

Das Vektorprodukt

Die folgende Konstruktion funktioniert nur für \mathbb{R}^3 mit dem Standardskalarprodukt. Das *Vektorprodukt* ist definiert als

$$\times: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(v, w) = \left(\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} s_2 \cdot t_2 - s_3 \cdot t_2 \\ s_3 \cdot t_1 - s_1 \cdot t_3 \\ s_1 \cdot t_2 - s_2 \cdot t_1 \end{pmatrix}.$$

Auf den Standardbasisvektoren wird das Vektorprodukt durch die folgende Verknüpfungstabelle beschrieben:

\times	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

Eigenschaften IV.4.13. i) Das Vektorprodukt verhält sich bilinear, d.h., für Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$(u + v) \times w = u \times w + v \times w,$$

$$u \times (v + w) = u \times v + u \times w,$$

und für eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$

$$(\lambda \cdot v) \times w = \lambda \cdot (v \times w),$$

$$v \times (\lambda \cdot w) = \lambda \cdot (v \times w).$$

ii) Das Vektorprodukt ist antisymmetrisch, d.h.,

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^3: \quad w \times v = -(v \times w).$$

iii) Das Vektorprodukt ist orthogonal zu den Ausgangsvektoren, d.h., für $v, w \in \mathbb{R}^3$ hat man

$$v \perp (v \times w) \quad \text{und} \quad w \perp (v \times w).$$

iv) Für zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt genau dann $v \times w = 0$, wenn v und w linear abhängig sind.

v) Für zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist die Norm ihres Vektorprodukts durch die Formel

$$\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2$$

bestimmt.

Den Nachweis überlassen wir der Leserin bzw. dem Leser als Übungsaufgabe.

Beobachtung IV.4.14. *Es seien $v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dann gilt*

$$\|v \times w\| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\angle(v, w)).$$

Beweis. Gemäß Definition in Bemerkung IV.3.9, a), gilt für $v, w \in \mathbb{R}^3$ und $\vartheta := \angle(v, w)$, dass

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\vartheta).$$

Zusammen mit Eigenschaft IV.4.13, v), ergibt sich

$$\begin{aligned} \|v \times w\|^2 &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \cdot (1 - \cos^2(\vartheta)) \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \cdot \sin^2(\vartheta). \end{aligned}$$

Da $\vartheta \in [0, \pi]$, gilt $\sin(\vartheta) \geq 0$, so dass man die Behauptung durch Wurzelziehen ableiten kann. \square

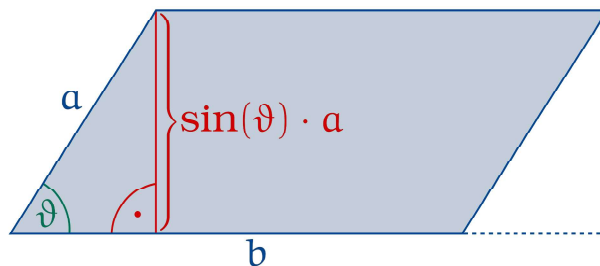
Die gerade hergeleitete Formel hat eine geometrische Interpretation. Es sei $P \subset \mathbb{R}^2$ ein Parallelogramm mit den Seitenlängen a und b und ϑ der Winkel, der von zwei Seiten eingeschlossen wird. Dann ist der Flächeninhalt F des Parallelogramms P durch die Formel

$$F = a \cdot b \cdot \sin(\vartheta)$$

gegeben. Wenn $\vartheta \neq \pi/2$, dann ist ϑ nicht eindeutig bestimmt. Der andere mögliche Wert ist aber nach dem Satz über Stufenwinkel durch $\pi - \vartheta$ gegeben. Wegen

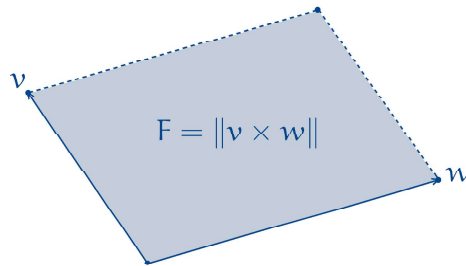
$$\sin(\pi - \vartheta) = \sin(\vartheta)$$

spielt diese Ungenauigkeit aber keine Rolle, und wir dürfen für die Herleitung der Formel $\vartheta \in (0, \pi/2)$ annehmen. Dann kann man Sie aber dem Bild



entnehmen.

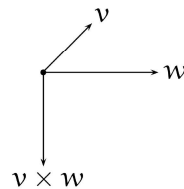
Für zwei linear unabhängige Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ gibt die Norm $\|v \times w\|$ des Vektorprodukts also den Flächeninhalt des von v und w aufgespannten Parallelogramms (in der von v und w aufgespannten Ebene) an.



Bemerkung IV.4.15. Man kann sich schließlich noch davon überzeugen, dass für zwei linear unabhängige Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$

$$\text{Det}(v|w|v \times w) > 0$$

gilt, d.h., $(v, w, v \times w)$ ist eine **positiv orientierte** Basis von \mathbb{R}^3 .



In diesem Fall ist das Vektorprodukt also durch folgende Bedingungen festgelegt:

- Der Vektor $v \times w$ ist orthogonal zu der Ebene E , die von v und w aufgespannt wird.
- $\text{Det}(v, w, v \times w) > 0$.
- $\|v \times w\| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\angle(v, w))$.

In der Tat bestimmt die erste Bedingung die Gerade durch den Ursprung, auf der $v \times w$ liegt. Die zweite Bedingung legt fest, auf welcher Seite der Ebene E der Vektor $v \times w$ liegt, und die dritte Bedingung gibt die Länge von $v \times w$ an.

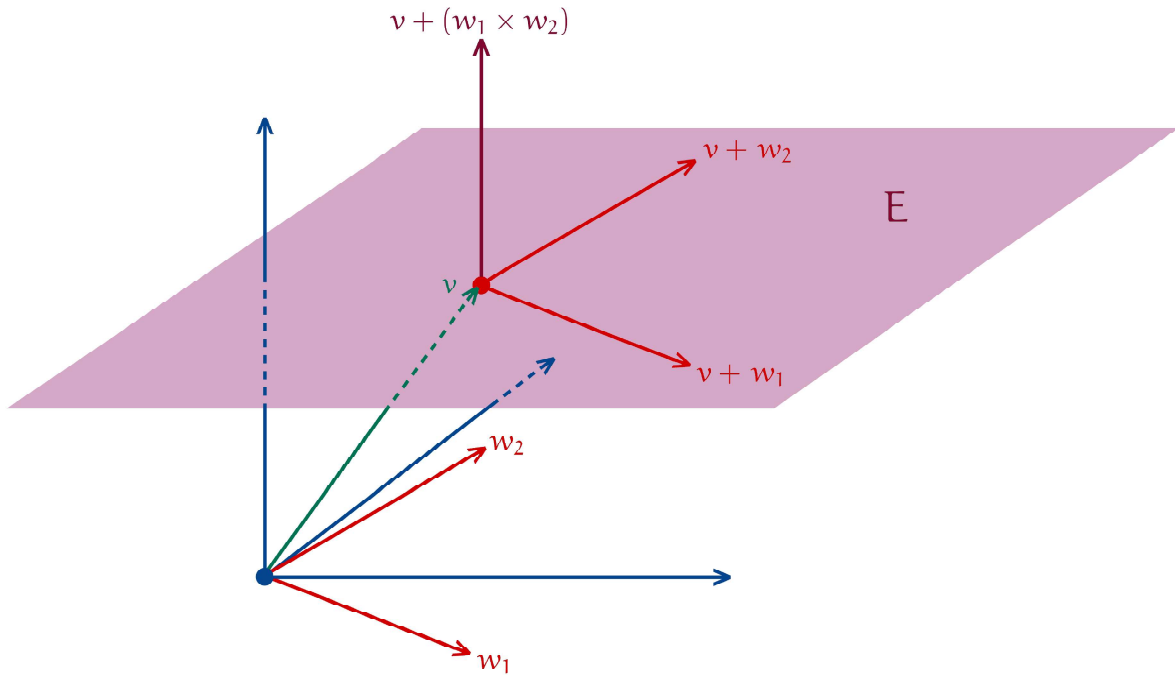
Ebenen in \mathbb{R}^3

Wir können mit dem Vektorprodukt Gleichungen für Ebenen in \mathbb{R}^3 finden. Dazu seien $v, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ Vektoren, so dass $v \neq 0$ und w_1 und w_2 linear unabhängig sind oder v, w_1, w_2 linear unabhängig sind. Wir möchten eine lineare Gleichung für die Ebene

$$E := v + \mathbb{R} \cdot w_1 + \mathbb{R} \cdot w_2$$

finden. Dazu beobachten wir, dass

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \perp (\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2) \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 \rangle = 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 \rangle \right\}. \end{aligned}$$



Setzen wir

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} := \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 \quad \text{und} \quad b := \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 \rangle,$$

dann gilt also

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + a_3 \cdot u_3 = b \right\}.$$

Beispiel IV.4.16. Wir möchten eine Gleichung für die Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ finden, die die drei Punkte

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

enthält. Mit

$$w_1 := v_1 - v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_2 := v_2 - v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

sind die Vektoren v, w_1, w_2 linear unabhängig, und

$$E := v + \mathbb{R} \cdot w_1 + \mathbb{R} \cdot w_2$$

ist in der Tat die einzige Ebene, die $v, v_1 = v + w_1$ und $v_2 = v + w_2$ enthält.

Mit

$$w_1 \times w_2 = \begin{pmatrix} \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \\ -\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \\ \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\langle v, w_1 \times w_2 \rangle = 3$$

erkennen wir, dass

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \mid 2 \cdot u_1 - 3 \cdot u_2 + u_3 = 1 \right\}.$$

Zum Abschluss diskutieren wir noch den Durchschnitt zweier Ebenen. Dazu seien $v, v', w_1, w'_1, w_2, w'_2 \in \mathbb{R}^3$ Vektoren, so dass

$$E = v + \mathbb{R} \cdot w_1 + \mathbb{R} \cdot w_2$$

und

$$E' = v' + \mathbb{R} \cdot w'_1 + \mathbb{R} \cdot w'_2$$

Ebenen sind. Wir nehmen an, dass $E \neq E'$ und $E \cap E' \neq \emptyset$. Das ist gleichbedeutend mit $W \neq W'$, $W := \mathbb{R} \cdot w_1 + \mathbb{R} \cdot w_2$, $W' := \mathbb{R} \cdot w'_1 + \mathbb{R} \cdot w'_2$. Mit der Dimensionsformel für Unterräume ([33], Aufgabe III.5.49) folgt $W + W' = \mathbb{R}^3$ und $\text{Dim}_k(W \cap W') = 1$. Daher gibt es insbesondere Vektoren $w \in W$ und $w' \in W'$, so dass

$$v - v' = w - w', \quad \text{d.h.,} \quad u := v - w = v' - w'.$$

Da der Vektor $v - w$ zu E und der Vektor $v' - w'$ zu E' gehört, folgt $u \in E \cap E'$, und die Gerade $g := E \cap E'$ ist durch

$$g = u + W \cap W'$$

gegeben. Um eine Basis für $W \cap W'$ zu finden, d.h., einen Vektor $t \in W \cap W'$ mit $W \cap W' = \langle t \rangle$, bilden wir

$$s := w_1 \times w_2 \quad \text{und} \quad s' := w'_1 \times w'_2.$$

Damit haben wir

$$W^\perp = \langle s \rangle \quad \text{und} \quad W'^\perp = \langle s' \rangle.$$

Wegen $W \neq W'$ gilt auch $W^\perp \neq W'^\perp$, so dass s und s' linear unabhängig sind und $t := s \times s' \neq 0$. Es gilt weiter

$$t \in W^{\perp\perp} \cap W'^{\perp\perp} = W \cap W'.$$

Also gilt $\langle t \rangle = W \cap W'$ und $G = u + \mathbb{R} \cdot t$.

IV.5 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ wird *orthogonal* bzw. *unitär* genannt, wenn

$$\forall v, w \in V: \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Eigenschaften IV.5.1. Für einen orthogonalen bzw. unitären Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ eines euklidischen bzw. unitären Vektorraums gelten folgende Aussagen:

- i) $\forall v \in V: \|f(v)\| = \|v\|$.
- ii) $\forall v, w \in V: v \perp w \iff f(v) \perp f(w)$.
- iii) Für jeden Eigenwert λ von f gilt $|\lambda| = 1$.
- iv) f ist injektiv.
- v) Falls V endlichdimensional ist, ist f bijektiv, und der inverse Endomorphismus f^{-1} ist ebenfalls orthogonal bzw. unitär.

Beweis. Die Teile i) und ii) ergeben sich unmittelbar aus der Definition eines orthogonalen bzw. unitären Endomorphismus.

Zu iii). Es seien $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert und $v \in V \setminus \{0\}$ ein nichttrivialer Eigenvektor. Dann gilt

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle = \langle \lambda \cdot v, \lambda \cdot v \rangle = \bar{\lambda} \cdot \lambda \cdot \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2.$$

Da $\|v\| \neq 0$ und $|\lambda| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, folgt $|\lambda| = 1$.

Zu iv). Es gilt $\text{Ker}(f) = \{0\}$, denn für $v \in \text{Ker}(f)$ hat man nach Teil i) $\|v\| = \|f(v)\| = \|0\| = 0$ und damit $v = 0$.

Zu v). Wenn V endlichdimensional ist, ist f laut [33], Folgerung III.5.41, iii), bijektiv. Die Umkehrabbildung $f^{-1}: V \rightarrow V$ ist linear ([33], Satz III.5.8) und

$$\forall v, w \in V: \quad \langle f^{-1}(v), f^{-1}(w) \rangle = \langle f(f^{-1}(v)), f(f^{-1}(w)) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Somit ist f^{-1} orthogonal bzw. unitär. □

Aus den Formeln in Bemerkung IV.3.6 schließen wir weiter.

Satz IV.5.2. *Ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ eines orthogonalen bzw. unitären Vektorraums ist genau dann orthogonal bzw. unitär, wenn*

$$\forall v \in V: \quad \|f(v)\| = \|v\|.$$

Bemerkung IV.5.3. Das Standardbeispiel für einen euklidischen Vektorraum ist \mathbb{R}^n zusammen mit dem Standardskalarprodukt und das für einen unitären Vektorraum \mathbb{C}^n mit dem Standardskalarprodukt. In beiden Beispielen bezeichnen wir das Standardskalarprodukt (s. Beispiel IV.1.2, a), IV.1.9, b) mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Es seien nun $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ ein endlichdimensionaler orthogonaler bzw. unitärer Vektorraum und $n := \text{Dim}_k(V)$. Gemäß Satz IV.4.5 besitzt V eine Orthonormalbasis $B = (b_1, \dots, b_n)$. Die lineare Abbildung $\Phi_B: V \rightarrow k^n$, die b_μ auf e_μ schickt, $\mu = 1, \dots, n$, ist dann ein *orthogonaler bzw. unitärer Isomorphismus*, d.h.

$$\forall v, w \in V: \quad \langle \Phi_B(v), \Phi_B(w) \rangle = \langle v, w \rangle_V.$$

Endlichdimensionale orthogonale und unitäre Vektorräume werden also ebenfalls nur durch ihre Dimension klassifiziert.

Die Symmetriegruppen euklidischer und unitärer Vektorräume endlicher Dimension spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle. Auf Grund der vorangegangenen Bemerkung sind sie isomorph zu den Symmetriegruppen von k^n mit dem Standardskalarprodukt, $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ ist *orthogonal*, wenn

$$A \cdot A^t = \mathbb{E}_n$$

gilt, d.h., wenn $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und $A^{-1} = A^t$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \text{O}(n) &:= \{ A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ orthogonal} \}, \\ \text{SO}(n) &:= \{ A \in \text{SL}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ orthogonal} \} \\ &= \{ A \in \text{O}(n) \mid \text{Det}(A) = 1 \}. \end{aligned}$$

Dementsprechend heißt eine Matrix $A \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$ *unitär*, wenn

$$A \cdot A^* = \mathbb{E}_n$$

gilt, d.h., wenn $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ und $A^{-1} = A^*$, und wir definieren

$$\begin{aligned} \text{U}(n) &:= \{ A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ unitär} \}, \\ \text{SU}(n) &:= \{ A \in \text{SL}_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ unitär} \} \\ &= \{ A \in \text{U}(n) \mid \text{Det}(A) = 1 \}. \end{aligned}$$

Bemerkung IV.5.4. Eine Matrix $A \in \text{Mat}(n; k)$ ist genau dann orthogonal bzw. unitär, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis für $(k^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bilden.

Lemma IV.5.5. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die zuvor definierten Mengen $\text{O}(n)$ und $\text{SO}(n)$ sind Untergruppen von $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, und $\text{U}(n)$ und $\text{SU}(n)$ sind Untergruppen von $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Man nennt $\text{O}(n)$ die *orthogonale Gruppe*, $\text{SO}(n)$ die *spezielle orthogonale Gruppe*, $\text{U}(n)$ die *unitäre Gruppe* und $\text{SU}(n)$ die *spezielle unitäre Gruppe*.

Beweis. Wir zeigen, dass $\text{U}(n)$ eine Untergruppe von $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ ist. Man beachte, dass dann auch $\text{SU}(n) = \text{U}(n) \cap \text{SL}_n(\mathbb{C})$ eine Untergruppe von $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ ist ([27], II.4.8 Beispiel). Ebenso folgt, dass $\text{O}(n) = \text{U}(n) \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\text{SO}(n) = \text{SU}(n) \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$ Untergruppen von $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ sind.

Wir prüfen die in [33], Definition II.2.7, geforderten Eigenschaften nach.

- a) Für die Einheitsmatrix \mathbb{E}_n gilt $\mathbb{E}_n^* = \mathbb{E}_n = \mathbb{E}_n^{-1}$, so dass $\mathbb{E}_n \in \text{U}(n)$.
- b) Es sei $A \in \text{U}(n)$. Es gilt $A^{-1-1} = A = A^{**} = A^{-1*}$ und deshalb $A^{-1} \in \text{U}(n)$.
- c) Es seien $A, B \in \text{U}(n)$. Dann gilt $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B^* \cdot A^* = (A \cdot B)^*$ und $A \cdot B \in \text{U}(n)$. □

Satz IV.5.6. *Es seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum, $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine durchnummerierte Orthonormalbasis von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- a) f ist orthogonal bzw. unitär.
- b) Die Darstellungsmatrix $M_B(f)$ ist orthogonal bzw. unitär.

Beweis. Wir beweisen den unitären Fall und benutzen den zu der Orthonormalbasis B gehörigen linearen Isomorphismus $\Phi_B: V \rightarrow \mathbb{C}^n$, der b_μ auf e_μ abbildet, $\mu = 1, \dots, n$. Für die Darstellungsmatrix $A := M_B(f)$ gilt nach [33], Bemerkung IV.1.22, i), und Definition III.5.11, die Identität

$$\forall v \in V: \quad \Phi_B(f(v)) = A \cdot \Phi_B(v). \tag{IV.3}$$

Es gilt daher

$$\begin{aligned} \forall v, w \in V: \quad \langle f(v), f(w) \rangle &= \overline{\Phi_B(f(v))}^t \cdot \Phi_B(f(w)) \\ &= \overline{(A \cdot \Phi_B(v))}^t \cdot (A \cdot \Phi_B(w)) = \overline{\Phi_B(v)}^t \cdot (A^* \cdot A) \cdot \Phi_B(w). \end{aligned}$$

Da Φ_B wie in Bemerkung IV.5.3 beschrieben ein unitärer Isomorphismus ist, gilt weiter

$$\forall v, w \in V: \quad \langle v, w \rangle_V = \langle \Phi_B(v), \Phi_B(w) \rangle = \overline{\Phi_B(v)}^t \cdot \Phi_B(w).$$

Da die Φ_B bijektiv ist, gilt

$$\left\{ (\Phi_B(v), \Phi_B(w)) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mid v, w \in V \right\} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n.$$

Damit erkennt man, dass f genau dann unitär ist, wenn $A^* \cdot A = \mathbb{E}_n$ gilt. \square

Wir diskutieren nun weitere Resultate zur Struktur orthogonaler und unitärer Endomorphismen. Wie bei der jordanischen Normalform unterscheidet sich die Theorie über \mathbb{R} von der über \mathbb{C} . Daher behandeln wir die beiden Fälle getrennt und beginnen mit dem einfacheren Fall über den komplexen Zahlen. Zuvor machen wir noch eine Beobachtung, die sich in beiden Fällen als nützlich erweisen wird.

Lemma IV.5.7. *Es seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum, $f: V \rightarrow V$ ein orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus und $U \subset V$ ein f -invarianter Teilraum, d.h., $f(U) \subset U$. Dann ist auch das orthogonale Komplement U^\perp von U invariant unter f , i.e., $f(U^\perp) \subset U^\perp$.*

Beweis. Nach Voraussetzung haben wir einen induzierten Endomorphismus $f_U: U \rightarrow U$, $u \mapsto f(u)$. Wegen Eigenschaft IV.5.1, iv), ist f_U injektiv und daher nach [33], Folgerung III.5.41, auch surjektiv. Es gilt folglich $f(U) = U$. Es seien $u \in U$ und $w \in U^\perp$. Es sei $u' \in U$ der Vektor mit $f(u') = u$. Damit finden wir

$$\langle u, f(w) \rangle = \langle f(u'), f(w) \rangle = \langle u', w \rangle = 0.$$

Daraus leiten wir die Behauptung ab. \square

Unitäre Endomorphismen

Der Körper der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen (Satz III.1.1). Für jeden Endomorphismus f eines endlichdimensionalen \mathbb{C} -Vektorraums zerfällt sein charakteristisches Polynom $\chi_f(t)$ vollständig in Linearfaktoren und f ist trigonalisierbar ([33], Satz V.6.2). Für unitäre Endomorphismen gilt noch mehr.

Satz IV.5.8. Gegeben seien ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, ein unitärer Endomorphismus $f: V \rightarrow V$, und es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von f . Dann existiert eine durchnummerierte Orthonormalbasis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, in der b_μ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_μ ist, $\mu = 1, \dots, n$. Insbesondere gilt

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

und f ist diagonalisierbar.

Bemerkung IV.5.9. a) Es seien $A \in U(n)$ eine unitäre Matrix und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ihre Eigenwerte. Laut Satz IV.5.8 existiert eine durchnummerierte Orthonormalbasis $B = (b_1, \dots, b_n)$ für $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, in der b_μ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_μ ist, $\mu = 1, \dots, n$. Setzt man

$$S := (b_1 | \dots | b_n),$$

dann gilt also

$$S^* \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

b) In Satz IV.5.8 ist V mit zwei Zusatzstrukturen versehen, einem Skalarprodukt und einem Endomorphismus. Mit Hilfe einer geeigneten Basis B von V können beide Strukturen simultan vereinfacht werden. Für die Darstellungsmatrix des Skalarprodukts gilt $M_B(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \mathbb{E}_n$, und die Darstellungsmatrix des Endomorphismus ist eine Diagonalmatrix.

c) In der Situation von Satz IV.5.8 seien $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die verschiedenen Eigenwerte von f . Aus dem Satz folgt, dass

$$\text{Eig}(f, \lambda_\mu) \perp \text{Eig}(f, \lambda_\nu)$$

für $1 \leq \mu < \nu \leq s$. Diese Tatsache kann man sich unabhängig vom Satz auf folgende Weise klar machen: Es seien $1 \leq \mu < \nu \leq s$, $v \in \text{Eig}(f, \lambda_\mu)$ und $w \in \text{Eig}(f, \lambda_\nu)$. Da f unitär ist, haben wir

$$\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle = \langle \lambda_\mu \cdot v, \lambda_\nu \cdot w \rangle = \bar{\lambda}_\mu \cdot \lambda_\nu \cdot \langle v, w \rangle.$$

Wenn $\langle v, w \rangle \neq 0$, dann muss $\bar{\lambda}_\mu \cdot \lambda_\nu = 1$ gelten. Nach Eigenschaft IV.5.1, iii), gilt $\bar{\lambda}_\mu \cdot \lambda_\mu = 1$. Beide Beobachtungen zusammen ergeben $\lambda_\mu = \bar{\lambda}_\mu^{-1} = \lambda_\nu$ und führen somit zum Widerspruch.

Beweis von Satz IV.5.8. Wir führen eine vollständige Induktion über die Dimension n von V . Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen.

Für den Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$ wählen wir einen nichttrivialen Eigenvektor v zum Eigenwert λ_1 und setzen $b_1 := v/\|v\|$. Damit ist $U := \langle b_1 \rangle$ ein f -invarianter Teilraum. Nach Lemma IV.5.7 ist $W := U^\perp$ ebenfalls f -invariant und hat nach Folgerung IV.4.7 die Dimension n . Es seien $f_W: W \rightarrow W$, $w \mapsto f(w)$, der induzierte Endomorphismus und $B_W = (b_2, \dots, b_{n+1})$ eine durchnummerierte Basis von W . Die Darstellungsmatrix von f bzgl. der durchnummerierten Basis $B = (b_1, b_2, \dots, b_{n+1})$ nimmt dann die Gestalt

$$M_B(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M_{B_W}(f_W) & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

an. Die Eigenwerte von f_W sind $\lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung können wir eine durchnummerierte Orthonormalbasis $B_W = (b_2, \dots, b_{n+1})$ finden, in der b_μ ein Eigenvektor von f_W zum Eigenwert λ_μ ist, $\mu = 2, \dots, n + 1$. Dann ist $B = (b_1, b_2, \dots, b_{n+1})$ eine durchnummerierte Orthonormalbasis von V mit der geforderten Eigenschaft. \square

Orthogonale Endomorphismen

Wir beschreiben erst einmal die spezielle orthogonale Gruppe $SO(2)$ und die orthogonale Gruppe $O(2)$. Sei also

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2).$$

Es gilt

$$\mathbb{E}_2 = A^t \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & a \cdot b + c \cdot d \\ a \cdot b + c \cdot d & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Wegen $a^2 + b^2 = 1$ und $c^2 + d^2 = 1$ liegen die Vektoren $u := (a, c)^t$ und $v := (b, d)^t$ auf dem Einheitskreis. Weiter bedeutet $a \cdot b + c \cdot d = 0$, dass $u \perp v$. Da $u \neq 0$, gilt $v = \lambda \cdot (-c, a)$ für eine geeignete Zahl λ . Aus $1 = \|v\| = |\lambda| \cdot \|u\| = |\lambda|$ folgt $\lambda = \pm 1$. Zudem gilt

$$\text{Det}(A) = \lambda.$$

Lemma IV.5.10. Für reelle Zahlen $a, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + c^2 = 1$ existiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $\alpha \in [0, 2 \cdot \pi)$ mit

$$a = \cos(\alpha) \quad \text{und} \quad c = \sin(\alpha).$$

Für den Beweis verweisen wir auf [29], Beispiel 3.2.4, iv). Aus diesen Diskussionen ergibt sich unmittelbar das folgende Resultat.

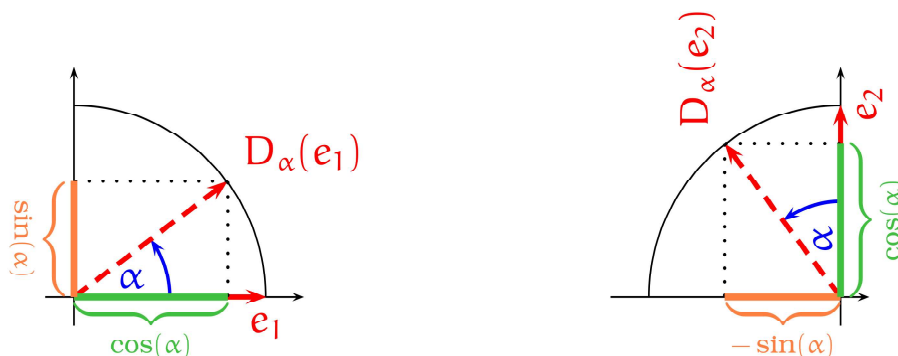
Satz IV.5.11. i) Eine (2×2) -Matrix A gehört genau dann der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(2)$ an, wenn es eine reelle Zahl $\alpha \in [0, 2 \cdot \pi)$ gibt, so dass

$$A = D_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

ii) Eine (2×2) -Matrix A liegt genau dann in $O(2) \setminus SO(2)$, wenn es eine reelle Zahl $\alpha \in [0, 2 \cdot \pi)$ gibt, so dass

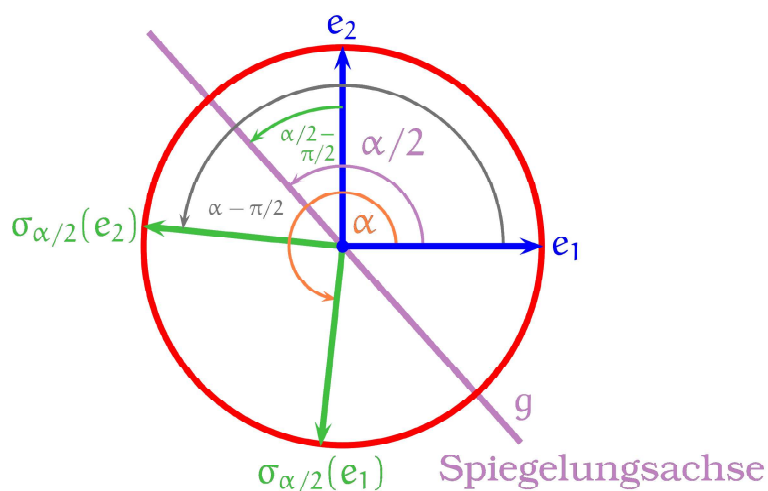
$$A = S_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der folgenden Skizze vergewissert man sich der Tatsache, dass die Matrix D_α die Drehung um den Winkel α beschreibt, $\alpha \in [0, 2\pi)$.



Man rechnet nun aus, dass A_α dann und nur dann einen reellen Eigenwert hat, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$. Die Matrix A_0 ist die Einheitsmatrix, und jeder Vektor ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Die Matrix A_π beschreibt die Drehung um den Winkel π . Es gilt $A_\pi = -\mathbb{E}_2$. Damit beschreibt A_π die Multiplikation mit -1 . Diese Abbildung ist auch als Punktspiegelung am Ursprung bekannt. Jeder Vektor ist Eigenvektor zum Eigenwert -1 .

Die Matrix S_α gehört zu der Spiegelung $\sigma_{\alpha/2}$ an der Geraden g , die mit der x -Achse den Winkel $\alpha/2$ einschließt, $\alpha \in [0, 2\pi)$.



Die Gerade g ist der Eigenraum zum Eigenwert 1. Die zu g orthogonale Gerade g^\perp ist der Eigenraum zum Eigenwert -1 .

Wir werden im Folgenden einen allgemeinen orthogonalen Endomorphismus beschreiben. Seien dazu $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, $n = \dim_{\mathbb{R}}(V)$ und $f: V \rightarrow V$ ein orthogonaler Endomorphismus. Da 1 und -1 nach Eigenschaft IV.5.1, iii), die einzig möglichen reellen Eigenwerte von f sind, gibt es natürliche Zahlen ν_+ , ν_- und m , so dass

$$n = \nu_+ + \nu_- + 2 \cdot m$$

sowie normierte Polynome

$$p_\mu(t) = t^2 + \beta_\mu \cdot t + \gamma_\mu \in \mathbb{R}[t]$$

vom Grad 2, $\mu = 1, \dots, m$, so dass

$$\chi_f(t) = (t - 1)^{\nu_+} \cdot (t + 1)^{\nu_-} \cdot p_m(t) \cdot \dots \cdot p_1(t).$$

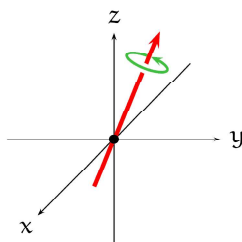
Satz IV.5.12. *In der obigen Situation existieren reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in (0, \pi)$, so dass*

$$p_\mu(t) = t^2 + 2 \cdot \cos(\alpha_\mu) \cdot t + 1, \quad \mu = 1, \dots, m,$$

Es sei $W := U^\perp$. Der Endomorphismus f induziert Endomorphismen $f_W: W \rightarrow W$ und $f_U: U \rightarrow U$. Nach Induktionsvoraussetzung können wir eine durchnummerierte Orthonormalbasis $B_W = (b_1, \dots, b_{n-1})$ wählen, so dass die Matrix $M_{B_W}(f_W)$ die im Satz behauptete Gestalt annimmt. Wir wählen eine Orthonormalbasis $B_U = (b_n, b_{n+1})$ für U . Da f_U nach Satz IV.5.11 und den darauf folgenden Bemerkungen eine Drehung ohne Eigenvektor ist, gibt es ein $\alpha \in (0, 2\pi)$ mit $M_{B_U}(f_U) = D_\alpha$. Man beachte, dass man für $B'_U = (-b_n, b_{n+1})$ die Darstellungsmatrix $D_{2\pi-\alpha}$ erhält. Nun gilt entweder $\alpha \in (0, \pi)$ oder $2\pi - \alpha \in (0, \pi)$, so dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha \in (0, \pi)$ voraussetzen können. Das charakteristische Polynom der Matrix D_α ist durch $t^2 + 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot t + 1$ gegeben. Bzgl. der durchnummerierten Orthonormalbasis $B = (b_1, \dots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1})$ hat die Darstellungsmatrix die behauptete Gestalt. \square

Bemerkung IV.5.13. Wie in Bemerkung IV.5.9, a), gibt es ein entsprechendes Resultat für Matrizen $A \in O(n)$.

Aufgabe IV.5.14. Zeigen Sie, dass jedes Element aus $SO(3)$ eine Drehung um eine geeignete Achse beschreibt.



Literaturhinweise

- [1] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Das BUCH der Beweise*, mit Zeichnungen von K.H. Hofmann, 4. überarb. und erw. Aufl., Springer Spektrum, Heidelberg, 2015, viii+344 S.
- [2] T. Arens, F. Hettlich, Ch. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger, H. Stachel, *Mathematik*, 4. Aufl., Springer Spektrum, Berlin, 2018, xxviii+1660 S.
- [3] E. Brieskorn, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. I., mit historischen Anmerkungen von Erhard Scholz, Friedr. Vieweg & Sohn, 1983. viii+636 S.
- [4] M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, M. Overmars, *Computational geometry. Algorithms and applications*, 3. Aufl., Springer, Berlin, 2008, xii+386 S.
- [5] R. Diestel, *Graphentheorie*, Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 1996, xiv+290 S.
- [6] H. Derksen, J. Weyman, *An introduction to quiver representations*, Graduate Studies in Mathematics, Bd. 184, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017, x+334 S.
- [7] H. Dörrie, *100 great problems of elementary mathematics. Their history and solution*, Nachdruck der Ausgabe von 1965, Übersetzung der 5. Aufl. des deutschen Originals von D. Antin, Dover Publications, Inc., New York, 1982, x+393 S.
- [8] M. Eisermann, *Simpliziale Komplexe*, <https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/igt/eiserm/lehre/Topologie/Topologie-I-2x2.pdf>.

- [9] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Comment. Acad. Sci. I. Petropolitanae **8** (1736), 128-40.¹
- [10] U. Friedrichsdorf, A. Prestel, *Mengenlehre für den Mathematiker*, Vieweg Studium **58**, Grundkurs Mathematik, Braunschweig/Wiesbaden, Friedr. Vieweg & Sohn, 1985, vi+103 S.
- [11] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, Manuscripta Math. **6** (1972), 71-103 (1972); Korrektur, ibid. **6**, 309.
- [12] P. Gabriel, *Indecomposable representations II*, in *Symposia Mathematica XI* (Convegno di Algebra Commutativa, INDAM, Rome, 1971), Academic Press, London, 1973, 81-104.
- [13] A. Hickok, D. Needell, M.A. Porter, *Analysis of spatiotemporal anomalies using persistent homology: Case studies with COVID-19 Data*, <https://arxiv.org/abs/2107.09188>, 31 S.
- [14] F. Hirzebruch, W. Scharlau, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Nachdruck der Originalausgabe von 1971, B.I.-Hochschultaschenbücher, Bd. 296, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1991, 178 S.
- [15] W. Klingenberg, *Lineare Algebra und Geometrie*, 3. Aufl., Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 1992, xiii+293 S.
- [16] Ch. Knauer, B. Broser, *Triangulierung von Polygonen und das Museumsproblem*, https://www.inf.fu-berlin.de/lehre/SS03/alg_geometrie/triangulationbunt_6.pdf.
- [17] H. Krause, *Representations of quivers via reflection functors*, <https://arxiv.org/abs/0804.1428>, 42 S.
- [18] G. Lamé, *Extrait d'une lettre de M. Lamé à M. Liouville sur cette question: Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales?*, J. math. pures appl. **3** (1838), 505-7.²
- [19] St. Marschner, P. Shirley, *Fundamentals of computer graphics*, CRC Press, 5. Aufl., 2021, xv+699 S.

¹<https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1052&context=euler-works>

²<https://archive.org/details/sljournaldemat03liou/page/505/mode/1up?view=theater>. Eine Übersetzung ins Englische enthält https://web.nmsu.edu/~davidp/hist_projects/catalan.pdf.

-
- [20] W.S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, Bd. 127, Springer-Verlag, New York, 1991, xvi+428 S.
- [21] M. Mesbahi, M. Egerstedt, *Graph theoretic methods in multiagent networks*, Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010, xx+403 S.
- [22] E. Munch, *A user's guide to topological data analysis*, *Journal of Learning Analytics* **4** (2) (2017), 47-61, <http://dx.doi.org/10.18608/jla.2017.42.6>.
- [23] S.Y. Oudot, *Persistence theory: from quiver representations to data analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 209, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, viii+218 S.
- [24] C.M. Ringel, *Representation theory of Dynkin quivers. Three contributions*, *Front. Math. China* **11** (2016), no. 4, 765-814.
- [25] St. Roman, *An introduction to Catalan numbers*, mit einem Vorwort von R. Stanley, Compact Textbooks in Mathematics, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015, xii+121 S.
- [26] J.J. Rotman, *An introduction to algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, Bd. 119, Springer-Verlag, New York, 1988, xiv+433 S.
- [27] A. Schmitt, *Algebra und Zahlentheorie*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/>.
- [28] A. Schmitt, *Analysis I*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/>.
- [29] A. Schmitt, *Analysis II*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/>.
- [30] A. Schmitt, *Analysis III*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/>.
- [31] A. Schmitt, *Funktionentheorie*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/>.
- [32] A. Schmitt, *Geometrie*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/>.
- [33] A. Schmitt, *Lineare Algebra I*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/>.

- [34] A. Schmitt, *An elementary discussion of the representation and geometric invariant theory of equioriented quivers of type D with an application to quiver bundles*, *Linear Multilinear Algebra*, <https://doi.org/10.1080/03081087.2021.1983512>.
- [35] M. Schottenloher, *Geometrie und Symmetrie in der Physik. Leitmotiv der Mathematischen Physik*, Vieweg Lehrbuch Mathematische Physik, Vieweg, Braunschweig, 1995, xxii+408 S.
- [36] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil I. Grundlagen*, *Mathematische Leitfäden*, B. G. Teubner, Stuttgart, 2000, 475 S.
- [37] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil II. Anwendungen*, *Mathematische Leitfäden*, B. G. Teubner, Stuttgart, 2003, 404 S.
- [38] *Der Fundamentalsatz der Algebra*, https://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentalsatz_der_Algebra.
- [39] *Triangulierung (Topologie)*, [https://de.wikipedia.org/wiki/Triangulierung_\(Topologie\)#Hauptvermutung](https://de.wikipedia.org/wiki/Triangulierung_(Topologie)#Hauptvermutung).