IV

Euklidische und unitäre Vektorräume

Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ erlaubt es, Winkel zwischen sich schneidenden Geraden und Abstände von Punkten zu messen. Mit Hilfe des Standardskalarprodukts lassen sich die Sätze der euklidischen Geometrie analytisch beweisen. Ein reeller Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist, wird daher auch euklidischer Vektorraum genannt. Ein Skalarprodukt ist eine spezielle Bilinearform. In diesem Kapitel werden wir daher zunächst das allgemeine Konzept einer Bilinearform auf einem Vektorraum vorstellen. In der endlichdimensionalen Situation besteht wieder ein enger Zusammenhang zu Matrizen, und die Klassifikation von Paaren, die aus einem endlichdimensionalen Vektorraum und einer Bilinearform bestehen, führt zu interessanten Normalformproblemen. Die Klassifikation von endlichdimensionalen euklidischen Vektorräumen ist dabei wieder sehr einfach. Ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum ist zu $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt isomorph. Dies wird mit Hilfe von Orthonormalbasen und des Gram[1]–Schmidt[2]-Prozesses–Schmidt bewiesen. Das Klassifikationsproblem für endlichdimensionale reelle Vektorräumen, die mit einer symmetrischen Bilinearform ausgestattet sind, wird durch den Trägheitssatz von Sylvester[3] gelöst. Hier treten der Rang und die Signatur als entscheidende Invarianten auf. Von Interesse ist weiter die Symmetriegruppe eines euklidischen Vektorraums. Für $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ist dies die orthogonale Gruppe. Mit Hilfe von Skalarproduk-

[1] Jrgen Pedersen Gram (1850 - 1916), dänischer Mathematiker.
[2] Erhard Schmidt (1876 - 1959), deutscher Mathematiker.
[3] James Joseph Sylvester (1814 - 1897), britischer Mathematiker.

ten lassen sich auch die Konzepte der adjungierten linearen Abbildungen und selbstadjungierten Endomorphismen einführen. Der Spektralsatz zeigt insbesondere, dass selbstadjungierte Endomorphismen eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums diagonalisierbar sind. Besonders die Verallgemeinerung dieses Ergebnisses auf unendlichdimensionale Vektorräume ist für die Quantenphysik von großer Bedeutung. Für komplexe Vektorräume sind Bilinearformen nicht geeignet, eine Längen- oder Abstandsmessung zu definieren. Zu diesem Zweck werden sogenannte SesquilinearformenSesquilinearform benötigt. Ihre Theorie wird daher in diesem Kapitel parallel zur Theorie der Bilinearformen entwickelt.

IV.1 Bilinearformen, Sesquilinearformen

Es seien k ein Körper und V ein k-Vektorraum. Eine *Bilinearform* auf V ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}\beta\colon V \times V &\longrightarrow k\\ (v,w) &\longmapsto \beta(v,w),\end{aligned}$$

so dass gilt:

a) Für jeden Vektor $w \in V$ ist die Abbildung $\beta(\cdot,w)\colon V \longrightarrow k$, $v \longmapsto \beta(v,w)$, k-linear, d.h.

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in k,\ v \in V: \qquad \beta(\lambda\cdot v,w) &= \lambda\cdot\beta(v,w),\\ \forall v_1,v_2 \in V: \qquad \beta(v_1+v_2,w) &= \beta(v_1,w)+\beta(v_2,w).\end{aligned}$$

b) Für jeden Vektor $v \in V$ ist die Abbildung $\beta(v,\cdot)\colon V \longrightarrow k$, $w \longmapsto \beta(v,w)$, k-linear, d.h.

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in k,\ w \in V: \qquad \beta(v,\lambda\cdot w) &= \lambda\cdot\beta(v,w),\\ \forall w_1,w_2 \in V: \qquad \beta(v,w_1+w_2) &= \beta(v,w_1)+\beta(v,w_2).\end{aligned}$$

Im Fall des Grundkörpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen benötigen wir ein weiteres Konzept, das es einem gestattet, eine Norm auf dem entsprechenden Vektorraum einzuführen. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine *Sesquilinearform* auf V ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}\sigma\colon V \times V &\longrightarrow k\\ (v,w) &\longmapsto \sigma(v,w),\end{aligned}$$

so dass gilt:

a) Für jeden Vektor $v \in V$ ist die Abbildung $\sigma(v, \cdot)\colon V \longrightarrow k$, $w \longmapsto \sigma(v, w)$, k-linear.

b) Für jeden Vektor $w \in V$ ist die Abbildung $\sigma(\cdot, w)\colon V \longrightarrow k$, $v \longmapsto \sigma(v, w)$, *semilinear*, d.h.

$$\begin{array}{rrcl} \forall v_1, v_2 \in V: & \sigma(v_1 + v_2, w) & = & \sigma(v_1, w) + \sigma(v_2, w), \\ \forall \lambda \in k,\ v \in V: & \sigma(\lambda \cdot v, w) & = & \overline{\lambda} \cdot \sigma(v, w). \end{array}$$

Dabei ist $\overline{\lambda} = \alpha - i \cdot \beta$ die zu $\lambda = \alpha + i \cdot \beta \in \mathbb{C}$ komplex konjugierte Zahl (s. S. 116), $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Bemerkung IV.1.1. Nach Eigenschaft III.2.1 ist die komplexe Konjugation

$$\begin{aligned} \overline{\cdot}\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \lambda &\longmapsto \overline{\lambda} \end{aligned}$$

ein Automorphismus des Körpers $\mathbb{C}$, d.h. eine bijektive Abbildung, so dass

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$: $\overline{\lambda + \mu} = \overline{\lambda} + \overline{\mu}$,
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$: $\overline{\lambda \cdot \mu} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\mu}$.

Wenn k ein beliebiger Körper ist, $\gamma\colon k \longrightarrow k$ ein Automorphismus von k und V ein k-Vektorraum, dann nennt man eine Abbildung $L\colon V \longrightarrow V$ γ-*linear*, wenn

- $\forall v, w \in V$: $L(v + w) = L(v) + L(w)$,
- $\forall \lambda \in k,\ v \in V$: $L(\lambda \cdot v) = \gamma(\lambda) \cdot L(v)$.

Beispiel IV.1.2. a) Es seien k ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}(n; k)$. Durch

$$\begin{aligned} \beta_A\colon k^n \times k^n &\longrightarrow k \\ (v, w) &\longmapsto v^t \cdot A \cdot w \end{aligned}$$

ist eine Bilinearform auf k^n gegeben. Für die Einheitsmatrix nennt man die resultierende Bilinearform

$$\begin{aligned} \beta_{\mathbb{E}_n}\colon k^n \times k^n &\longrightarrow k \\ \left(\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \right) &\longmapsto (s_1 \ \cdots \ s_n) \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \sum_{\mu=1}^{n} s_\mu \cdot t_\mu \end{aligned}$$

auch das *Standardskalarprodukt*.

b) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ eine komplexe Matrix. Die Vorschrift

$$\begin{aligned} \sigma_A\colon k^n \times k^n &\longrightarrow k \\ (v,w) &\longmapsto \overline{v}^t \cdot A \cdot w \end{aligned}$$

definiert eine Sesquilinearform auf k^n.

Lemma IV.1.3. i) *Es seien* k *ein Körper,* $n \in \mathbb{N}$ *und* $A, B \in \mathrm{Mat}(n;k)$*. Dann gilt:*

$$\beta_A = \beta_B \quad \Longleftrightarrow \quad A = B.$$

ii) *Es seien* $n \in \mathbb{N}$ *und* $A, B \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$*. Dann gilt:*

$$\sigma_A = \sigma_B \quad \Longleftrightarrow \quad A = B.$$

Beweis. Wir zeigen Teil ii). Der Beweis von Teil i) verläuft analog. Die Implikation „$\Longleftarrow$“ ist dabei offensichtlich. Es seien $A = (a_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\dots,n}$ und $B = (b_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\dots,n}$. Wenn $\sigma_A = \sigma_B$ gilt, dann finden wir

$$\forall \mu, \nu \in \{1, \dots, n\}: \quad a_{\mu\nu} = e_\mu^t \cdot A \cdot e_\nu = \sigma_A(e_\mu, e_\nu) = \sigma_B(e_\mu, e_\nu) = e_\mu^t \cdot B \cdot e_\nu = b_{\mu\nu}.$$

Somit gilt $A = B$. □

Im Folgenden werden wir einige Zusatzeigenschaften von Bilinearformen und die entsprechenden Begriffe für Matrizen erklären.

Es seien k ein Körper, V ein k-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Eine Bilinearform $\sigma\colon V \times V \longrightarrow k$ ist *symmetrisch*, wenn

$$\forall v, w \in V: \quad \beta(w, v) = \beta(v, w).$$

Eine Matrix A ist *symmetrisch*, wenn sie

$$A^t = A$$

erfüllt. Das bedeutet, dass die Matrix A invariant unter der Spiegelung ihrer Einträge an der Diagonalen ist.

Für einen komplexen Vektorraum V wird eine Sesquilinearform $\sigma\colon V \times V \longrightarrow k$ *hermitesch*[4] genannt, wenn

$$\forall v, w \in V: \quad \sigma(w, v) = \overline{\sigma(v, w)}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ wird eine komplexe Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ *hermitesch* genannt, wenn

$$A^\star := \overline{A}^t = A$$

gilt.

[4]Nach Charles Hermite (1822 - 1901), einem französischen Mathematiker.

Bemerkung IV.1.4. a) Für $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ haben wir

$$A^\star = \overline{A^t}.$$

b) Aus Bemerkung IV.1.1 und den Eigenschaften der Transposition folgt

$$(A \cdot B)^\star = B^\star \cdot A^\star$$

für $l, m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{Mat}(l, m;\mathbb{C})$ und $B \in \mathrm{Mat}(m, n;\mathbb{C})$.

c) Es seien V ein komplexer Vektorraum und $\sigma\colon V \times V \longrightarrow k$ eine hermitesche Sesquilinearform. Da für einen Vektor $v \in V$ definitionsgemäß

$$\sigma(v, v) = \overline{\sigma(v, v)}$$

gilt, muss $\sigma(v, v)$ reell sein. Ebenso ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$ und eine hermitesche Matrix $A = (a_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\dots,n} \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$, dass

$$a_{\mu\mu} \in \mathbb{R}, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Lemma IV.1.5. i) *Es seien* k *ein Körper,* $n \in \mathbb{N}$ *und* $A \in \mathrm{Mat}(n;k)$. *Dann ist die Bilinearform* β_A *genau dann symmetrisch, wenn die Matrix* A *es ist.*

ii) *Es seien* $n \in \mathbb{N}$ *und* $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$. *Dann ist die Sesquilinearform* σ_A *genau dann hermitesch, wenn die Matrix* A *es ist.*

Beweis. Wir zeigen abermals nur ii). Wir schreiben $A = (a_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\dots,n}$. Wenn σ_A hermitesch ist, dann finden wir mit Hilfe von Eigenschaft III.5.2, dass

$$a_{\mu\nu} = \overline{e}^t_\mu \cdot A \cdot e_\nu = \sigma_A(e_\mu, e_\nu) = \overline{\sigma_A(e_\nu, e_\mu)} = \overline{\overline{e}^t_\nu \cdot A \cdot e_\mu} = e^t_\nu \cdot \overline{A} \cdot \overline{e}_\mu = e^t_\nu \cdot \overline{A} \cdot e_\mu = \overline{a}_{\nu\mu}$$

für $\mu, \nu \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Das besagt gerade, dass A hermitesch ist.

Wenn umgekehrt A hermitesch ist, dann berechnen wir

$$\sigma_A(w, v) = \overline{w}^t \cdot A \cdot v = (\overline{w}^t \cdot A \cdot v)^t = v^t \cdot A^t \cdot \overline{w} = \overline{\overline{v}^t \cdot \overline{A}^t \cdot w} = \overline{\overline{v}^t \cdot A \cdot w} = \overline{\sigma_A(v, w)}$$

für $v, w \in V$. Somit ist σ_A eine hermitesche Sesquilinearform. □

Bemerkung IV.1.6. a) Es seien k ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die Teilmenge

$$\mathrm{Sym}_n(k) := \{\, A \in \mathrm{Mat}(n;k) \mid A^t = A \,\}$$

der symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen ist ein k-linearer Teilraum von $\mathrm{Mat}(n;k)$.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Teilmenge

$$\mathrm{Herm}_n(\mathbb{C}) := \{\, A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}) \mid A^\star = A \,\}$$

der hermiteschen $(n \times n)$-Matrizen zwar ein $\mathbb{R}$-linearer Teilraum von $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ aber kein $\mathbb{C}$-linearer. Dazu beachte man:

- Für $A, B \in \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C})$ gilt $(A+B)^\star = A^\star + B^\star = A+B$, so dass $A \in \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C})$.
- Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C})$ gilt $(\lambda \cdot A)^\star = \overline{\lambda} \cdot A^\star = \lambda \cdot A$ und daher $\lambda \cdot A \in \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C})$.
- Es gilt $\mathbb{E}_n \in \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C})$ aber $i \cdot \mathbb{E}_n \notin \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C})$, denn $(i \cdot \mathbb{E}_n)^\star = -i \cdot \mathbb{E}_n \neq i \cdot \mathbb{E}_n$.

Wir kommen nun zu den zentralen Objekten dieses Kapitels. Eine symmetrische Bilinearform $\beta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem reellen Vektorraum V wird *positiv definit* genannt, wenn

$$\forall v \in V \setminus \{0\}: \quad \beta(v,v) > 0. \tag{IV.1}$$

Eine positiv definite und symmetrische Bilinearform auf einem reellen Vektorraum ist ein *Skalarprodukt*.

Nun sei $\sigma\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Sesquilinearform auf dem komplexen Vektorraum V. Nach Bemerkung IV.1.4, c), ist $\sigma(v,v) \in \mathbb{R}$, $v \in V$. Wir nennen $\sigma\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ *positiv definit*, wenn

$$\forall v \in V \setminus \{0\}: \quad \sigma(v,v) > 0. \tag{IV.2}$$

Eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform wird ebenfalls *Skalarprodukt* genannt.

Beispiel IV.1.7. a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist das Standardskalarprodukt $\beta_{\mathbb{E}_n}$ offenbar ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

b) Ebenso ist für $n \in \mathbb{N}$ die Sesquilinearform $\sigma_{\mathbb{E}_n}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Dazu berechnet man für $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, dass

$$\sigma_{\mathbb{E}_n}\left(\begin{pmatrix} a_1 + i \cdot b_1 \\ \vdots \\ a_n + i \cdot b_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 + i \cdot b_1 \\ \vdots \\ a_n + i \cdot b_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu - i \cdot b_\nu) \cdot (a_\nu + i \cdot b_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \geq 0.$$

Dabei wird der Ausdruck genau dann null, wenn $a_1 = \cdots = a_n = b_1 = \cdots = b_n$.

IV.2 Darstellungsmatrizen von Bilinear- und Sesquilinearformen

Bisher haben wir erklärt, wie man Bilinear- und Sesquilinearformen auf k^n, k ein Körper, bzw. $\mathbb{C}^n$ mit $(n \times n)$-Matrizen beschreiben kann, $n \geq 1$. Dasselbe ist wie üblich für beliebige Vektorräume über den entsprechenden Körpern möglich, wenn man zuvor eine Basis gewählt hat. Das soll nun explizit formuliert werden.

Es seien k ein Körper, V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine durchnummerierte Basis von V und $\beta\colon V \times V \longrightarrow k$ eine Bilinearform. Die *Darstellungsmatrix* von β bzgl. der Basis B ist gegeben als

$$M_B(\beta) = \big(\beta(b_\mu, b_\nu)\big)_{\mu,\nu=1,...,n}.$$

Für einen endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V, eine durchnummerierte Basis $B = (b_1, ..., b_n)$ von V und eine Sesquilinearform $\sigma\colon V \times V \longrightarrow k$ ist die *Darstellungsmatrix* von σ bzgl. der Basis B definiert als

$$M_B(\sigma) = \big(\sigma(b_\mu, b_\nu)\big)_{\mu,\nu=1,...,n}.$$

Lemma IV.2.1. i) *Es seien k ein Körper, V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine durchnummerierte Basis von V und $\beta\colon V \times V \longrightarrow k$ eine Bilinearform. Für Vektoren $v = \alpha_1 \cdot b_1 + \cdots + \alpha_n \cdot b_n$ und $w = \gamma_1 \cdot b_1 + \cdots + \gamma_n \cdot b_n$ gilt*

$$\beta(v, w) = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \cdot M_B(\beta) \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Das folgende Diagramm kommutiert also:

$$\begin{array}{ccccc} (v, w) & & V \times V & \xrightarrow{\beta} & k \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ \big(\Phi_B(v), \Phi_B(w)\big) & & k^n \times k^n & \xrightarrow{\beta_{M_B(\beta)}} & k \end{array}.$$

ii) *Die Bilinearform β in* i) *ist genau dann symmetrisch, wenn die Matrix $M_B(\beta)$ symmetrisch ist.*

iii) *Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine durchnummerierte Basis von V und $\sigma\colon V \times V \longrightarrow k$ eine Sesquilinearform. Für Vektoren $v = \alpha_1 \cdot b_1 + \cdots + \alpha_n \cdot b_n$ und $w = \gamma_1 \cdot b_1 + \cdots + \gamma_n \cdot b_n$ gilt*

$$\sigma(v, w) = (\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_n) \cdot M_B(\sigma) \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Damit ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccc} (v, w) & & V \times V & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ \big(\Phi_B(v), \Phi_B(w)\big) & & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\sigma_{M_B(\sigma)}} & \mathbb{C} \end{array}.$$

iv) *Die Sesquilinearform σ in* iii) *ist genau dann hermitesch, wenn die Matrix $M_B(\sigma)$ hermitesch ist.*

Beweis. Punkt ii) bzw. iv) ist angesichts des kommutativen Diagramm in i) bzw. iii) und Lemma IV.1.5, i) bzw. ii), offensichtlich.

Wir beweisen weiter iii). Auf Grund der Sesquilinearität haben wir

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha_1 \cdot b_1 + \cdots + \alpha_n \cdot b_n, w) &= \sum_{\mu=1}^{n} \overline{\alpha}_\mu \cdot \sigma(b_\mu, w) \\
&= \sum_{\mu=1}^{n} \overline{\alpha}_\mu \cdot \sigma(b_\mu, \gamma_1 \cdot b_1 + \cdots + \gamma_n \cdot b_n) \\
&= \sum_{\mu=1}^{n} \overline{\alpha}_\mu \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \cdot \sigma(b_\mu, b_\nu) \\
&= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \overline{\alpha}_\mu \cdot \gamma_\nu \cdot \sigma(b_\mu, b_\nu).
\end{aligned}$$

Wegen $M_B(\sigma)_{\mu,\nu} = \sigma(b_\mu, b_\nu)$, $\mu, \nu = 1, ..., n$, stimmt dieser Ausdruck mit

$$(\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_n) \cdot M_B(\sigma) \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

überein. □

Wir fixieren einen Körper k und einen endlichdimensionalen k-Vektorraum und setzen

$$\mathrm{Bil}_k(V) := \{\, \beta\colon V \times V \longrightarrow k \,|\, \beta \text{ ist Bilinearform} \,\}.$$

Mit Hilfe der Addition

$$\begin{aligned}
+\colon \mathrm{Bil}_k(V) \times \mathrm{Bil}_k(V) &\longrightarrow \mathrm{Bil}_k(V) \\
(\beta_1, \beta_2) &\longmapsto \big(\beta_1 + \beta_2\colon (v, w) \longmapsto \beta_1(v, w) + \beta_2(v, w)\big)
\end{aligned}$$

wird $\mathrm{Bil}_k(V)$ zu einer abelschen Gruppe und durch die Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned}
\cdot\colon k \times \mathrm{Bil}_k(V) &\longrightarrow \mathrm{Bil}_k(V) \\
(\lambda, \beta) &\longmapsto \big(\lambda \cdot \beta\colon (v, w) \longmapsto \lambda \cdot \beta(v, w)\big)
\end{aligned}$$

zum k-Vektorraum.

Für eine durchnummerierte Basis $B = (b_1, ..., b_n)$ sind

$$\begin{aligned}
M_B\colon \mathrm{Bil}_k(V) &\longrightarrow \mathrm{Mat}(n; k) \\
\beta &\longmapsto M_\beta
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \beta_B\colon \mathrm{Mat}(n;k) &\longrightarrow \mathrm{Bil}_k(V) \\ A &\longmapsto \beta_B(A)\colon (v,w) \longmapsto \Big(\beta_A\big(\Phi_B(v), \Phi_B(w)\big)\Big) \end{aligned}$$

nach Lemma IV.2.1, i), zueinander inverse lineare Abbildungen.

Entsprechend kann man für einen endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V die Menge

$$\mathrm{Sesq}(V) := \big\{\, \sigma\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C} \,|\, \sigma \text{ ist Sesquilinearform} \,\big\}$$

mit der Struktur eines $\mathbb{C}$- Vektorraums ausstatten. Für eine durchnummerierte Basis $B = (b_1, ..., b_n)$ sind

$$\begin{aligned} M_B\colon \mathrm{Sesq}(V) &\longrightarrow \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}) \\ \sigma &\longmapsto M_\sigma \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_B\colon \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{Sesq}(V) \\ A &\longmapsto \sigma_B(A)\colon (v,w) \longmapsto \sigma_A\big(\Phi_B(v), \Phi_B(w)\big) \end{aligned}$$

zueinander inverse $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen. Zum Abschluss möchten wir das Verhalten von Darstellungsmatrizen unter Basiswechsel beschreiben.

Satz IV.2.2 (Transformationsformel)**.** i) *Es seien* k *ein Körper,* V *ein endlichdimensionaler* k*-Vektorraum,* $\beta\colon V \times V \longrightarrow k$ *eine Bilinearform und* B, C *zwei durchnummerierte Basen von* V*. Mit*

$$S := M^B_C(\mathrm{Id}_V)$$

gilt

$$M_B(\beta) = S^t \cdot M_C(\beta) \cdot S.$$

ii) *Für einen endlichdimensionalen* $\mathbb{C}$*-Vektorraum* V*, eine Sesquilinearform* $\sigma\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$*, zwei durchnummerierte Basen* B, C *von* V *und die Basiswechselmatrix*

$$S := M^B_C(\mathrm{Id}_V)$$

gilt

$$M_B(\sigma) = S^\star \cdot M_C(\sigma) \cdot S.$$

Beweis. Wie üblich zeigen wir ii). Man erinnere sich daran, dass nach [33], Definition IV.1.26,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{Id}_V"] \arrow[d, "\Phi_B"'] & V \arrow[d, "\Phi_C"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "f_S"] & \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Weiter verwenden wir die kommutativen Diagramme aus Lemma IV.2.1, iii), zu den Basen B und C und erhalten

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \arrow[r, "\sigma_{M_B(\sigma)}"] & \mathbb{C} \arrow[d, equal] \\ V \times V \arrow[u, "(\Phi_B{,}\Phi_B)"] \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "(\Phi_C{,}\Phi_C)"'] & \mathbb{C} \arrow[d, equal] \\ \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \arrow[r, "\sigma_{M_C(\sigma)}"] & \mathbb{C} \end{tikzcd} .$$

Für Vektoren $v, w \in \mathbb{C}^n$ erkennen wir damit

$$\begin{aligned} \overline{v}^t \cdot M_B(\sigma) \cdot w &= \overline{\underbrace{(\Phi_C \circ \Phi_B^{-1})(v)}_{=S\cdot v}}^t \cdot M_C(\sigma) \cdot \underbrace{(\Phi_C \circ \Phi_B^{-1})(w)}_{=S\cdot w} \\ &= (\overline{v}^t \cdot \overline{S}^t) \cdot M_C(\sigma) \cdot (S \cdot w) \\ &= \overline{v}^t \cdot (\overline{S}^t \cdot M_C(\sigma) \cdot S) \cdot w. \end{aligned}$$

Wegen $S^\star = \overline{S}^t$ können wir daraus die Behauptung folgern. □

IV.3 Normierte Vektorräume

Normierte Vektorräume verbinden lineare Algebra und Analysis. In der Funktionalanalysis [14] sind die auftretenden Vektorräume allerdings meist unendlichdimensional. In diesem Abschnitt werden die Grundbegriffe eingeführt und gezeigt, wie durch Skalarprodukte Normen induziert werden. In diesem Abschnitt ist der Körper k entweder der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen oder der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. In beiden Fällen bezeichnen wir mit $|\cdot|$ den üblichen Absolutbetrag auf k.

Es sei V ein k-Vektorraum, endlich- oder unendlichdimensional. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\|\colon V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \|v\|, \end{aligned}$$

so dass gilt:

(N1) $\forall v \in V \forall \lambda \in k$: $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$.

(N2) $\forall v, w \in V$: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

(N3) $\forall v \in V$: $\|v\| = 0 \Longrightarrow v = 0$.

Axiom (N2) wird als *Dreiecksungleichung* bezeichnet.

Bemerkung IV.3.1. Es sei $v \in V$. Dann gilt $\|0\| = \|0 \cdot v\| = |0| \cdot \|v\| = 0 \cdot \|v\| = 0$. Weiter erkennen wir $0 = \|0\| = \|v - v\| \leq \|v\| + \| - v\| = \|v\| + \|v\| = 2 \cdot \|v\|$, d.h., $\|v\| \geq 0$.

Ein *normierter* k-*Vektorraum* ist ein Paar $(V, \| \cdot \|)$, das aus einem k-Vektorraum V und einer Norm $\| \cdot \|$ auf V besteht.

Mit einer Norm kann man die Länge von Vektoren messen. Dies induziert auch eine Abstandsmessung. Dieses Konzept erläutern wir zunächst allgemein.

Es sei A eine Menge. Eine *Metrik* auf A ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} d\colon A \times A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y), \end{aligned}$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

(M1) $\forall x, y \in A$: $d(x, y) = d(y, x)$.

(M2) $\forall x, y, z \in A$: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(M3) $\forall x, y \in A$: $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

Axiom (M2) wird wieder *Dreiecksungleichung* genannt.

Bemerkung IV.3.2. a) Es seien A eine Menge und d eine Metrik auf A. Für $x, y \in A$ gilt dann $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = d(x, y) + d(x, y) = 2 \cdot d(x, y)$, so dass $d(x, y) \geq 0$.

b) Auf $\mathbb{R}^2$ ist der *euklidische Abstand* durch

$$d\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

gegeben. Die Dreiecksungleichung besagt, dass in einem Dreieck in der Ebene die Länge einer Seite kleiner gleich der Summe der Länge der beiden anderen Seiten ist. (Wann gilt Gleichheit?)

Beispiel IV.3.3. a) Es sei A eine Menge. Dann ist

$$\begin{aligned} d_0\colon A \times A &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases} \end{aligned}$$

eine Metrik. Diese Metrik stellt lediglich fest, ob zwei Punkte in A gleich sind oder nicht.

b) Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter k-Vektorraum. Man setze

$$\begin{aligned} d\colon V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \|v - w\|. \end{aligned}$$

Die ist eine Metrik auf V. Man beachte, dass die Metrik d_0 aus a) nicht durch eine Norm induziert ist, wenn $V \neq 0$.

Ein *euklidischer Vektorraum* ist ein Paar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, in dem V ein reeller Vektorraum ist und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Das Gegenstück über den komplexen Zahlen ist ein *unitärer Vektorraum*, d.h., ein Paar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, das sich aus einem komplexen Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V zusammensetzt.

Bemerkung IV.3.4. Es seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder ein unitärer Vektorraum und $U \subset V$ ein linearer Teilraum. Dann ist $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle_U)$ mit

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle_U\colon U \times U &\longrightarrow k \\ (u_1, u_2) &\longmapsto \langle u_1, u_2\rangle \end{aligned}$$

ebenfalls ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.

Satz IV.3.5. *Es sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein euklidischer oder ein unitärer Vektorraum. Dann wird durch*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|\colon V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \sqrt{\langle v, v\rangle} \end{aligned}$$

eine Norm auf V *definiert.*

Wir erinnern in diesem Zusammenhang an (IV.1) und (IV.2). Dadurch ist garantiert, dass der Ausdruck unter der Wurzel niemals negativ ist.

Bemerkung IV.3.6. Das Skalarprodukt kann aus der Norm zurückgewonnen werden. In Fall $k = \mathbb{R}$ hat man

$$\forall v, w: \quad \langle v, w\rangle = \frac{1}{4} \cdot \big(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2\big).$$

Für $k = \mathbb{C}$ gilt die kompliziertere Formel

$$\forall v, w: \quad \langle v, w\rangle = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{4} i^k \cdot \|v + i^k \cdot w\|^2.$$

Weitere interessante Beobachtungen sind in Bemerkung IV.3.9 enthalten.

Im Beweis von Satz IV.3.5 werden wir das folgende wichtige Hilfsmittel benutzen.

Satz IV.3.7 (Cauchy[5]–Schwarz[6]-Ungleichung). *Es seien* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein euklidischer oder ein unitärer Vektorraum und* $v, w \in V$*. Dann gilt:*

$$\big|\langle v, w\rangle\big| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Beweis. Wir notieren zuerst, dass für $\lambda \in k$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle v - \lambda \cdot w, v - \lambda \cdot w\rangle \\
&= \langle v, v - \lambda \cdot w\rangle + \langle -\lambda \cdot w, v - \lambda \cdot w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle + \langle v, -\lambda \cdot w\rangle - \overline{\lambda} \cdot \langle w, v - \lambda \cdot w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle - \lambda \cdot \langle v, \cdot w\rangle - \overline{\lambda} \cdot \langle w, v\rangle - \overline{\lambda} \cdot \langle w, -\lambda \cdot w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle - \lambda \cdot \langle v, \cdot w\rangle - \overline{\lambda} \cdot \langle w, v\rangle + \overline{\lambda} \cdot \lambda \cdot \langle w, w\rangle
\end{aligned}$$

gültig ist. Falls $w = 0$, dann ist die Cauchy–Schwarz-Ungleichung offensichtlich erfüllt, und es gilt sogar Gleichheit. Andernfalls können wir

$$\lambda := \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\langle w, w\rangle}$$

setzen. Die obige Ungleichung wird dann zu

$$0 \leq \langle v, v\rangle - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\langle w, w\rangle} - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\langle w, w\rangle} + \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\langle w, w\rangle}.$$

Nach Multiplikation mit der positiven reellen Zahl $\langle w, w\rangle$ wird daraus

$$0 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle - \big|\langle v, w\rangle\big|^2,$$

so dass

$$\big|\langle v, w\rangle\big|^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle.$$

Da auf beiden Seiten der Gleichung nicht negative reelle Zahlen stehen, können wir die Wurzel ziehen und erhalten somit die Cauchy–Schwarz-Ungleichung wie sie im Satz formuliert wurde. □

Bemerkung IV.3.8. Es sei $w \neq 0$. Die erste Ungleichung im obigen Beweis zeigt, dass der Fall der Gleichheit genau auftritt, wenn $v = \lambda \cdot w$ gilt. Somit wird die Cauchy–Schwarz-Ungleichung genau dann zur Gleichung, wenn v und w linear abhängig sind.

[5]Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857), französischer Mathematiker.

[6]Hermann Amandus Schwarz (1843 - 1921), deutscher Mathematiker.

Beweis von Satz IV.3.5. Es seien $v \in V$ und $\lambda \in k$. Es gilt

$$\|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda \cdot v, \lambda \cdot v\rangle} = \sqrt{\overline{\lambda} \cdot \lambda \cdot \langle v, v\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \cdot \langle v, v\rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle v, v\rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

Damit ist Bedingung (N1) erfüllt.

Bevor wir (N2) beweisen, bemerken wir, dass für reelle Zahlen a, b und die komplexe Zahl $z = a + i \cdot b$

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| \geq a = \frac{1}{2} \cdot (z + \overline{z})$$

gilt. Mit dieser Beobachtung folgt, dass

$$\|v + w\|^2 = \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} + \langle w, w\rangle \leq \langle v, v\rangle + 2 \cdot \big|\langle v, w\rangle\big| + \langle w, w\rangle$$

für $v, w \in V$ gilt. Setzen wir nun die Cauchy–Schwarz-Ungleichung IV.3.7 ein, dann finden wir

$$\|v+w\|^2 \leq \langle v, v\rangle + 2 \cdot \sqrt{\langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle} + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + 2 \cdot \|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = \big(\|v\| + \|w\|\big)^2.$$

Nach ziehen der Wurzel wird daraus die Dreiecksungleichung (N2).

Wenn $v \in V \setminus \{0\}$, dann gilt $\langle v, v\rangle > 0$, denn ein Skalarprodukt ist positiv definit. Es folgt $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} > 0$. Damit ist auch Eigenschaft (N3) nachgewiesen. □

Bemerkung IV.3.9. a) Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Aus der Cauchy–Schwarz-Ungleichung IV.3.7 folgt

$$\forall v, w \in V : \quad -1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1.$$

Deshalb kann man

$$\measuredangle(v, w) := \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}\right) \in [0, \pi]$$

definieren. Wir nennen $\measuredangle(v, w)$ den *Winkel* zwischen v und w. Man beachte, dass bei dieser Winkelmessung genau dann $\measuredangle(v, w) = \pi/2$ ($\widehat{=} 90°$) gilt, wenn $\langle v, w\rangle = 0$.

Zur Motivation dieser Begriffsbildung schauen wir uns $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt aus Beispiel IV.1.2, a), an. Es seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ zwei von $(0, 0)^t$ verschiedene Vektoren. Da $\measuredangle(v, w) = \measuredangle(\lambda \cdot v, \mu \cdot w)$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$, können wir v durch $v/\|v\|$ und w durch $w/\|w\|$ ersetzen. Mit anderen Worten, es reicht, die Situation

$$v, w \in S^1 := \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, s^2 + t^2 = 1 \right\}$$

zu betrachten. Es gibt dann eindeutig bestimmte Zahlen ([29], 3.2.4 Beispiele, iv) $\alpha, \beta \in [0, 2\cdot\pi)$, so dass

$$v = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}.$$

Es gilt folglich

$$\langle v, w \rangle = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta).$$

Gemäß der Additionstheoreme ([28], 4.10.13 Folgerung, b) stimmt dieser Ausdruck mit

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$$

überein, und wir schließen

$$\measuredangle(v, w) = \begin{cases} |\beta - \alpha|, & \text{falls } 0 \le |\beta - \alpha| \le \pi \\ 2\cdot\pi - |\beta - \alpha|, & \text{sonst} \end{cases}.$$

b) In einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|$ gilt der *Satz von Pythagoras*[7]

$$\forall v, w \in V: \quad \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \|w\|^2.$$

Falls $\langle v, w\rangle = 0$ und damit $\langle w, v\rangle = \overline{\langle v, w\rangle} = 0$, dann wird dies zu

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

In Teil a) der Bemerkung hatten wir dazu bereits festgehalten, dass $\langle v, w\rangle = 0$ für von Null verschiedene Vektoren bedeutet, dass sie aufeinander senkrecht stehen.

c) Es seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Dann gilt die *Parallelogrammgleichung*

$$\forall v, w \in V: \quad \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\cdot\big(\|v\|^2 + \|w\|^2\big).$$

Gilt in einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ die Parallelogrammgleichung, dann ist die Norm $\|\cdot\|$ wie in Satz IV.3.5 beschrieben durch ein Skalarprodukt induziert ([14], Lemma 20.6, [36], Satz 1.19).

IV.4 Orthonormalbasen

Es seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $v, w \in V$. Wir sagen, dass v *orthogonal* zu w ist, wenn $\langle v, w\rangle = 0$, und schreiben $v \perp w$. Diese

[7]Pythagoras von Samos (um 570 - 510 v.u.Z.), griechischer Philosoph und Mathematiker.

Begriffsbildung ist durch die Winkelmessung in der euklidische Ebene motiviert (s. Bemerkung IV.3.9, a). Der lineare Teilraum $U \subset V$ ist *orthogonal* zu dem linearen Teilraum $W \subset V$, wenn $u \perp w$ für alle Vektoren $u \in U$ und $w \in W$ gilt. Wir schreiben dann ebenfalls $U \perp W$. Weiter ist für einen linearen Teilraum $U \subset V$ sein *orthogonales Komplement* durch

$$U^\perp = \left\{ v \in V \,|\, \forall u \in U :\ v \perp u \right\}$$

gegeben.

Bemerkung IV.4.1. a) Man überprüft leicht, dass $U^\perp$ ebenfalls ein linearer Teilraum von V ist.

b) Es gilt $U \cap U^\perp = 0$, denn für $u \in U \cap U^\perp$ gilt $u \perp u$, d.h., $\langle u, u\rangle = 0$. Da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist, bedeutet dies $u = 0$.

c) Es gilt $U \subset U^{\perp\perp}$.

Ein *Orthogonalsystem* ist eine Familie $(v_\mu)_{\mu \in I}$ von Vektoren in V, so dass $v_\mu \perp v_\nu$ für alle $\mu, \nu \in I$ mit $\mu \neq \nu$ gilt. Ein Orthogonalsystem $(v_\mu)_{\mu\in I}$, in dem zusätzlich $\|v_\mu\| = 1$, $\mu \in I$, für die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm $\| \cdot \|$ (Satz IV.3.5) gilt, ist ein *Orthonormalsystem*. Ein Orthonormalsystem $(v_\mu)_{\mu\in I}$, das gleichzeitig eine Basis für V ist, ist eine *Orthonormalbasis* für V

Bemerkung IV.4.2. i) Eine Basis $B = (b_1, ..., b_n)$ ist genau dann eine Orthonormalbasis für V, wenn die Darstellungsmatrix des Skalarprodukts bzgl. der Basis B die Einheitsmatrix $\mathbb{E}_n$ ist.

ii) Für ein Orthogonalsystem $(v_\mu)_{\mu\in I}$ mit $v_\mu \neq 0$, $\mu \in I$, ist $\{v_\mu \,|\, \mu \in I\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V. In der Tat gilt für eine Linearkombination $\sum\limits_{i\in I} \lambda_\mu \cdot v_\mu$ und $\mu_0 \in I$, dass

$$\left\langle \sum_{\mu \in I} \lambda_\mu \cdot v_\mu, v_{\mu_0} \right\rangle = \lambda_{\mu_0} \cdot \|v_{\mu_0}\|.$$

Ferner ist $(v'_\mu)_{\mu\in I}$ mit $v'_\mu := v_\mu / \|v_\mu\|$, $\mu \in I$, ein Orthonormalsystem.

Beispiel IV.4.3. Für $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$ bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das StandardskalarproduktStandardskalarprodukt auf k^n (Beispiel IV.1.2, a). Dann ist die Standardbasis $(e_1, ..., e_n)$ eine Orthonormalbasis für V.

Satz IV.4.4. *Es seien* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und* $U \subset V$ *ein linearer Teilraum. Dann lässt sich jede Orthonormalbasis* $B' = (b_1, ..., b_m)$ *von* $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle_U)$[8] *zu einer Orthonormalbasis* $B = (b_1, ..., b_n)$ *fortsetzen. Insbesondere besitzt* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *eine Orthonormalbasis.*

[8] s. Bemerkung IV.3.4

Beweis. Die Existenz einer Orthonormalbasis für $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ergibt sich durch Anwendung der vorherigen Aussage auf den linearen Teilraum 0. Dieser hat vereinbarungsgemäß die leere Menge als Orthonormalbasis.

Die erste Aussage wird mit dem **Orthonormalisierungsverfahren** von **Gram** und **Schmidt** bewiesen. Formal handelt es sich um einen Induktionsbeweis. Die Induktion läuft dabei über die Kodimension $\kappa := \mathrm{Dim}_k(V) - \mathrm{Dim}_k(U)$. Aus $\kappa = 0$ folgt $U = V$, und die Aussage ist in diesem Fall trivial. Nun sei sie für κ bereits bewiesen, und $U \subset V$ sei ein linearer Teilraum der Kodimension $\kappa + 1$. Wir wählen einen Vektor $v \in V \setminus U$ und definieren mit Hilfe der vorliegenden Orthonormalbasis B' für $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle_U)$ die Vektoren

$$v' := \langle b_1, v\rangle \cdot b_1 + \cdots + \langle b_m, v\rangle \cdot b_m, \quad b' := v - v' \quad \text{und} \quad b_{m+1} := \frac{b'}{\|b'\|}.$$

Für $j \in \{1, \dots, m\}$ berechnen wir nun

$$\begin{aligned}\langle b_\nu, b'\rangle &= \langle b_\nu, v\rangle - \langle b_\nu, v'\rangle \\ &= \langle b_\nu, v\rangle - \sum_{\mu=1}^{m} \langle b_\mu, v\rangle \cdot \underbrace{\langle b_\nu, b_\mu\rangle}_{=\delta_{\mu\nu}} \\ &= \langle b_\nu, v\rangle - \langle b_\nu, v\rangle = 0.\end{aligned}$$

Somit sind $(b_1, \dots, b_m, b')$ ein Orthogonalsystem und $(b_1, \dots, b_m, b_{m+1})$ ein Orthonormalsystem. Der lineare Teilraum $U' := \langle b_1, \dots, b_{m+1} \rangle$ hat die Dimension $m + 1 = \mathrm{Dim}_k(U) + 1$, s.d. $\mathrm{Dim}_k(V) - \mathrm{Dim}_k(U') = \mathrm{Dim}_k(V) - \mathrm{Dim}_k(U) - 1 = \kappa + 1 - 1 = \kappa$. Nach Induktionsvoraussetzung lässt sich die Orthonormalbasis $(b_1, \dots, b_{m+1})$ von $(U', \langle\cdot,\cdot\rangle_{U'})$ zu einer Orthonormalbasis $B = (b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n)$ von $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ergänzen. Offenbar ist B auch eine Ergänzung von B'. □

Folgerung IV.4.5. *Es seien* $k = \mathbb{R}$ *bzw.* $k = \mathbb{C}$ *und* $A \in \mathrm{Mat}(n; k)$ *eine positiv definite symmetrische bzw. hermitesche Matrix. Dann existiert eine Matrix* $S \in GL_n(k)$*, so dass*

$$S^t \cdot A \cdot S = \mathbb{E}_n \quad \textit{bzw.} \quad S^\star \cdot A \cdot S = \mathbb{E}_n.$$

Beweis. Die Matrix A definiert ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ auf k^n. Es seien $(b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis für $(k^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ und $S := (b_1|\cdots|b_n)$. Für $k = \mathbb{C}$ gilt

$$S^\star \cdot A \cdot S = (\overline{b}_\mu^t \cdot A \cdot b_\nu)_{\mu,\nu=1,\dots,n} = \big(\langle b_\mu, b_\nu\rangle_A\big)_{\mu,\nu=1,\dots,n} = \mathbb{E}_n.$$

Der reelle Fall wird analog gelöst. □

Folgerung IV.4.6. *Es seien* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und* $U \subset V$ *ein linearer Teilraum. Dann gilt*

i) $V = U \oplus U^\perp$,

ii) $U = U^{\perp\perp}$.

Beweis. i) Wie in Bemerkung IV.4.1, b), beobachtet, gilt $U \cap U^\perp = 0$.

Es gilt $\mathrm{Dim}_k(U^\perp) \geq \mathrm{Dim}_k(V) - \mathrm{Dim}_k(U)$. Denn sei $(b_1, ..., b_m)$ eine Orthonormalbasis von $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle_U)$, dann existiert nach Satz IV.4.4 eine Orthonormalbasis der Form $(b_1, ..., b_m, b_{m+1}, ..., b_n)$ für $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dabei gilt

$$\langle\, b_{m+1}, ..., b_n \,\rangle \subset U^\perp.$$

Wir argumentieren weiter

$$\begin{aligned} \mathrm{Dim}_k(V) &\geq \mathrm{Dim}_k(U + U^\perp) = \mathrm{Dim}_k(U \oplus U^\perp) = \mathrm{Dim}_k(U) + \mathrm{Dim}_k(U^\perp) \\ &\geq \mathrm{Dim}_k(U) + \mathrm{Dim}_k(V) - \mathrm{Dim}_k(U) = \mathrm{Dim}_k(V). \end{aligned}$$

Es gilt folglich in jedem Schritt Gleichheit und damit insbesondere

$$V = U + U^\perp = U \oplus U^\perp.$$

ii) Nach Teil i) für die linearen Teilräume U und $U^\perp$ haben wir

$$V = U \oplus U^\perp \quad \text{und} \quad V = U^\perp \oplus U^{\perp\perp},$$

so dass $\mathrm{Dim}_k(U) = \mathrm{Dim}_k(U^{\perp\perp})$. Da auch $U \subset U^{\perp\perp}$ (Bemerkung IV.4.1, c), folgt in der Tat $U = U^{\perp\perp}$. □

Bemerkung IV.4.7. Das Gram–Schmidt-Verfahren wird üblicherweise folgendermaßen durchgeführt: Gegeben seien ein euklidischer oder unitärer Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und eine Basis $(v_1, ..., v_n)$ von V. Dann setze man

- $b_1 := \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$,
- $u_{\mu+1} := v_{\mu+1} - \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\mu} \langle b_\nu, v_{\nu+1}\rangle \cdot b_\mu$, $b_{\mu+1} := \dfrac{u_{\mu+1}}{\|u_{\mu+1}\|}$, $\mu = 1, ..., n-1$.

Man beachte, dass bei diesem Verfahren stets

$$\langle\, b_1, ..., b_\mu \,\rangle = \langle\, v_1, ..., v_\mu \,\rangle, \quad \nu = 1, ..., n,$$

gilt.

Beispiel IV.4.8. Wir behaupten, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert. Sie ist offenkundig symmetrisch, und für $s = (s_1, s_2, s_3)^t \in \mathbb{R}^3$ berechnet man

$$\begin{aligned} s^t \cdot A \cdot s &= (s_1, s_2, s_3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot s_1 - 2 \cdot s_2 \\ -2 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 \\ 5 \cdot s_3 \end{pmatrix} \\ &= 4 \cdot s_1^2 - 4 \cdot s_1 \cdot s_2 + 2 \cdot s_2^2 + 5 \cdot s_3^2 \\ &= (2 \cdot s_1 - s_2)^2 + s_2^2 + 5 \cdot s_3^2. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass dieser Ausdruck stets nichtnegativ ist und genau dann verschwindet, wenn $s_1 = s_2 = s_3 = 0$. Das Tripel (v_1, v_2, v_3) mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis für $\mathbb{R}^3$. Wir berechnen[9]

$$\|v_1\| = 2 \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter finden wir

$$u_2 = v_2 - \langle b_1, v_2 \rangle_A \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\left(\frac{1}{2}, 0, 0 \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\|u_2\| = 1$ erhalten wir

$$b_2 = u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[9]Es sei daran erinnert, dass $\|\cdot\|$ für die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ definierte Norm steht.

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} u_3 &= v_3 - \langle b_1, v_3\rangle_A \cdot b_1 - \langle b_2, v_3\rangle_A \cdot b_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} - \left(\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) \cdot \begin{pmatrix} -2\\2\\5 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\1\\0 \end{pmatrix} - \left(\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \cdot \begin{pmatrix} -2\\2\\5 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\0\\0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\1\\0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diesmal gilt

$$\|u_3\| = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad b_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{pmatrix} 0\\0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Das Verfahren liefert somit die Orthonormalbasis

$$b_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\2\\0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Zur Probe verifiziert man noch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \mathbb{E}_3.$$

Literaturhinweise

[1] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Das BUCH der Beweise*, mit Zeichnungen von K.H. Hofmann, 4. überarb. und erw. Aufl., Springer Spektrum, Heidelberg, 2015, viii+344 S.

[2] T. Arens, F. Hettlich, Ch. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger, H. Stachel, *Mathematik*, 4. Aufl., Springer Spektrum, Berlin, 2018, xxviii+1660 S.

[3] E. Brieskorn, *Lineare Algebra und analytische Geometrie.* I., mit historischen Anmerkungen von Erhard Scholz, Friedr. Vieweg & Sohn, 1983. viii+636 S.

[4] M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, M. Overmars, *Computational geometry. Algorithms and applications*, 3. Aufl., Springer, Berlin, 2008, xii+386 S.

[5] R. Diestel, *Graphentheorie*, Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 1996, xiv+290 S.

[6] H. Derksen, J. Weyman, *An introduction to quiver representations*, Graduate Studies in Mathematics, Bd. 184, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017, x+334 S.

[7] H. Dörrie, *100 great problems of elementary mathematics. Their history and solution*, Nachdruck der Ausgabe von 1965, Übersetzung der 5. Aufl. des deutschen Originals von D. Antin, Dover Publications, Inc., New York, 1982, x+393 S.

[8] M. Eisermann, *Simpliziale Komplexe*, `https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/igt/eiserm/lehre/Topologie/Topologie-I-2x2.pdf`.

[9] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Comment. Acad. Sci. I. Petropolitanae **8** (1736), 128-40.[1]

[10] U. Friedrichsdorf, A. Prestel, *Mengenlehre für den Mathematiker*, Vieweg Studium **58**, Grundkurs Mathematik, Braunschweig/Wiesbaden, Friedr. Vieweg & Sohn, 1985, vi+103 S.

[11] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen* I, Manuscripta Math. **6** (1972), 71-103 (1972); Korrektur, ibid. **6**, 309.

[12] P. Gabriel, *Indecomposable representations* II, in *Symposia Mathematica* XI (Convegno di Algebra Commutativa, INDAM, Rome, 1971), Academic Press, London, 1973, 81-104.

[13] A. Hickok, D. Needell, M.A. Porter, *Analysis of spatiotemporal anomalies using persistent homology: Case studies with COVID-19 Data*, `https://arxiv.org/abs/2107.09188`, 31 S.

[14] F. Hirzebruch, W. Scharlau, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Nachdruck der Originalausgabe von 1971, B.I.-Hochschultaschenbücher, Bd. 296, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1991, 178 S.

[15] W. Klingenberg, *Lineare Algebra und Geometrie*, 3. Aufl., Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 1992, xiii+293 S.

[16] Ch. Knauer, B. Broser, *Triangulierung von Polygonen und das Museumsproblem*, `https://www.inf.fu-berlin.de/lehre/SS03/alg_geometrie/triangulationbunt_6.pdf`.

[17] H. Krause, *Representations of quivers via reflection functors*, `https://arxiv.org/abs/0804.1428`, 42 S.

[18] G. Lamé, *Extrait d'une lettre de M. Lamé à M. Liouville sur cette question: Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales?*, J. math. pures appl. **3** (1838), 505-7.[2]

[19] St. Marschner, P. Shirley, *Fundamentals of computer graphics*, CRC Press, 5. Aufl., 2021, xv+699 S.

[1] `https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1052&context=euler-works`

[2] `https://archive.org/details/s1journaldemat03liou/page/505/mode/1up?view=theater`. Eine Übersetzung ins Englische enthält `https://web.nmsu.edu/~davidp/hist_projects/catalan.pdf`.

[20] W.S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, Bd. 127, Springer-Verlag, New York, 1991, xvi+428 S.

[21] M. Mesbahi, M. Egerstedt, *Graph theoretic methods in multiagent networks*, Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010, xx+403 S.

[22] E. Munch, *A user's guide to topological data analysis*, Journal of Learning Analytics **4** (2) (2017), 47-61, `http://dx.doi.org/10.18608/jla.2017.42.6`.

[23] S.Y. Oudot, *Persistence theory: from quiver representations to data analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 209, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, viii+218 S.

[24] C.M. Ringel, *Representation theory of Dynkin quivers. Three contributions*, Front. Math. China **11** (2016), no. 4, 765-814.

[25] St. Roman, *An introduction to Catalan numbers*, mit einem Vorwort von R. Stanley, Compact Textbooks in Mathematics, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015, xii+121 S.

[26] J.J. Rotman, *An introduction to algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, Bd. 119, Springer-Verlag, New York, 1988, xiv+433 S.

[27] A. Schmitt, *Algebra und Zahlentheorie*, Vorlesungsskript, `http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/`.

[28] A. Schmitt, *Analysis* I, Vorlesungsskript, `http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/`.

[29] A. Schmitt, *Analysis* II, Vorlesungsskript, `http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/`.

[30] A. Schmitt, *Analysis* III, Vorlesungsskript, `http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/`.

[31] A. Schmitt, *Funktionentheorie*, Vorlesungsskript, `http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/`.

[32] A. Schmitt, *Geometrie*, Vorlesungsskript, `http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/`.

[33] A. Schmitt, *Lineare Algebra* I, Vorlesungsskript, `http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/`.

[34] A. Schmitt, *An elementary discussion of the representation and geometric invariant theory of equioriented quivers of type D with an application to quiver bundles*, Linear Multilinear Algebra, https://doi.org/10.1080/03081087.2021.1983512.

[35] M. Schottenloher, *Geometrie und Symmetrie in der Physik. Leitmotiv der Mathematischen Physik*, Vieweg Lehrbuch Mathematische Physik, Vieweg, Braunschweig, 1995, xxii+408 S.

[36] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil* I. *Grundlagen*, Mathematische Leitfäden, B. G. Teubner, Stuttgart, 2000, 475 S.

[37] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil* II. *Anwendungen*, Mathematische Leitfäden, B. G. Teubner, Stuttgart, 2003, 404 S.

[38] *Der Fundamentalsatz der Algebra*, https://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentalsatz_der_Algebra.

[39] *Triangulierung (Topologie)*, https://de.wikipedia.org/wiki/Triangulierung_(Topologie)#Hauptvermutung.