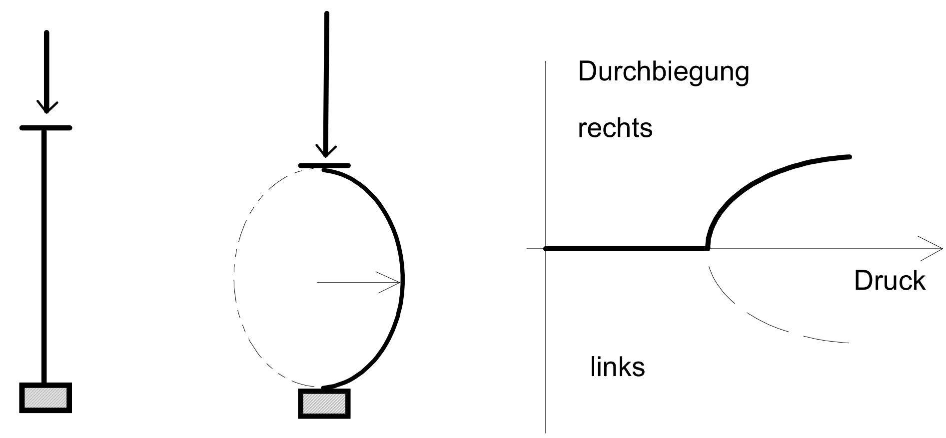


stabiles indifferentes instabiles

Gleichgewicht

Nicht-Eindeutigkeit der Entwicklung, Einfluß des Zufalls, begrenzte Vorhersagbarkeit

Durchbiegung eines Stabes:



Verzweigung: zwei mögliche Wege der weiteren Entwicklung (Bifurkation)

2. Dissipative Systeme

Zur Geschichte:

In dissipativen Systemen wurde das Bild des Determinismus anfänglich bestärkt:

Jeder stabile Zustand ist hier **asymptotisch stabil**, d.h. ein Attraktor. Dadurch werden zufällige Störungen aktiv **ausgedämpft** und eine in konservativen Systemen übliche Driftbewegung verhindert.

Auch hier gibt es aber ähnliche Ausnahmen: in den Bifurkationspunkten des Systems kann der Zufall eine Hauptrolle spielen, wenn infolge des Selbstorganisationsvorganges mindestens **zwei** neue Attraktoren abzweigen.

Nach der Bifurkation allerdings ist die weitere Bewegung wieder streng determiniert (neuer Attraktor).

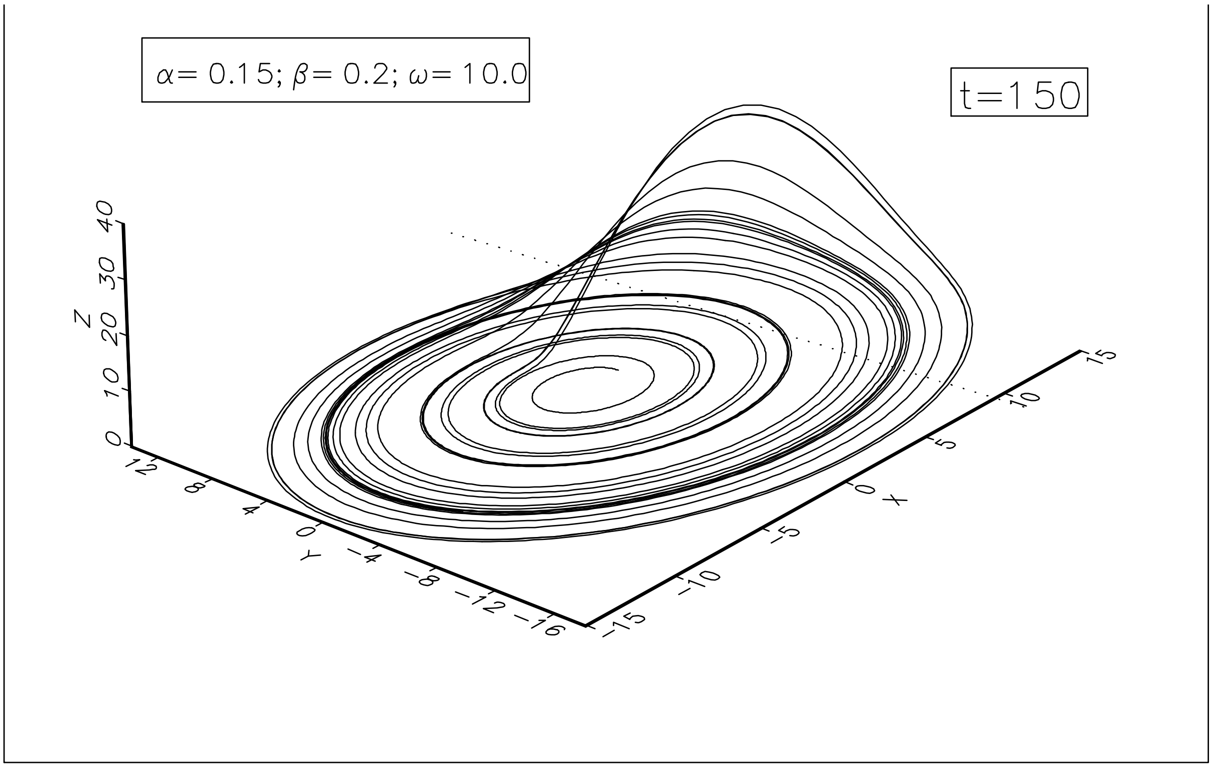
Der Lorenz-Attraktor

Diese Auffassungen wurden 1963 durch die Forschungen des Atmosphärenforschers Edward Lorenz erheblich erschüttert: Er entwickelte ein stark vereinfachtes Modell von drei Differentialgleichungen, welche bestimmte Aspekte von Luftströmungen, welche durch Temperaturdifferenzen hervorgerufen werden, zu beschreiben vermochten.

$$\dot{X} = \sigma(Y - X)$$
$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y$$
$$\dot{Z} = XY - bZ$$

X - vertikale Geschwindigkeit
Y - horizontale Temperaturdifferenz
Z - vertikale Temperaturdifferenz
σ - Prandtl-Zahl, r - Rayleigh-Zahl

Der Roessler-Attraktor (1976)



$$\frac{dX}{dt} = -Y - Z; \quad \frac{dY}{dt} = X + \alpha Y; \quad \frac{dZ}{dt} = \beta + Z(X - \omega)$$

Roessler-Subsystem: harmonischer Oszillator mit negativer Dämpfung:

$$\frac{dX}{dt} = -Y, \ \frac{dY}{dt} = X + \alpha Y \qquad \text{entspricht:}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{X} - \alpha \dot{X} + X = 0; \quad (\gamma \equiv -\alpha, \ \omega \equiv 1)$$

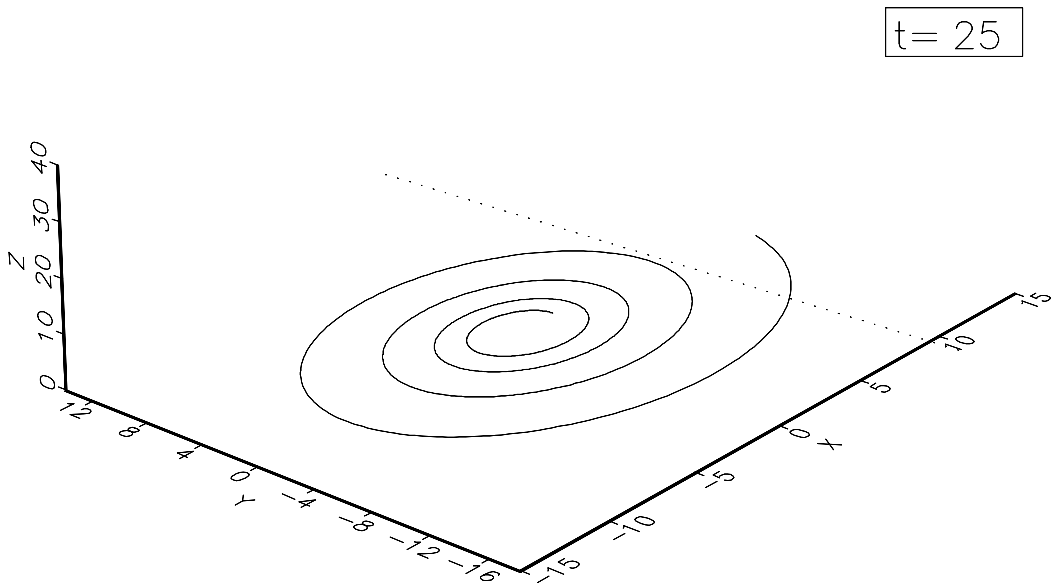
Prinzip der Dynamik:

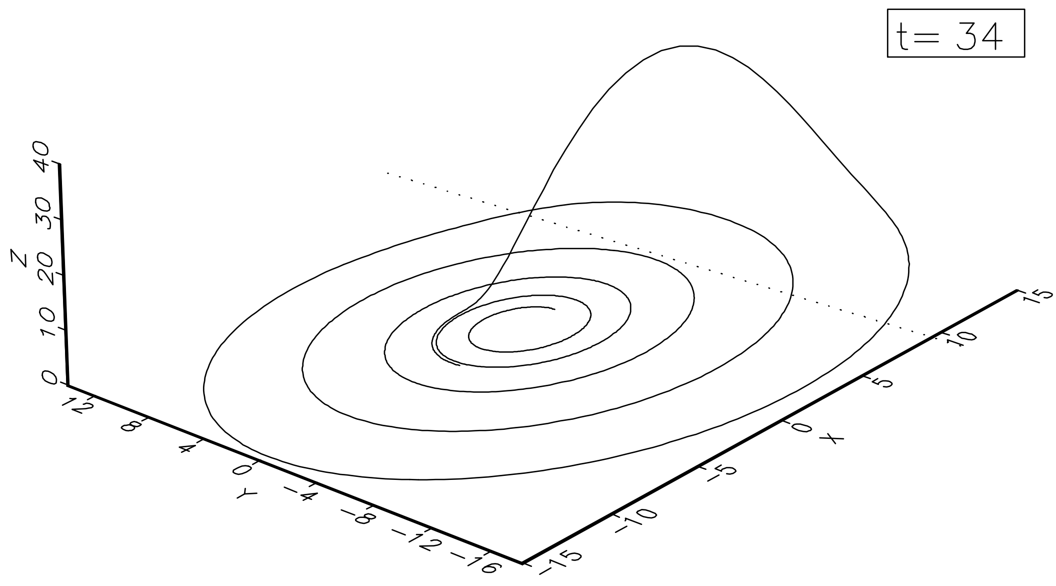
solange $X < \omega$ ist $Z \approx 0$

sobald $X > \omega$ wächst Z autokatalytisch ($dZ/dt > 0$)

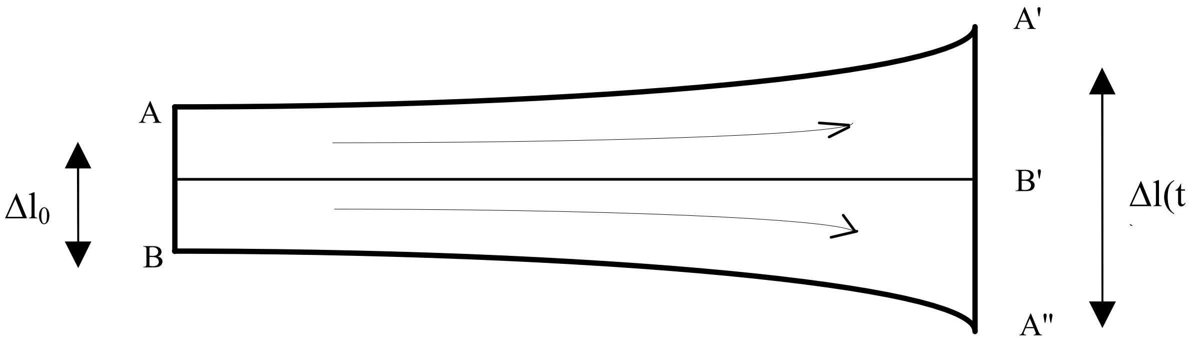
wenn $Z > 0$ wird X abgebaut

Dynamik des Roessler-Attraktors



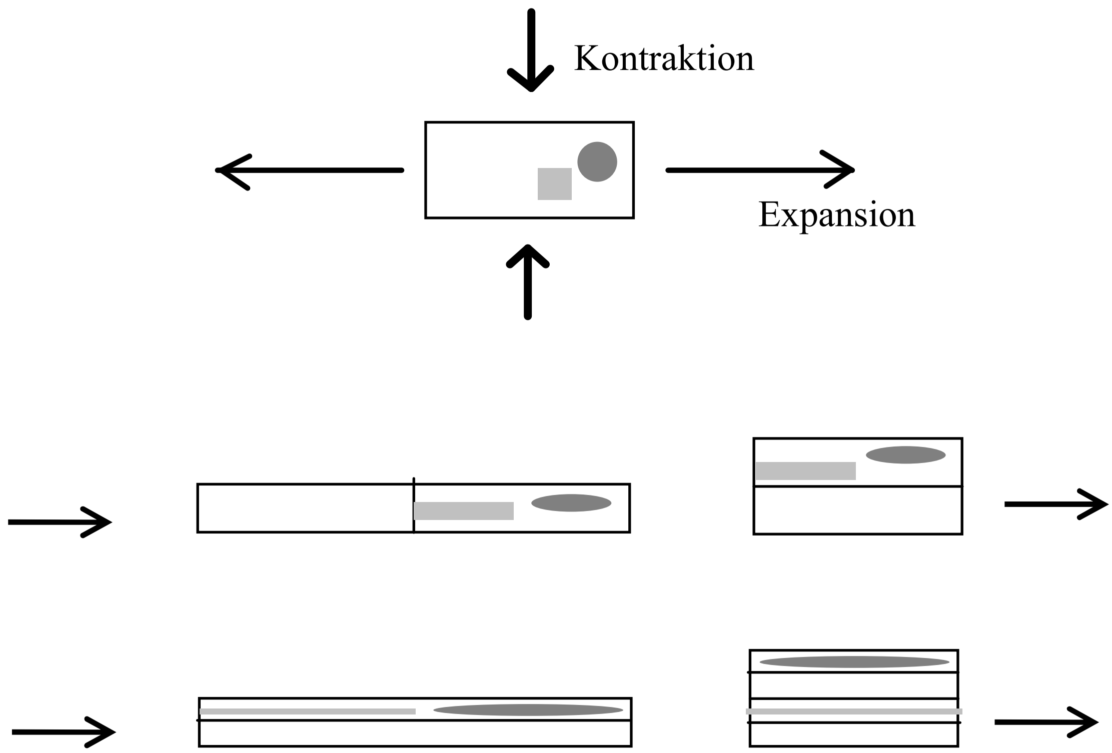


Topologie des Roessler-Attraktors



$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \lim_{\Delta l_0 \to 0}\left(\ln\left(\frac{\Delta l(t)}{\Delta l_0}\right)\right)$$

Bäcker-Transformation



3. Maße des Chaos

Fraktale Dimensionen

Die Bäcker-Transformation (oder analoge Abbildungen, welche die wiederholten Faltungen von Trajektorienbündeln beschreiben) führt letztlich (im unendlichen Grenzwert) zu einer Attraktorstruktur, welche man sich als Schichtung von unendlich vielen unendlich dünnen „Blättern“ vorstellen kann:

Die Schnittstruktur eines solchen „seltsamen“ Attraktors stellt eine Cantor-Menge dar:

→ fraktale Struktur mit der Dimension
$D = \ln 2/\ln 3 = 0{,}630929...$

Es existieren verschiedene Maße zur Charakterisierung der fraktalen Attraktorstruktur, welche zu unterschiedlichen Dimensionen führen können: Hausdorff-Dimension, Kapazität, Renyi-Dimensionen, Korrelationsintegral, z.B.: Kapazität eines Attraktors A im Phasenraum $\mathbf{R}^n$:

$$\boxed{D_K(A) = -\lim_{\delta \to 0}\left(\frac{\ln\left(N(\delta, A)\right)}{\ln(\delta)}\right)} \quad ,$$

$N(\delta,A)$: Anzahl der n-dim. Würfel mit der Kantenlänge δ , welche den Attraktor gerade überdecken

Ljapunov-Exponenten

Neben der fraktalen Struktur ist das exponentielle Auseinanderdriften anfänglich benachbarter Trajektorien ein wesentliches Charakteristikum von chaotischen Bewegungen:

Verallgemeinerung der linearen Stabilitätstheorie auf Trajektorien:

$$\left\langle \frac{|\bar{x}(t)|}{|\bar{x}(0)|} \right\rangle_t = \exp(\lambda t), \quad |\bar{x}(0)| \to 0$$

$x(t)$ ist hier die vektorielle Abweichung von einer gegebenen Trajektorie: $x(t) = z(t) - z_0(t)$

Es gibt dabei genau so viele **Ljapunov-Exponenten** λ eines Systems, wie dieses Dimensionen n im Phasenraum hat (Anzahl der abhängigen Variablen):

Spektrum der Ljapunov-Exponenten eines Systems:

n: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n)$

Bei dynamischem Chaos ist mindestens ein $\lambda_i > 0$:
die Folge davon ist eine **sensible Abhängigkeit** von den Anfangsbedingungen (bzw. von kleinen Störungen)

Allgemein gilt für stetige dissipative Systeme (DGL-Systeme):
1) ein $\lambda_i = 0$: entspricht der Bewegung entlang der Trajektorie
2) die Summe aller muß negativ sein (ist ein Maß der Volumenänderung)
→ Signatur eines 3-D-Chaos: (+,0,-)

Numerik: Überschattungslemma

4. Analyse experimenteller Zeitreihen