

Fraktale

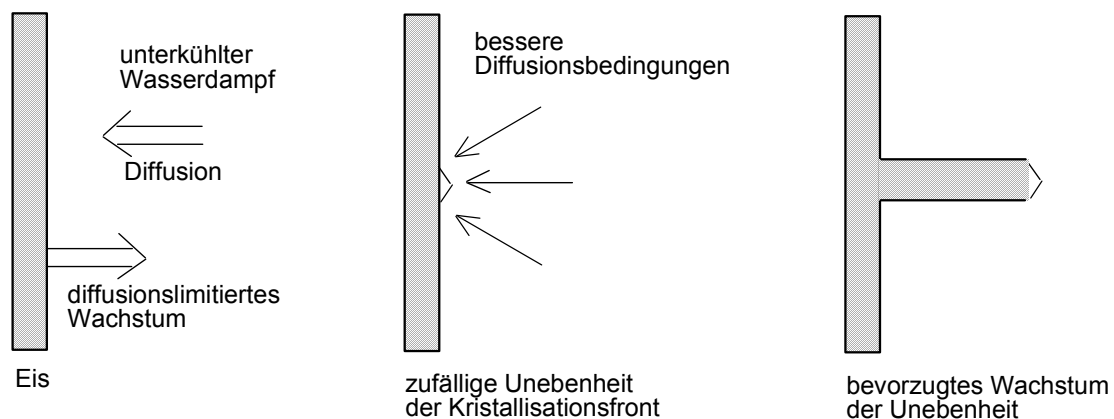
1. Fortgesetzte Bifurkationen der gleichen Art

Bisher wurden nur Selbstorganisationsphänomene betrachtet, die durch einzelne Bifurkationen beschrieben werden können. Viele reale Prozesse bestehen aber, bei einer kontinuierlichen Änderung der thermodynamischen Triebkraft oder anderer äußerer Bedingungen, aus einer Folge von Bifurkationsprozessen.

Interessant vom Standpunkt der Strukturbildung wird solch ein Prozeß, wenn die einzelnen Bifurkationen (konservative) Strukturen hinterlassen, sich also quasi *selbst aufzeichnen* ("**eingefrorene dissipative Strukturen**").

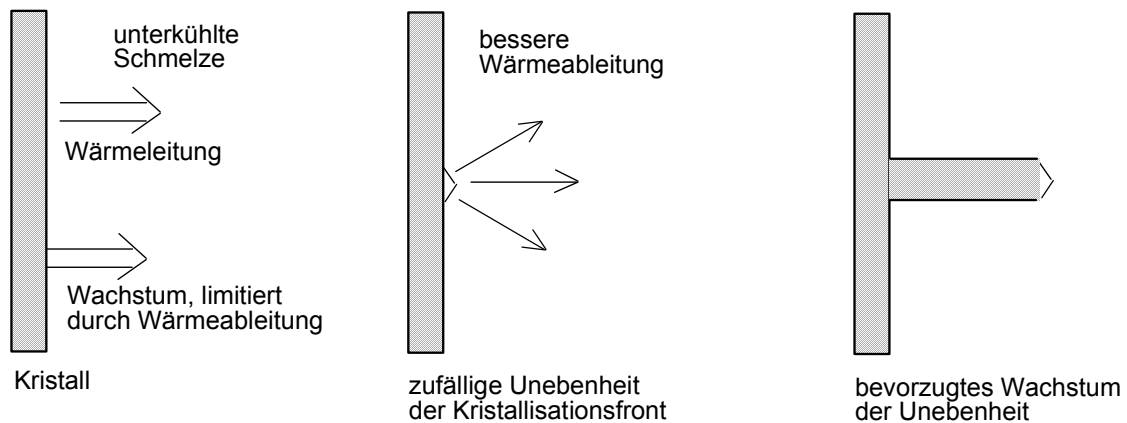
1. Beispiel: Diffusionsinstabilität der Kristallisation

Wachstum einer Schneeflocke aus unterkühltem Wasserdampf:



2. Beispiel: Mullin-Sekerka-Instabilität

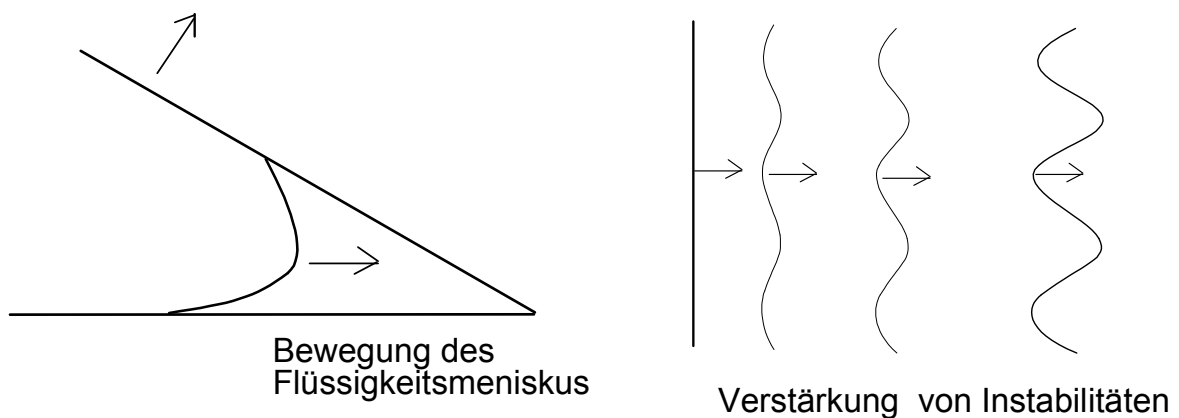
Wachstum eines Metallkristalls aus einer unterkühlten Schmelze:



→ Entstehung von Verästelungen, dendritisches Wachstum

3. Beispiel: Meniskus-Instabilität bei der Bildung von Flüssigkeitsfilmen

Auftragen einer viskosen (nichtnewtonschen) Flüssigkeit auf eine ebene Platte:



Wiederholte Bifurkationen bei Frontinstabilitäten

Bei all den angeführten Beispielen entstehen nach der ersten Bifurkation neue Strukturen (Dendriten, Finger etc.), welche selbst wieder neue wachsende Fronten ausbilden. Diese können deshalb, wenn sie nur groß genug geworden sind, selbst wieder instabil werden. Auf diese Weise können durch eine Folge gleichartiger Bifurkationen schließlich sehr komplizierte, verästelte Strukturen entstehen: Schneeflocken, Metall-Dendriten u.ä.

So entstehen Gebilde, welche ähnliche Strukturen in verschiedenen Größenmaßstäben enthalten: "**Selbstähnlichkeit**" bzw. "**Maßstabsinvarianz**".

2. Fraktale Dimensionen

Wie lang ist die Küste Großbritanniens?

L. F. Richardson (1922):

Messung auf der Landkarte: Approximation der zerklüfteten Küstenlinie durch einen Polygonzug

→ Länge (bei Maßstab η) = η mal Anzahl der Geradenstücke

d.h. $L_\eta = \eta N(\eta)$

wenn nun $\eta \rightarrow 0$ geht, muß $L_\eta \rightarrow L$ gegen die wahre Länge konvergieren (wie es für glatte Kurven bewiesen ist)!?

Für die Küstenlinie erwies es sich aber, daß die Größe L_η für kleine η **divergierte**, und zwar nach einem Potenzgesetz:

$$L_\eta = \lambda \eta^{1-D} \quad \text{mit } D > 1$$

d.h. $\ln(L_\eta) = \ln \lambda + (1-D) \ln \eta$

bildet eine Gerade. Für kürzere Abschnitte derselben Küstenlinie erhält man den gleichen Wert des Exponenten D , nur entsprechend kleinere Werte von λ :

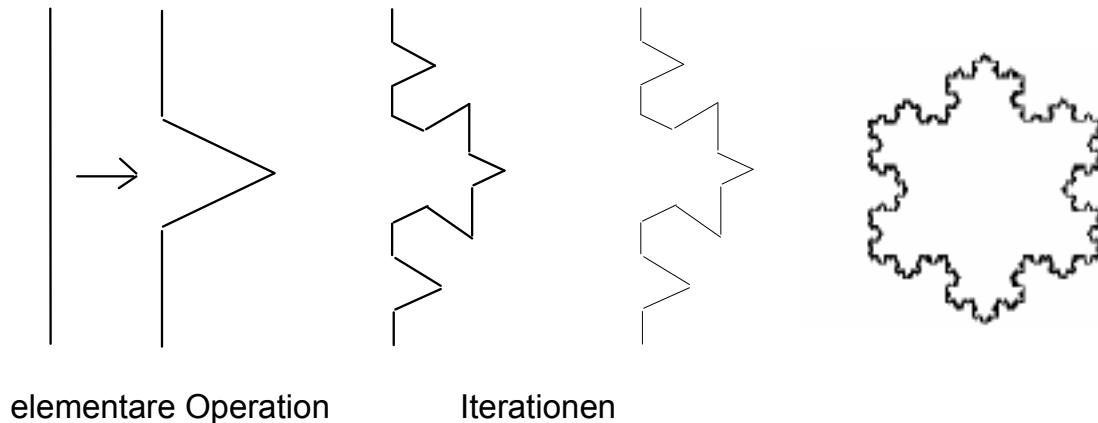
$$(L_1)_\eta / (L_2)_\eta = \lambda_1 / \lambda_2$$

λ ist deshalb ein neues Maß für die Ausgedehntheit der Linie und hat die Dimension (Länge) ^{D} , D selbst ist dimensionslos

B. Mandelbrot (1977): geometrische Gebilde, welche die obigen Eigenschaften besitzen, bezeichnete er als **Fraktale**, welche durch eine bestimmte **gebrochene Dimension** D charakterisiert werden können.

Fraktale lassen sich häufig durch einfache geometrische Vorschriften erzeugen:

Koch-Kurve (1904):



$$L_1 = L, \quad L_2 = 4 (L/3), \quad L_3 = 4 (4 (L/9)), \quad L_3 = 4 (4 (4 (L/27))),$$

$$\rightarrow L_n = (4/3)^n \quad \text{mit dem Maßstab } \eta = L/3^n \rightarrow n = \ln(L/\eta)/\ln 3$$

$$\text{d.h. } L(\eta) = L (L/\eta)^\alpha, \quad \alpha = (\ln 4 - \ln 3)/\ln 3 = 0.2618\dots$$

$D = 1 + \alpha = \ln 4/\ln 3 = 1.2618\dots$ fraktale Dimension der Koch-Kurve (Hausdorff - Dimension)

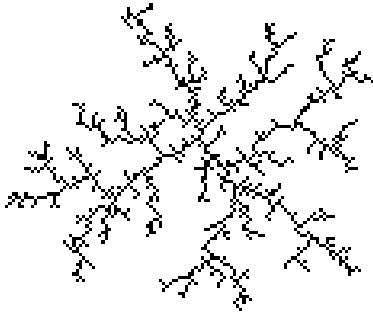
Anderes Beispiel: Vierecke $\rightarrow D = \ln 5 / \ln 4 = 1,16096\dots$

Zum Vergleich reale Fraktale:

$$D_{\text{Großbrit.}} = 1.24, \quad D_{\text{Australien}} = 1.13$$

Zufällige Fraktale

Diffusionslimitierte Aggregation (DLA):



Jedes Teilchen, welches einen der Äste erreicht, aggregiert sofort und irreversibel

→ nur der Antransport ist entscheidend

Runge- Bilder

Friedlieb Ferdinand Runge (1795 - 1867)

1850: "Zur Farben-Chemie, Musterbilder für Freunde des Schönen..."

1855: "Der Bildungstrieb der Stoffe"

die Wechselwirkung von Diffusion, Kapillartransport und chemischer Niederschlagsbildung führt zu sehr vielgestaltigen "Farbklecksen"