

Skript zur Vorlesung „Funktionentheorie“

Alexander Schmitt

Berlin, Sommersemester 2012

Inhalt

Inhalt	i
Vorwort	iii
I Die komplexen Zahlen	1
I.1 Cardanos Lösungsformel	1
I.2 Der Körper der komplexen Zahlen	3
I.3 Komplexe Zahlen und Matrizen	8
I.4 Komplexe Konjugation und Betrag	8
I.5 Polarkoordinaten	11
I.6 Einheitswurzeln	14
I.7 Winkeltreue Abbildungen	16
II Potenzreihen	21
II.1 Folgen und Konvergenz	21
II.2 Unendliche Reihen	25
II.3 Potenzreihen	28
II.4 Die Exponentialfunktion	37
II.5 Die eulerschen Formeln	38
II.6 Der Hauptzweig des Logarithmus	43
II.7 Potenzfunktionen	44
III Holomorphe Funktionen	51
III.1 Stetigkeit	51
III.2 Einige Begriffe aus der Topologie	55
III.3 Differenzierbarkeit	56
III.4 Die Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen	69
III.5 Konforme Abbildungen	74
III.6 Möbiustransformationen	80
IV Integration komplexer Funktionen	91
IV.1 Integration über Intervalle	92
IV.2 Wegintegrale	94
IV.3 Stammfunktionen	101

IV.4	Der Cauchy-Integralsatz	103
IV.5	Die Cauchy-Integralformeln	112
IV.6	Potenzreihen	119
IV.7	Der Identitätssatz	126
IV.8	Gebietstreue und das Maximumprinzip	132
IV.9	Automorphismen der Einheitskreisscheibe und der oberen Halbebene	136
V	Meromorphe Funktionen	139
V.1	Isolierte Singularitäten holomorpher Funktionen	139
V.2	Laurentzerlegungen	144
V.3	Meromorphe Funktionen	153
V.4	Die riemannsche Zahlenkugel	158
V.5	Automorphismen von \mathbb{C}	165
VI	Der Residuensatz	167
VI.1	Umlaufzahlen	167
VI.2	Der Residuensatz	170
VI.3	Anzahlen von Null- und Polstellen	178
VI.4	Integration mit dem Residuensatz	183
VI.5	Die Partialbruchzerlegung des Kotangens	191
	Literaturhinweise	195
	Stichwortverzeichnis	197

Vorwort

Der vorliegende Text ist ein Skript zur Vorlesung „Funktionentheorie“, die ich an der Freien Universität Berlin im Sommersemester 2008 und im Sommersemester 2012 gehalten habe. Er enthält eine Einführung in die Theorie holomorpher Funktionen bis zum Residuensatz.

Wir beginnen mit einer ausführlichen Darstellung der komplexen Zahlen. Dabei wird auch auf die historischen Wurzeln in der Lösungstheorie algebraischer Gleichungen und die Interpretation in der euklidischen Geometrie eingegangen.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der Theorie komplexer Potenzreihen. Um sie zu behandeln, müssen wir Konvergenz für komplexe Folgen und Reihen erklären. Diese Begriffe sind direkte Übertragungen aus der reellen Analysis. Wir nutzen an dieser Stelle die Gelegenheit, diese zentralen Konzepte der Analysis ausführlich zu wiederholen. Mit Hilfe von Potenzreihen können wir einige wichtige komplexe Funktionen wie die Exponential-, die Sinus und die Kosinusfunktion definieren. Im späteren Verlauf der Vorlesung wird sich zeigen, dass jede holomorphe Funktion lokal durch eine Potenzreihe gegeben ist. Damit spielen Potenzreihen in der komplexen Analysis eine besondere Rolle. Sie schlagen die wichtige Brücke zur Algebra.

Im dritten Kapitel wird der Begriff der komplexen Differenzierbarkeit eingeführt. Er ergibt sich durch eine formale Übertragung des entsprechenden Begriffs für reelle Funktionen einer Veränderlichen. Für holomorphe Funktionen, also Funktionen, die auf einer nichtleeren offenen Teilmenge der komplexen Zahlen definiert und in jedem ihrer Punkte komplex differenzierbar sind, ergeben sich allerdings erstaunliche Einschränkungen. Das zeigt sich zunächst daran, dass viele einfache Funktionen wie etwa die komplexe Konjugation nirgends komplex differenzierbar sind, und wird später durch die Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen präzisiert. Sie charakterisieren diejenigen reell differenzierbaren Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, die holomorph sind. Zum Abschluss des Kapitels gehen wir auf geometrische Aspekte der Theorie holomorpher Funktionen ein.

Das vierte Kapitel ist der wichtigste Teil der Vorlesung. Es wird erklärt, wie man holomorphe Funktionen längs (stückweise glatter) Wege integrieren kann. Der erste Hauptsatz ist der Cauchy-Integralsatz. Er liefert das Verschwinden von Integralen holomorpher Funktionen auf gewissen Gebieten entlang geschlossener Wege und damit die Existenz von Stammfunktionen. Der zweite Hauptsatz ist die Cauchy-Integralformel. Qualitativ zeigt sie, dass die Werte einer holomorphen Funktion, die in einer offenen Umgebung einer abgeschlossenen Kreisscheibe $D \subset \mathbb{C}$ erklärt ist, im Inneren \mathring{D} dieser Kreisscheibe

durch die Werte auf dem Rand ∂D festgelegt sind. Mit diesen Sätzen leiten wir die bemerkenswerten Eigenschaften holomorpher Funktionen, z.B. die Existenz von Potenzreihenentwicklungen, Gebietstreue und das Maximumprinzip, ab. Wir beschließen das Kapitel mit Anwendungen auf die Geometrie der oberen Halbebene und der Einheitskreisscheibe.

Im fünften Kapitel untersuchen wir holomorphe Funktionen in der Umgebung von Definitionslücken. Als Hilfsmittel steht dabei die Entwicklung holomorpher Funktionen auf punktierten Kreisscheiben oder allgemeiner auf Kreisringgebieten in eine sogenannten Laurentreihe zur Verfügung. Laurentreihen mit Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$ enthalten dabei auch negative Potenzen $(z - a)^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Es gibt drei Typen von Singularitäten, die hebbaren, die Polstellen und die wesentlichen. Sie lassen sich durch ihr Werteverhalten und die Gestalt ihrer Laurentreihen unterscheiden. Holomorphe Funktion, deren Menge von Definitionslücken diskret im Definitionsbereich liegt und die keine wesentlichen Singularitäten aufweisen, nennt man meromorphe Funktionen. In der Funktionentheorie einer Veränderlichen kann man meromorphe Funktionen als holomorphe Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ansehen. Die Menge $\overline{\mathbb{C}}$ kann mit der Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit versehen werden. Man spricht von der riemannschen Zahlenkugel. Schließlich kann man holomorphe Funktionen auf der riemannschen Zahlenkugel untersuchen.

Der Text endet mit einem Kapitel zum Residuensatz. Der Residuensatz ist die allgemeinste Integralformel, die im vorliegenden Skript bewiesen wird. Das Integral einer meromorphen Funktion mit endlich vielen Polstellen entlang eines stückweise stetig differenzierbaren Wegs, der keine der Polstellen trifft, wird durch die Umlaufzahlen des Wegs um die Polstellen und die Residuen der Funktion in den Polstellen, dies sind die Koeffizienten der Potenz z^{-1} in der entsprechenden Laurentreihe, ausgewertet. Die vielfältigen Anwendungen dieses Satzes schließen Berechnungen gewisser eigentlicher und uneigentlicher Integrale reeller Funktionen über reelle Intervalle ein.

Ich danke Frau Anna Wißdorf und Herrn Nikolai Beck für die Durchsicht des Manuskripts und zahlreiche Korrekturen. Die biographischen Angaben zu den MathematikerInnen stammen aus WIKIPEDIA. Das Skript basiert hauptsächlich auf den Büchern [3] und [11]. Weiter Vorlagen sind [1], [2] und [10].

Alexander Schmitt
Berlin, im Oktober 2012

I

Die komplexen Zahlen

Der Aufbau des Zahlensystems, ausgehend von den natürlichen Zahlen \mathbb{N} , über die ganzen und rationalen Zahlen \mathbb{Z} bzw. \mathbb{Q} bis zum Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen wird z.B. in [13], Kapitel 1, erklärt. Wie schon erwähnt ist \mathbb{R} ein Körper, d.h. auf \mathbb{R} haben wir eine Addition $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Multiplikation $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass die in Definition I.2.2 aufgelisteten Axiome gelten. Zudem ist \mathbb{R} mit einer Anordnung „ \leq “ versehen ([13], Definition 1.6.3). Die charakteristische Eigenschaft von \mathbb{R} ist, bzgl. dieser Anordnung **ordnungsvollständig** zu sein ([13], Definition 1.6.10 und Satz 1.7.6). Weiter haben wir auf \mathbb{R} den **Absolutbetrag** $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Auch hier haben wir einen Vollständigkeitsbegriff: Jede Cauchy-Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von reellen Zahlen konvergiert ([13], Satz 2.3.12). Die beiden erwähnten Vollständigkeitsbegriffe sind im Wesentlichen äquivalent ([13], S. 88). Mit dem zweiten Vollständigkeitsbegriff können wir die reelle Analysis wie z.B. in [13], [14] und [15] erläutert entwickeln.

Im nächsten Schritt möchten wir den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen zum Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen erweitern. Was ist der Grund für diesen Schritt? In \mathbb{R} existiert keine Zahl x mit $x^2 = -1$. Wahrscheinlich hat jede Leserin und jeder Leser schon einmal gehört, dass es in \mathbb{C} eine Zahl i mit $i^2 = -1$ gibt. Allerdings ist die Erweiterung von \mathbb{R} nach \mathbb{C} nicht ganz verlustfrei: Der Körper \mathbb{C} lässt sich **nicht anordnen** (Aufgabe I.2.9). Hat man eine Anordnung, so kann man von positiven Zahlen sprechen, dies sind diejenigen Zahlen a mit $a > 0$. Von Null verschiedene Quadrate sind dabei immer positiv ([13], Eigenschaft 1.6.4, vi). Folglich wären -1 und 1 in einem angeordneten Körper der komplexen Zahlen positiv. Dann wäre aber auch $0 = 1 + (-1)$ positiv ([13], Definition 1.6.3 (o1)). Da das nicht geht, kann es auf \mathbb{C} keine Anordnung geben.

I.1 Cardanos Lösungsformel

Die Notwendigkeit für die Einführung der komplexen Zahlen liegt in der Theorie der algebraischen Gleichungen begründet. Wir erinnern zunächst an den Fall der quadratischen Gleichungen. Dazu seien $a \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{I.1}$$

lässt die Lösungen

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{I.2})$$

zu. Bei der Interpretation von (I.2) spielt offenbar die **Diskriminante**

$$b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$$

eine große Rolle:

- $b^2 - 4ac > 0$: (I.1) hat zwei verschiedene reelle Lösungen; sie sind durch (I.2) gegeben.
- $b^2 - 4ac = 0$: (I.1) hat eine reelle Lösung; sie ist durch (I.2) gegeben.
- $b^2 - 4ac < 0$: (I.1) hat keine reelle Lösung.

I.1.1 Beispiel. Für die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ hat die Diskriminante den Wert $1 - 4 = -3 < 0$. Diese Gleichung besitzt keine reelle Lösung.

In der Theorie der quadratischen Gleichungen „sehen“ wir schon die komplexen Zahlen, nämlich als Wurzeln negativer reeller Zahlen. Allerdings benötigen wir sie für eine zufriedenstellende Theorie quadratischer Gleichungen nicht.¹

Bei **kubischen Gleichungen** sieht es etwas anders aus. Zu $p, q \in \mathbb{R}$ untersuchen wir die Gleichung

$$x^3 - 3p \cdot x - 2q = 0. \quad (\text{I.3})$$

Nach dem Zwischenwertsatz der Analysis ([13], Folgerung 3.5.2) besitzt Gleichung (I.3) **immer** eine reelle Lösung.

Cardano² (bekannt durch die Kardanwelle) stellte 1545 folgende Formel auf: Gleichung (I.3) wird durch

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \quad (\text{I.4})$$

gelöst.

I.1.2 Vorsicht. An dieser Stelle müssen wir aufpassen, was wir genau mit der dritten Wurzel meinen. Jede reelle Zahl besitzt genau eine dritte Wurzel, denn die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, ist bijektiv ([13], Beispiel 3.3.15, v). Jede von Null verschiedene komplexe Zahl hat aber genau drei dritte Wurzeln (vgl. Beispiel I.6.5, iii). Die dritten Wurzeln in (I.4) müssen dabei „geeignet“ gewählt werden.³ Die Details werden in Aufgabe I.2.8 besprochen.

I.1.3 Beispiele. i) Wir untersuchen die Gleichung $x^3 - 6x - 6 = 0$. Hier gilt $p = 2$ und $q = 3$. Formel (I.4) ergibt die Lösung

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 - 8}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{9 - 8}} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}.$$

¹In der Schule werden sie deswegen bei dieser Gelegenheit auch nicht eingeführt.

²Gerolamo Cardano (1501 - 1576), Arzt, Philosoph, Mathematiker und Humanist der Renaissance.

³Was „geeignet“ bedeutet, wird mit Hilfe einer Nebenbedingung präzisiert.

An dieser Stelle können wir die „übliche“ reelle dritte Wurzel nehmen. Wir machen die Probe:

$$\begin{aligned} x^3 &= 4 + 3\sqrt[3]{4}^2 \cdot \sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}^2 + 2 \\ &= 6 + 3 \cdot (\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{16}) \\ &= 6 + 6 \cdot (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}) \\ &= 6 + 6x. \end{aligned}$$

ii) Jetzt schauen wir uns die Gleichung $x^3 - 15x - 4 = 0$ an. Wir haben $p = 5$, $q = 2$. Nach (I.4) ist

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} = \sqrt[3]{2 + 11 \cdot \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11 \cdot \sqrt{-1}}$$

eine Lösung. Hier tauchen Quadratwurzeln aus negativen Zahlen, also komplexe Zahlen, auf. In der Tat führen gewisse Wahlen der dritten Wurzeln zu der reellen Lösung $x = 4$ (s. Aufgabe I.2.8).

Beispiel I.1.3, ii), zeigt, dass die Lösungstheorie kubischer Gleichungen nicht mehr im Rahmen der reellen Zahlen entwickelt werden kann. Obwohl wir nur die reelle Lösung $x = 4$ bestimmen wollen, tauchen in den Zwischenschritten komplexe Zahlen auf. Diese Beobachtung gilt als einer der Ursprünge komplexer Zahlen ([10], Abschnitt 1.1.2).

I.2 Der Körper der komplexen Zahlen

In diesem Abschnitt werden wir die mathematisch genaue Konstruktion des Körpers der komplexen Zahlen \mathbb{C} vornehmen. Als Vorbereitung listen wir zwei Eigenschaften auf, die der gesuchte Körper \mathbb{C} aufweisen sollte:

- ★ Er sollte den Körper der reellen Zahlen enthalten; $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- ★ Die Zahl -1 sollte eine Wurzel haben; $\exists i \in \mathbb{C} : i^2 = -1$.

Sind diese Eigenschaften erfüllt, dann gibt es in \mathbb{C} Zahlen der Form

$$a + b \cdot i, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

und wir finden folgende Rechenregeln:

- ★ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) = (a + c) + (b + d) \cdot i$.
- ★ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$.

Konstruktion

Die zugrundeliegende Menge sei

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

I.2.1 Definition. Es seien

$$\begin{aligned} +: \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((a, b), (c, d)) &\longmapsto (a + c, b + d). \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((a, b), (c, d)) &\longmapsto (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

I.2.2 Satz. Das Tupel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper, d.h. es gelten folgende Regeln:

i) **Assoziativgesetz.** Für komplexe Zahlen $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ gilt

$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$$

und

$$(z \cdot z') \cdot z'' = z \cdot (z' \cdot z'')$$

ii) **Kommutativgesetz.** Für komplexe Zahlen $z, z' \in \mathbb{C}$ hat man

$$z + z' = z' + z$$

und

$$z \cdot z' = z' \cdot z.$$

iii) **Distributivgesetz.** Für komplexe Zahlen $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ gilt

$$z \cdot (z' + z'') = z \cdot z' + z \cdot z''.$$

iv) **Existenz neutraler Elemente.** Es existieren ein Element $\mathbb{0} \in \mathbb{C}$ mit

$$\forall z \in \mathbb{C} : z + \mathbb{0} = z = \mathbb{0} + z$$

und ein Element $\mathbb{1} \in \mathbb{C}$ mit

$$\forall z \in \mathbb{C} : z \cdot \mathbb{1} = z = \mathbb{1} \cdot z.$$

v) **Existenz inverser Elemente.** Zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ existiert eine komplexe Zahl $-z \in \mathbb{C}$, so dass $z + (-z) = (-z) + z = \mathbb{0}$, und zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$ gibt es eine komplexe Zahl $z^{-1} \in \mathbb{C}$ mit $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = \mathbb{1}$.

Beweis. Die Punkte i) - iii) sind leicht nachzurechnen. Wir führen dies für Behauptung iii) vor. Dazu schreiben wir

$$z = (a, b), \quad z' = (a', b'), \quad z'' = (a'', b'') \quad \text{mit} \quad a, b, a', b', a'', b'' \in \mathbb{R}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} z \cdot (z' + z'') &= (a, b) \cdot (a' + a'', b' + b'') \\ &= (a \cdot (a' + a'') - b \cdot (b' + b''), a \cdot (b' + b'') + b \cdot (a' + a'')) \\ &= (a \cdot a' + a \cdot a'' - b \cdot b' - b \cdot b'', a \cdot b' + a \cdot b'' + b \cdot a' + b \cdot a'') \\ &= (a \cdot a' - b \cdot b', a \cdot b' + b \cdot a') + (a \cdot a'' - b \cdot b'', a \cdot b'' + b \cdot a'') \\ &= (a, b) \cdot (a', b') + (a, b) \cdot (a'', b'') \\ &= z \cdot z' + z \cdot z''. \end{aligned}$$

Bei diesen Rechnungen haben wir uns natürlich der Körperaxiome im Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen bedient.

iv) Wir setzen $\mathbb{0} := (0, 0)$ und $\mathbb{1} = (1, 0)$. Offenbar ist $\mathbb{0}$ ein neutrales Element für die Addition, und für $a, b \in \mathbb{R}$ hat man

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b).$$

v) Für $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ sei $-z = -(a, b) := (-a, -b)$. Dies ist das Inverse zu z bzgl. der Addition „+“. Gilt weiter $z \neq 0$, so sei

$$z^{-1} := (a, b)^{-1} := \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Man berechnet

$$(a, b) \cdot (a, b)^{-1} = \left(\frac{a \cdot a}{a^2 + b^2} - \frac{b \cdot (-b)}{a^2 + b^2}, \frac{a \cdot (-b)}{a^2 + b^2} + \frac{b \cdot a}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0),$$

so dass z^{-1} invers zu z bzgl. der Multiplikation „ \cdot “ ist. □

I.2.3 Bemerkungen. i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a &\longmapsto (a, 0) \end{aligned}$$

ist ein (injektiver) Körperhomomorphismus,⁴ d.h.

- ★ $\forall a, b \in \mathbb{R}: \iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$.
- ★ $\forall a, b \in \mathbb{R}: \iota(a \cdot b) = \iota(a) \cdot \iota(b)$.
- ★ $\iota(1) = \mathbb{1}$.

Damit gilt insbesondere

- ★ $\iota(0) = \mathbb{0}$.
- ★ $\forall a \in \mathbb{R}: \iota(-a) = -\iota(a)$.
- ★ $\forall a \in \mathbb{R}^*: \iota(a^{-1}) = \iota(a)^{-1}$.

ii) Es gilt $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$.

Auf Grund dieser Bemerkung treffen wir folgende Vereinbarung:

Schreibweise. i) Für $a \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir das Element $(a, 0) \in \mathbb{C}$ ebenfalls mit a . Damit haben wir $0 = \mathbb{0}$ und $1 = \mathbb{1}$.

ii) Es sei $i := (0, 1)$. Gelegentlich wird auch $i = \sqrt{-1}$ geschrieben.⁵

⁴Körperhomomorphismen sind immer injektiv. Warum?

⁵Dies ist etwas missbräuchlich, weil -1 natürlich zwei Quadratwurzeln in \mathbb{C} hat, und zwar i und $-i$.

I.2.4 Bemerkungen. i) Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich auf eindeutige Weise in der Form $a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ schreiben.

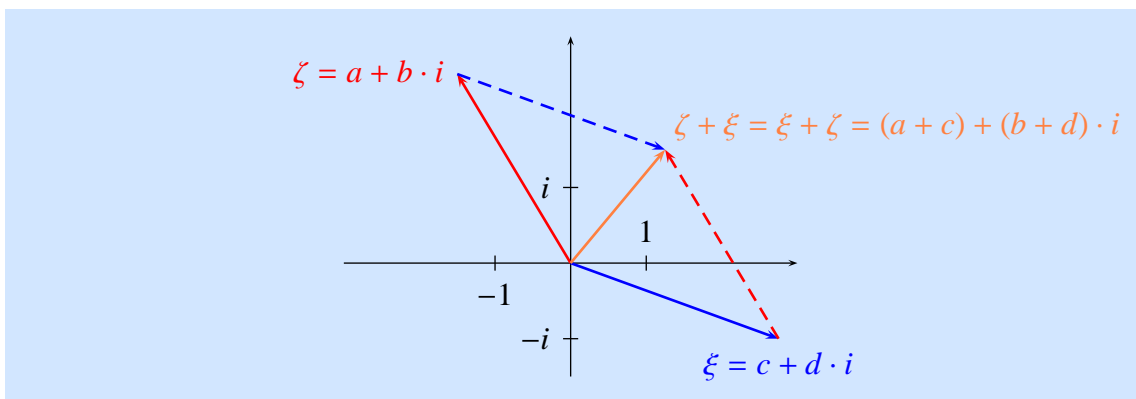
ii) Durch

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, z) &\longmapsto a \cdot z \end{aligned}$$

wird \mathbb{C} zu einem \mathbb{R} -Vektorraum, und

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\longmapsto a + b \cdot i \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von \mathbb{R} -Vektorräumen. Damit können wir die Addition von komplexen Zahlen graphisch veranschaulichen:



iii) Es seien K ein Körper, der \mathbb{R} enthält und in dem ein Element $I \in K$ mit $I^2 = -1$ existiert. Man überlegt sich, dass durch

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C} &\longrightarrow K \\ a + b \cdot i &\longmapsto a + b \cdot I \end{aligned}$$

ein Körperhomomorphismus gegeben ist. Entweder ist φ ein Isomorphismus, oder es gilt

$$\dim_{\mathbb{R}}(K) = \infty.$$

Das folgt, weil \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist.⁶ Der Körper \mathbb{C} ist also — bis auf kanonische Identifikationen — die einzige Möglichkeit, \mathbb{R} so zu erweitern, dass in der Erweiterung eine Wurzel aus -1 existiert und die Erweiterung als \mathbb{R} -Vektorraum endlichdimensional ist.

I.2.5 Aufgabe (Rechnen mit komplexen Zahlen). Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$.

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{1-i}{1+i}, \quad \text{ii) } \frac{3+4i}{1-2i}, \quad \text{iii) } \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \text{iv) } \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}, \quad \text{v) } \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}. \end{aligned}$$

⁶S. Satz IV.5.11.

I.2.6 Aufgabe (Eine Teilmengen der komplexen Ebene). Es seien $w_1 := 1 - 2i$, $w_2 := 5 - (3/2)i$ und $z := 1 + \sqrt{3}i$. Zeichnen Sie das Parallelogramm $P \subset \mathbb{C}$, das von w_1 und w_2 aufgespannt wird, sowie

$$z \cdot P := \{z \cdot w \mid w \in P\}.$$

I.2.7 Aufgabe (Quadratische Gleichungen über den komplexen Zahlen). Es seien $a, b \in \mathbb{C}$ **komplexe** Zahlen. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z^2 + az + b = 0$$

Lösungen in \mathbb{C} hat. (Insbesondere besitzt also jede komplexe Zahl eine Wurzel). Geben Sie eine Formel für die Lösungen an.

I.2.8 Aufgabe (Cardanos Lösungsformel). Wir wollen in dieser Aufgabe Cardanos Zugang zur Lösung einer Gleichung der Form

$$X^3 + a \cdot X^2 + b \cdot X + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

über den reellen Zahlen erläutern.

i) Zeigen Sie, dass man den Ausdruck $X^3 + a \cdot X^2 + b \cdot X + c$ durch eine Substitution der Form $X = x - d$, $d \in \mathbb{R}$, in einen Ausdruck der Form

$$x^3 + \alpha x + \beta$$

überführen kann.

Wir müssen nun Lösungen einer Gleichung der Form

$$(*) \quad x^3 - 3p \cdot x - 2q = 0, \quad p, q \in \mathbb{R},$$

verstehen.

ii) Es seien s, t zwei komplexe Zahlen, so dass $s^3 + t^3 = 2q$ und $st = p$. Zeigen Sie, dass die komplexe Zahl $z = s + t$ Gleichung (*) löst. Überprüfen Sie damit die Richtigkeit der Lösungsformel (I.4).

iii) Wir nehmen $p \neq 0$ an. Benutzen Sie die Gleichungen $s^3 + t^3 = 2q$ und $st = p$, um eine quadratische Gleichung für s^3 zu erhalten, und berechnen Sie daraus s^3 und s . Gehen Sie analog für t vor. Leiten Sie die Formel von Cardano ab.

iv) In Beispiel I.1.3, ii), wurde die Gleichung $x^3 - 15x - 4 = 0$ betrachtet. Geben Sie komplexe Zahlen $s = a + b \cdot i$, $t = c + d \cdot i$ mit $s^3 = 2 + 11 \cdot i$, $t^3 = 2 - 11 \cdot i$ und $s + t = 4$ an.

I.2.9 Aufgabe. i) Eine *Anordnung eines Körpers* k ist eine Teilmenge $P \subset k$ (= **Menge der positiven Zahlen**), so dass folgende Eigenschaften gelten:

- Für jede Zahl $a \in k$ gilt genau eine der folgenden Aussagen: i) $-a \in P$, ii) $a = 0$, oder iii) $a \in P$.
- Für je zwei Zahlen $a, b \in k$ gilt: $a, b \in P \implies a + b \in P$ und $a \cdot b \in P$.

Bemerkung. Die Angabe von P ist äquivalent zur Angabe der Relation “<” mit $a < b \iff b - a \in P$, $a, b \in k$. Der Körper der reellen Zahlen ist durch die Menge $P := \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ angeordnet.

Zeigen Sie, dass der Körper der komplexen Zahlen **keine** Anordnung besitzt.

I.3 Komplexe Zahlen und Matrizen

Es sei $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, $a, b \in \mathbb{R}$. Die Multiplikation

$$\begin{aligned} z \cdot -: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\longmapsto z \cdot w \end{aligned}$$

mit z ist ein \mathbb{R} -linearer Endomorphismus des \mathbb{R} -Vektorraums \mathbb{C} . Wir berechnen die Darstellungsmatrix ([17], Anmerkung 10.5; [18], §14) dieser linearen Abbildung bzgl. der \mathbb{R} -Basis $(1, i)$ von \mathbb{C} . Wir haben

$$z \cdot 1 = a + b \cdot i \quad \text{und} \quad z \cdot i = -b + a \cdot i.$$

Somit ist

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

die gesuchte Darstellungsmatrix.

I.3.1 Satz. i) *Das Tupel*

$$\left(K = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, +, \cdot \right),$$

in dem „+“ die Matrixaddition und „·“ die Matrixmultiplikation sind, ist ein Körper mit Neutralelementen

$$\mathbb{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C} &\longrightarrow K \\ a + b \cdot i &\longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von Körpern.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den vorangehenden Betrachtungen und wird der Leserin bzw. dem Leser als Übung überlassen.

I.4 Komplexe Konjugation und Betrag

I.4.1 Definition. Es sei $z = a + b \cdot i$ eine komplexe Zahl mit $a, b \in \mathbb{R}$.

i) Die Zahl

$$\operatorname{Re}(z) := a$$

heißt der *Realteil* von z und die Zahl

$$\operatorname{Im}(z) := b$$

der *Imaginärteil* von z .

- ii) Man nennt z *rein imaginär*, wenn $z \neq 0$ und $\operatorname{Re}(z) = 0$ gilt.
 iii) Die *konjugiert komplexe Zahl* von z ist durch

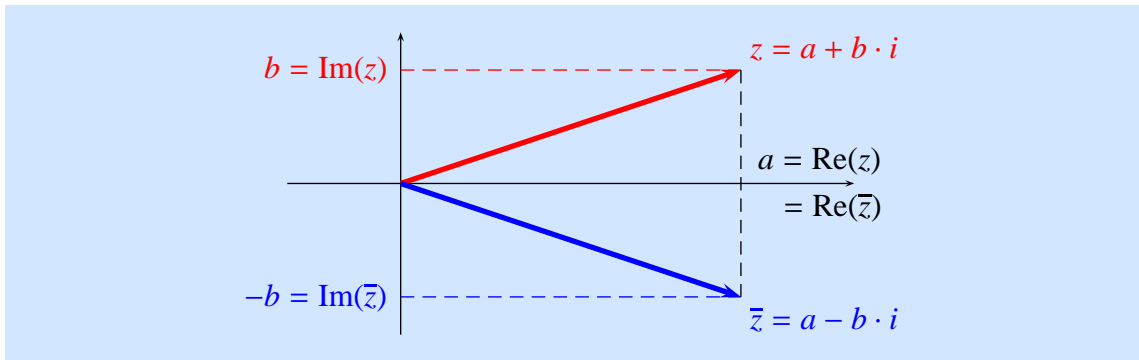
$$\bar{z} := a - b \cdot i$$

gegeben. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z} \end{aligned}$$

ist die *komplexe Konjugation*.

I.4.2 Bemerkung. Geometrisch ist die komplexe Konjugation die **Spiegelung an der reellen Achse**.



- I.4.3 Eigenschaften.** i) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ haben wir $\overline{\bar{z}} = z$.
 ii) Die komplexe Konjugation $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist ein **Körperautomorphismus**, i.e.

$$\overline{\bar{1}} = 1, \quad \forall w, z \in \mathbb{C} : \overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z}, \quad \overline{w \cdot z} = \bar{w} \cdot \bar{z}.$$

Insbesondere ist die komplexe Konjugation eine \mathbb{R} -lineare Abbildung, d.h. für alle $a \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{a \cdot z} = a \cdot \bar{z}.$$

- iii) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z), \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z), \quad z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Im}(z) \cdot i.$$

- iv) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z = \bar{z} \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R},$$

d.h.

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}.$$

- v) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}_{\geq 0} := \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}.$$

Beweis. Die Aussagen i), iii), iv) sind sofort klar. Punkt ii) sieht man folgendermaßen ein: Es seien $w = a + b \cdot i$ und $z = c + d \cdot i$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{w+z} &= \overline{a+b \cdot i+c+d \cdot i} \\ &= \overline{(a+c)+(b+d) \cdot i} \\ &= (a+c)-(b+d) \cdot i \\ &= (a-b \cdot i)+(c-d \cdot i) \\ &= \overline{w}+\overline{z} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \overline{w \cdot z} &= \overline{(ac-bd)+(ad+bc) \cdot i} \\ &= (ac-bd)-(ad+bc) \cdot i \\ &= (ac-(-b) \cdot (-d))+(a \cdot (-d)+(-b) \cdot c) \cdot i \\ &= (a-b \cdot i) \cdot (c-d \cdot i) \\ &= \overline{w} \cdot \overline{z}. \end{aligned}$$

v) Es seien wieder $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\overline{z} = a - b \cdot i$ und $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$. \square

I.4.4 Aufgabe (Eine Teilmenge der komplexen Ebene). Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene.

$$\begin{aligned} S_1 &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}((1-i) \cdot z) = 0 \right\} \\ S_2 &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\left(\frac{z-a}{b}\right) \leq 0 \right\}, \quad a, b \in \mathbb{C}, b \neq 0. \end{aligned}$$

I.4.5 Definition. Der *Betrag* der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist

$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

I.4.6 Bemerkung. Unter der Identifikation

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\longmapsto a + b \cdot i \end{aligned}$$

stimmt der komplexe Betrag mit der **euklidischen Norm** überein. Dies ist die übliche Abstandsfunktion auf \mathbb{R}^2 (s. [14], Abschnitt 1.1).

I.4.7 Eigenschaften. i) Für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ stimmt der oben definierte Betrag mit dem üblichen Betrag ([13], Definition 1.6.5) überein.

ii) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt genau dann $|z| = 0$, wenn $z = 0$.

iii) Für komplexe Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ hat man $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$.

iv) Es gilt die **Dreiecksungleichung**

$$\forall w, z \in \mathbb{C} : \quad |w+z| \leq |w| + |z|.$$

Beweis. i) Für $a \in \mathbb{R}$ haben wir $|a| = \sqrt{a^2}$. Dies ist a , wenn $a \geq 0$, und $-a$, wenn $a < 0$. Die Aussagen ii) und iv) sind aus der euklidischen Geometrie bekannt ([14], Definition 1.2.1 und Beispiel 1.2.4, i). Teil iii) folgt aus $|w \cdot z|^2 = (w \cdot z) \cdot \overline{(w \cdot z)} = w \cdot z \cdot \overline{w} \cdot \overline{z} = w \cdot \overline{w} \cdot z \cdot \overline{z} = |w|^2 \cdot |z|^2$. \square

I.4.8 Bemerkung. Für $z \in \mathbb{C}^*$ ergibt sich für die inverse Zahl

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

I.4.9 Aufgabe (Der komplexe Betrag). i) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Zahlen:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |3z - 1 + i| \leq 2\}.$$

ii) Beweisen Sie die **Lagrangesche⁷ Identität**:

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \cdot w_i \right|^2 = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) - \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i \cdot \overline{w}_j - z_j \cdot \overline{w}_i|^2 \right).$$

(Es folgt die **Cauchy⁸-Schwarz⁹-Ungleichung**:

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \cdot w_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right).$$

I.4.10 Aufgabe (Automorphismen von \mathbb{C}). Es sei $\iota: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Automorphismus, so dass $\iota(a) = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie, dass ι die Identität oder die komplexe Konjugation ist.

I.5 Polarkoordinaten

Die Menge

$$\begin{aligned} S &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ &= \{z = a + b \cdot i \in \mathbb{C} \mid \sqrt{a^2 + b^2} = 1\} \\ &= \{z = a + b \cdot i \in \mathbb{C} \mid a^2 + b^2 = 1\} \end{aligned}$$

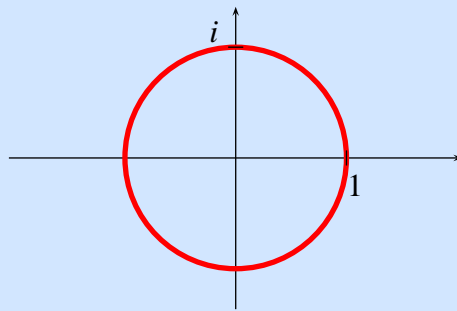
ist der Einheitskreis.

⁷Joseph-Louis de Lagrange (eigentlich Giuseppe Lodovico Lagrangia; 1736 - 1813), italienischer Mathematiker und Astronom.

⁸Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), französischer Mathematiker.

⁹Hermann Amandus Schwarz (1843 - 1921), deutscher Mathematiker.

Die komplexen Zahlen vom Betrag 1



$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{z = a + b \cdot i \in \mathbb{C} \mid a^2 + b^2 = 1\}$$

Für eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ wie in der Zeichnung gilt also

$$z = \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i.$$

I.5.1 Lemma. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R} &\longrightarrow S \\ \varphi &\longmapsto \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i \end{aligned}$$

ist surjektiv, und es gilt

$$\forall \varphi, \varphi' \in \mathbb{R}: \quad \alpha(\varphi) = \alpha(\varphi') \iff \exists k \in \mathbb{Z}: \quad \varphi' = \varphi + 2k \cdot \pi.$$

I.5.2 Beobachtung. Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}^*$ gilt

$$\frac{z}{|z|} \in S.$$

Aus dem Lemma und der Beobachtung ergibt sich der

I.5.3 Satz. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \beta: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (r, \varphi) &\longmapsto r \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i) \end{aligned}$$

ist surjektiv. Für $(r, \varphi), (r', \varphi') \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \beta(r, \varphi) = \beta(r', \varphi') &\iff r = r' = 0 \\ &\text{oder } r = r' \neq 0 \quad \text{und} \quad \exists k \in \mathbb{Z}: \quad \varphi' = \varphi + 2k \cdot \pi. \end{aligned}$$

I.5.4 Bemerkung. Für $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ und $z = \beta(r, \varphi)$ gilt $r = |z|$.

I.5.5 Definition. Es seien $z \in \mathbb{C}^*$ eine komplexe Zahl. Eine reelle Zahl $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$\beta(|z|, \varphi) = z$$

heißt (ein) *Argument* von z .

Schreibweise. $\varphi = \text{Arg}(z)$.¹⁰

¹⁰Dies ist eine missbräuchliche Schreibweise. Arg ist keine Funktion auf \mathbb{C}^* .

I.5.6 Bemerkung. Es seien $z \in \mathbb{C}^*$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Nach Satz I.5.3 gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$, dass φ genau dann ein Argument von z ist, wenn $\varphi + 2k \cdot \pi$ ein ist. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall der Länge 2π , z.B. $(-\pi, \pi]$ oder $[0, 2\pi)$. Dann besitzt jede nichtverschwindende komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}^*$ genau ein Argument im Intervall I .

I.5.7 Definition. Gemäß Bemerkung I.5.6 können wir die Funktion

$$\text{Arg}: \mathbb{C}^* \longrightarrow (-\pi, \pi]$$

definieren, die einer von Null verschiedenen komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}^*$ ihr eindeutig bestimmtes Argument **im Intervall** $(-\pi, \pi]$ zuordnet. Sie heißt der *Hauptzweig des Arguments*.

I.5.8 Bemerkung. Gelegentlich werden wir den Hauptzweig des Arguments auf den Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^*$ einschränken und ihn dann immer noch Hauptzweig des Arguments nennen.

I.5.9 Erinnerung. Die **Additionstheoreme** für Kosinus und Sinus ([13], Satz 4.8.8) besagen, dass für $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ folgende Identitäten gelten:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi + \varphi') &= \cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi') - \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi') \\ \sin(\varphi + \varphi') &= \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi') + \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi').\end{aligned}$$

Die Formeln in den Additionstheoremen erinnern an die Formel für die Multiplikation komplexer Zahlen. In der Tat gilt für

$$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i), \quad z' = |z'| \cdot (\cos(\varphi') + \sin(\varphi') \cdot i),$$

dass

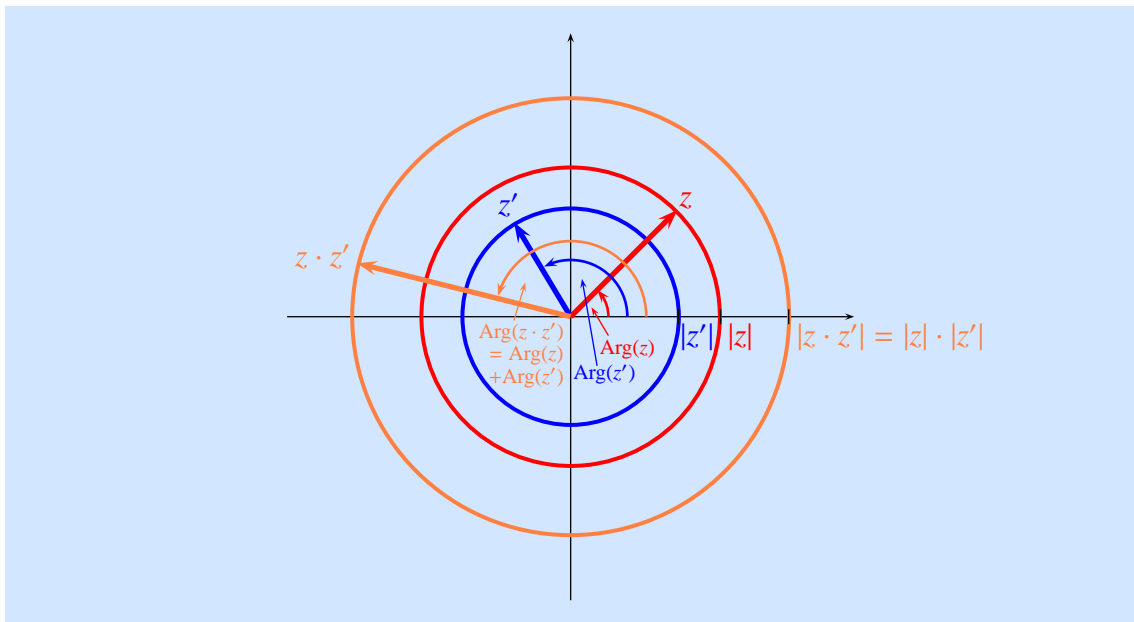
$$\begin{aligned}z \cdot z' &= |z| \cdot |z'| \cdot \left((\cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi') - \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi')) + (\cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi') + \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi')) \cdot i \right) \\ &= |z \cdot z'| \cdot (\cos(\varphi + \varphi') + \sin(\varphi + \varphi') \cdot i).\end{aligned}\tag{I.5}$$

Diese Formel für die Multiplikation komplexer Zahlen können wir kurz wie folgt schreiben:

- ★ $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.
- ★ $\text{Arg}(z \cdot z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')$.

Anders gesagt

Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert.



I.6 Einheitswurzeln

Wie schon angekündigt, werden wir im Verlauf der Vorlesung beweisen, dass der Körper der komplexen Zahlen algebraisch abgeschlossen ist, d.h., dass jedes nicht konstante komplexe Polynom in einer Variablen eine Nullstelle hat. In diesem Abschnitt illustrieren wir diese Tatsache für das Polynom

$$x^n - 1, \quad n \geq 1.$$

Die Beschreibung seiner Nullstellen lässt sich leicht aus den Rechenregeln des letzten Abschnitts gewinnen.

I.6.1 Definition. i) Die *Potenzen* einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ werden wie üblich rekursiv definiert:

$$z^0 := 1, \quad z^n := z \cdot z^{n-1} = \underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{n \times}, \quad z^{-n} := \frac{1}{z^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ii) Es sei $n \in \mathbb{Z}_{>0} := \{k \in \mathbb{Z} \mid k > 0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Eine komplexe Zahl ζ ist eine *n-te Einheitswurzel*, wenn $\zeta^n = 1$ gilt. Damit ist

$$\mu_n := \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^n = 1 \}$$

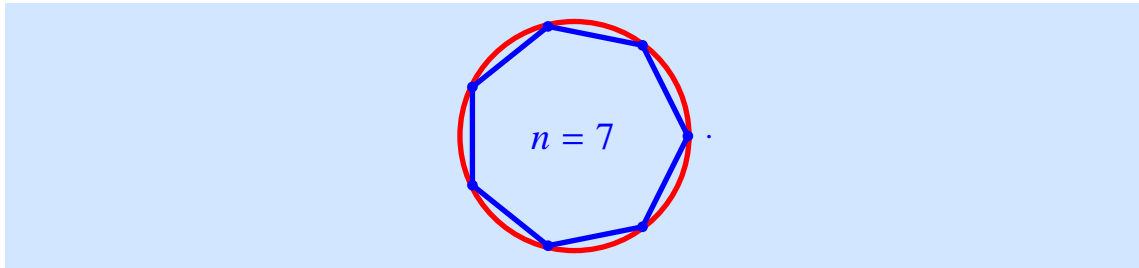
die Menge der *n-ten Einheitswurzeln*.

I.6.2 Bemerkung. Für $\zeta \in \mu_n$ gilt

$$|\zeta|^n = |\zeta^n| = |1| = 1,$$

so dass ζ dem Einheitskreis S angehört.

Auf Grund der Bemerkung und der Berechnungen in Abschnitt I.5 ist bereits anschaulich klar, dass die *n-ten Einheitswurzeln* die Ecken des regelmäßigen *n-Ecks* auf dem Einheitskreis sind:



Diese Anschauung lässt sich leicht in Formeln gießen.

I.6.3 Satz. Für die Menge der n -ten Einheitswurzeln gilt

$$\mu_n = \left\{ \zeta_{\nu,n} := \cos\left(\frac{2\nu \cdot \pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\nu \cdot \pi}{n}\right) \cdot i \mid \nu = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Insbesondere gilt $\#\mu_n = n$, d.h. das Polynom $x^n - 1$ hat genau n komplexe Nullstellen.¹¹

Der folgende Satz ergibt sich durch eine leichte Induktion aus (I.5).

I.6.4 Satz (Euler,¹² de Moivre¹³). Für eine positive natürliche Zahl $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und einen Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ hat man

$$(\cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i)^n = \cos(n \cdot \varphi) + \sin(n \cdot \varphi) \cdot i.$$

Beweis von Satz I.6.3. Nach Bemerkung I.6.2 und Lemma I.5.1 gibt es einen Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass $\zeta = \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i$. Der Satz von Euler und de Moivre zeigt, dass ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$n \cdot \varphi = 2k \cdot \pi$$

existiert. Somit ist φ von der Form $2k \cdot \pi/n$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Wir schreiben $k = l \cdot n + \nu$ mit $\nu \in \{0, \dots, n-1\}$. Damit haben wir $\varphi = 2l \cdot \pi + 2\nu \cdot \pi/n$ und

$$\zeta = \zeta_{\nu,n}.$$

Man beachte

$$\frac{2\nu \cdot \pi}{n} \in [0, 2\pi), \quad \nu \in \{0, \dots, n-1\},$$

so dass (vgl. Bemerkung I.5.6)

$$\forall \nu_1, \nu_2 \in \{0, \dots, n-1\}: \quad \zeta_{\nu_1,n} = \zeta_{\nu_2,n} \iff \nu_1 = \nu_2.$$

Damit schließen wir $\#\mu_n = n$. □

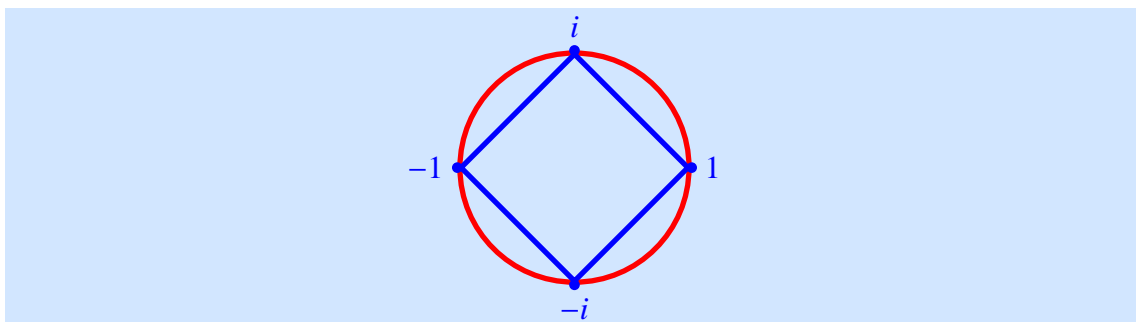
I.6.5 Beispiele. i) $\mu_1 = \{1\}$, $\mu_2 = \{\pm 1\}$.

ii) $\mu_4 = \{\pm 1, \pm i\}$.

¹¹In \mathbb{R} hat es nur die Nullstelle 1, wenn n ungerade ist, und die Nullstellen ± 1 , wenn n gerade ist.

¹²Leonhard Euler (1707 - 1783), schweizer Mathematiker und Physiker.

¹³Abraham de Moivre (1667 - 1754), französischer Mathematiker.



iii) Wir behaupten

$$\mu_3 = \left\{ 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right\}.$$

Dazu berechnen wir für $\zeta = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a + b \cdot i)^3 = (a^3 - 3a \cdot b^2) + (3a^2 \cdot b - b^3) \cdot i.$$

Die Zahl ζ ist genau dann eine dritte Einheitswurzel, wenn

$$a^3 - 3a \cdot b^2 = 1 \quad \text{und} \quad 3a^2 \cdot b - b^3 = 0$$

gelten. Wir haben also

$$b = 0 \quad \text{und} \quad a = 1$$

oder

$$3 \cdot a^2 = b^2, \quad \text{i.e.} \quad b = \pm \sqrt{3} \cdot a, \quad \text{und} \quad a^3 - 9a^3 = -8a^3 = 1, \quad \text{i.e.} \quad a = -\frac{1}{2}.$$

iii) Für jedes $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ gilt $1 \in \mu_n$ und

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}: \quad \zeta \in \mu_n \iff \bar{\zeta} \in \mu_n.$$

I.7 Winkeltreue Abbildungen

Die komplexen Zahlen haben auch eine schöne Interpretation in der Sprache der linearen Transformationen der Zahlenebene \mathbb{R}^2 (vgl. Abschnitt I.3). Diese Interpretation erläutern wir zum Abschluss dieses Kapitels.

I.7.1 Definition. i) Für zwei komplexe Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ definieren wir das *Skalarprodukt*

$$\langle w, z \rangle := \operatorname{Re}(w \cdot \bar{z}).$$

ii) Für $w, z \in \mathbb{C}^*$ ist der *Winkel* $\varphi \in [0, \pi]$ zwischen w und z durch

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle w, z \rangle}{|w| \cdot |z|}$$

definiert.¹⁴

¹⁴Der Winkel π erscheint, wenn $z = \lambda \cdot w$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ gilt.

iii) Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *winkeltreu*, wenn sie injektiv ist und für alle $w, z \in \mathbb{C}^*$

$$\frac{\langle L(w), L(z) \rangle}{|L(w)| \cdot |L(z)|} = \frac{\langle w, z \rangle}{|w| \cdot |z|}$$

gilt.¹⁵

I.7.2 Bemerkung. i) Für komplexe Zahlen $w = a + b \cdot i$ und $z = c + d \cdot i$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, erhalten wir

$$\langle w, z \rangle = ac + bd.$$

aus

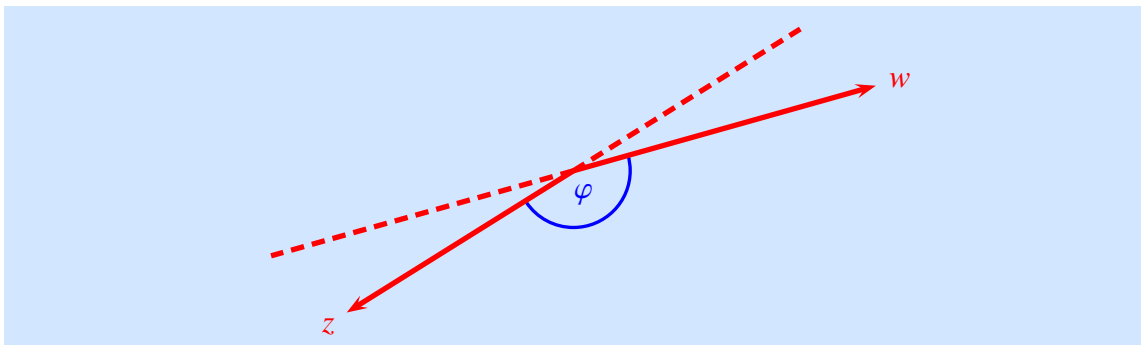
$$w \cdot \bar{z} = (a + b \cdot i) \cdot (c - d \cdot i) = ac + bd + (bc - ad) \cdot i.$$

Somit stimmt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit dem Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^2 überein.

ii) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z})$ nach Eigenschaft I.4.3, iii). Wir folgern

$$\forall w, z \in \mathbb{C}: \quad \langle w, z \rangle = \operatorname{Re}(w \cdot \bar{z}) = \operatorname{Re}(\bar{w} \cdot z) = \langle z, w \rangle.$$

Der Winkel zwischen w und z ist also **nicht** orientiert. (Deshalb können wir auch festlegen, dass der Winkel im Intervall $[0, \pi]$ liegen soll.)



I.7.3 Satz. Für eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) L ist winkeltreu.
- ii) Es gibt eine komplexe Zahl $u \neq 0$, so dass

$$\forall z \in \mathbb{C}: \quad L(z) = u \cdot z$$

oder

$$\forall z \in \mathbb{C}: \quad L(z) = u \cdot \bar{z}.$$

- iii) Es gibt eine Zahl $s \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\forall w, z \in \mathbb{C}: \quad \langle L(w), L(z) \rangle = s \cdot \langle w, z \rangle.$$

Beweis. „i) \implies ii)“. Sei $u = L(1)$. Es gilt $u \neq 0$, weil L injektiv ist. Damit können wir

$$v := \frac{L(i)}{u}$$

¹⁵Man beachte, dass die Injektivität benötigt wird, um die Bedingung zu formulieren.

setzen. Die Winkeltreue von L impliziert

$$0 = \langle i, 1 \rangle = \langle L(i), L(1) \rangle = \langle u \cdot v, u \rangle = |u|^2 \cdot \operatorname{Re}(v).$$

Die Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn

$$v \in (\mathbb{R} \cdot i) \setminus \{0\}, \quad \text{d.h.} \quad \exists r \in \mathbb{R}^* : \quad v = r \cdot i.$$

Da L eine \mathbb{R} -lineare Abbildung ist, gilt für $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$L(z) = a \cdot L(1) + b \cdot L(i) = a \cdot u + b \cdot u \cdot r \cdot i = u \cdot (a + b \cdot r \cdot i).$$

Weiter berechnen wir

$$\langle L(1), L(z) \rangle = |u|^2 \cdot a$$

und folgern

$$|a + b \cdot i| \cdot |u|^2 \cdot a = |z| \cdot |1| \cdot \langle L(1), L(z) \rangle.$$

Mit Hilfe der Winkeltreue von L formen wir diesen Ausdruck um zu

$$|L(z)| \cdot |L(1)| \cdot \langle 1, z \rangle = |u| \cdot |a + b \cdot r \cdot i| \cdot |u| \cdot a.$$

Für jede komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ mit $a \neq 0$ finden wir somit

$$|a + b \cdot i| = |a + r \cdot b \cdot i|.$$

Damit ergibt sich $r = \pm 1$. Weiter erkennen wir

$$\begin{aligned} r = 1 &\implies \forall z \in \mathbb{C} : \quad L(z) = u \cdot (a + b \cdot i) = u \cdot z \\ r = -1 &\implies \forall z \in \mathbb{C} : \quad L(z) = u \cdot (a - b \cdot i) = u \cdot \bar{z}. \end{aligned}$$

„ii) \implies iii)“. Wir nehmen zunächst an, dass eine komplexe Zahl $u \in \mathbb{C}^*$ existiert, so dass $L(z) = u \cdot z$, $z \in \mathbb{C}$, und definieren $s := |u|^2 > 0$. Für $w, z \in \mathbb{C}$ ergibt sich

$$\langle L(w), L(z) \rangle = \langle u \cdot w, u \cdot z \rangle = \operatorname{Re}(u \cdot w \cdot \bar{u} \cdot \bar{z}) = u \cdot \bar{u} \cdot \operatorname{Re}(w \cdot \bar{z}) = |u|^2 \cdot \langle w, z \rangle = s \cdot \langle w, z \rangle.$$

Jetzt setzen wir voraus, dass eine komplexe Zahl $u \in \mathbb{C}^*$ existiert, so dass $L(z) = u \cdot \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$, und definieren wie zuvor $s := |u|^2 > 0$. Es folgt

$$\langle L(w), L(z) \rangle = s \cdot \operatorname{Re}(\bar{w} \cdot z) = s \cdot \operatorname{Re}(w \cdot \bar{z}) = s \cdot \langle w, z \rangle.$$

„iii) \implies i)“. Die vorausgesetzte Bedingung zeigt insbesondere $|L(z)| = \sqrt{s} \cdot |z| \neq 0$, $z \in \mathbb{C}^*$. Daher ist L injektiv. Weiter gilt

$$\forall w, z \in \mathbb{C}^* : \quad \frac{\langle L(w), L(z) \rangle}{|L(w)| \cdot |L(z)|} = \frac{s \cdot \langle w, z \rangle}{\sqrt{s} \cdot |w| \cdot \sqrt{s} \cdot |z|} = \frac{\langle w, z \rangle}{|w| \cdot |z|}.$$

Die Abbildung L ist also winkeltreu. □

I.7.4 Bemerkung. Seien $u \in \mathbb{C}$, $\varphi = \text{Arg}(u) \in [0, 2\pi)$. Die Abbildung $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto u \cdot z$, ist dann die Drehung um den Winkel φ gefolgt von der Streckung um den Faktor $|u|$.¹⁶ Man spricht von einer **Drehstreckung**. Diese Beschreibung erkennt man auch gut an der Matrixbeschreibung komplexer Zahlen in Satz I.3.1 (vgl. [16], S. 28ff).

Die Abbildung $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto u \cdot \bar{z}$, ist die Spiegelung an der reellen Achse gefolgt von der Drehung um den Winkel φ gefolgt von der Streckung um den Faktor $|u|$. Dies ist die Spiegelung an der Gerade, die mit der reellen Achse den Winkel $\varphi/2$ einschließt, gefolgt von der Streckung um den Faktor $|u|$ (vgl. [16], S. 30).

I.7.5 Aufgabe (Winkeltreue Abbildungen). i) Eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heisst *orientierungstreu*, wenn die darstellende Matrix von φ (bzgl. einer beliebigen Basis) positive Determinante hat. Welches sind die \mathbb{R} -linearen Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die sowohl orientierungstreu als auch winkeltreu sind?

ii) Es seien $v \in \mathbb{C}^*$ eine komplexe Zahl und

$$L := \{ \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

die Gerade durch 0 und v . Geben Sie eine komplexe Zahl w an, so dass

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto w \cdot \bar{z} \end{aligned}$$

die Spiegelung mit Spiegelachse L beschreibt.

¹⁶Man kann auch erst strecken und dann drehen.

II

Potenzreihen

Potenzreihen sind wir bereits in der reellen Analysis begegnet ([13], Abschnitt 3.8). Sie können zur Definition unendlich oft differenzierbarer Funktionen herangezogen werden. Unter den so definierten Funktionen finden sich so wichtige wie die Exponentialfunktion, der Sinus und der Kosinus. Umgekehrt definieren ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, eine **unendlich oft differenzierbare** reelle Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Punkt $a \in I$ die *Taylorreihe*¹

$$T_{f,a}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x - a)^k$$

mit *Entwicklungspunkt* a . Allerdings kann der Konvergenzradius der Taylorreihe null sein. Es gibt auch Beispiele, in denen die durch die Taylorreihe $T_{f,a}(x)$ definierte Funktion \tilde{f} nicht mit f übereinstimmt ([13], Beispiel 5.7.12, i).

In diesem Abschnitt entwickeln wir die Theorie der komplexen Potenzreihen. Mit ihnen werden wir die komplexe Exponentialfunktion, den komplexen Sinus und den komplexen Kosinus erklären. In Kapitel IV wird sich zeigen, dass die oben geschilderten Pathologien für holomorphe Funktionen nicht auftauchen: Für jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$, jede holomorphe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ und jeden Entwicklungspunkt $a \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die Taylorreihe $T_{f,a}(z)$ auf der Kreisscheibe $B(a, \varepsilon)$ gegen f konvergiert. Daher kommt den Potenzreihen, anders als in der reellen Analysis, in der Funktionentheorie eine herausgehobene Stellung zu.

II.1 Folgen und Konvergenz

Die Betragsfunktion $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ hat dieselben formalen Eigenschaften wie der reelle Absolutbetrag $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Daher lassen sich die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften für Folgen und Reihen komplexer Zahlen wie im reellen formulieren und beweisen (s. [13], Kapitel 2). Dies wollen wir im Folgenden tun.

¹Brook Taylor (1685 - 1731), britischer Mathematiker.

II.1.1 Definition. Es seien $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Wir sagen, dass die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *gegen a konvergiert*, wenn gilt:

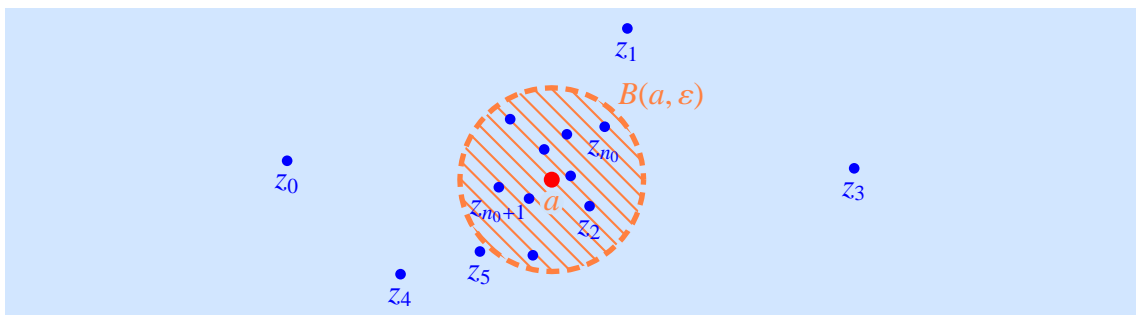
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |z_n - a| < \varepsilon.$$

Schreibweise. $a = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

II.1.2 Bemerkungen. i) Für $a \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ sei

$$B(a, \varepsilon) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \varepsilon \}$$

die offene Kreisscheibe vom Radius ε um a .



Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen konvergiert genau dann gegen a , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder in der Kreisscheibe $B(a, \varepsilon)$ liegen.

ii) Eine konvergente Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist **beschränkt**, d.h. es gibt eine positive reelle Zahl $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : |z_n| < C.$$

In der Tat gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|z_n - a| < 1$ für $n \geq n_0$ gilt. Wir können also

$$C := \max\{|z_0|, \dots, |z_{n_0-1}|, |a|\} + 1$$

wählen.

II.1.3 Satz. Es seien $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen komplexer Zahlen und

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \quad \text{und} \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

i) Die Folge $(w_n + z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n + z_n) = a + b.$$

ii) Die Folge $(w_n \cdot z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n \cdot z_n) = a \cdot b.$$

Insbesondere konvergiert $(w \cdot z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für jede komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ gegen $w \cdot b$.

iii) Gilt weiter $z_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, dann konvergiert die Folge $(w_n/z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n}{z_n} = \frac{a}{b}.$$

iv) Die Folge $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $|a|$.

v) Die Folge $(\bar{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen \bar{a} .

Beweis. Die Punkte i) - iii) beweist man wie in der reellen Analysis ([13], Satz 2.2.16). Wir zeigen zur Illustration ii). Gegeben sei $\varepsilon > 0$. Gemäß Bemerkung II.1.2, ii), wählen wir eine positive Konstante $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : |w_n| < C.$$

Sei weiter $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_0 : |w_n - a| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (|b| + 1)} \quad \text{und} \quad |z_n - b| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot C}.$$

Dann finden wir für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |w_n \cdot z_n - a \cdot b| &= |w_n \cdot z_n - w_n \cdot b + w_n \cdot b - a \cdot b| \\ &\leq |w_n| \cdot |z_n - b| + |b| \cdot |w_n - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

iv) Dies folgt sofort aus der Dreiecksungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| |z_n| - |a| \right| \leq |z_n - a|.$$

v) Hier benutzen wir

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\bar{z}_n - \bar{a}| = \overline{|z_n - a|} = |z_n - a|.$$

Die benutzte Gleichheit $|\bar{\zeta}| = |\zeta|$, $\zeta \in \mathbb{C}$, ergibt sich dabei unmittelbar aus Definition I.4.5. □

II.1.4 Folgerung. *Es seien $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $c \in \mathbb{C}$. Weiter seien $x_n := \operatorname{Re}(z_n)$, $y_n := \operatorname{Im}(z_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $a := \operatorname{Re}(c)$ und $b := \operatorname{Im}(c)$. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

- i) Die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen c .
- ii) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a und die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen b .

II.1.5 Bemerkung. Diese Aussage drückt die Konvergenz von Folgen komplexer Zahlen durch die Konvergenz von Folgen reeller Zahlen aus. Die entsprechende Aussage in der reellen Analysis ist [14], Satz 2.1.3.

Beweis von Folgerung II.1.4. „i) \implies ii)“. Nach dem Satz konvergiert die Folge (s. Eigenschaft I.4.3, iii)

$$\left(x_n = \frac{1}{2} \cdot (z_n + \bar{z}_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen

$$a = \frac{1}{2} \cdot (c + \bar{c})$$

und

$$\left(y_n = \frac{1}{2i} \cdot (z_n - \bar{z}_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen

$$b = \frac{1}{2i} \cdot (c - \bar{c}).$$

“ii) \implies i)“. Die Folge $(x_n + y_n \cdot i)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nach Satz II.1.3, i) und ii), gegen $a + b \cdot i = c$. □

II.1.6 Bemerkung. Man kann die obige Folgerung auch aus der Tatsache ableiten, dass

$$\max\{|\operatorname{Re}(w)|, |\operatorname{Im}(w)|\} \leq |w| \leq |\operatorname{Re}(w)| + |\operatorname{Im}(w)|$$

für jede komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ gilt (vgl. [14], Beweis von Satz 2.1.3).

Wie zu Beginn von Kapitel I erwähnt ist die Vollständigkeit der reellen Zahlen eine wichtige Voraussetzung für die Analysis. Mit Hilfe von Folgerung II.1.4 können wir daraus ableiten, dass auch der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen vollständig bzgl. des Betrags $|\cdot|$ ist.

II.1.7 Definition. Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen ist eine *Cauchyfolge*, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Der Vorteil des Konzepts der Cauchyfolge ist, dass die angegebene Bedingung nur die Folgenglieder beinhaltet.

II.1.8 Satz. *Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen ist vollständig, d.h. für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen sind äquivalent:*

- i) Die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- ii) Die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.

Beweis. „i) \implies ii)“. Es sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ der Grenzwert der Folge. Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : |z_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demnach finden wir für $m, n \geq n_0$

$$|z_n - z_m| = |z_n - a + a - z_m| \leq |z_n - a| + |z_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

“ii) \implies i)“. Das Ergebnis ist für die reellen Zahlen bekannt ([13], Lemma 2.3.11 und Satz 2.3.12). Wegen Folgerung II.1.4 reicht es zu zeigen, dass die Folgen $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolgen sind. Das folgt aus den Abschätzungen

$$|\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(a)| = |\operatorname{Re}(z_n - a)| \leq |z_n - a|, \quad |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(a)| = |\operatorname{Im}(z_n - a)| \leq |z_n - a|, \quad n \in \mathbb{N},$$

die bereits in Bemerkung II.1.6 angegeben wurden. □

II.1.9 Aufgaben (Konvergente Folgen). Es sei $z_0 = a_0 + b_0 \cdot i$ eine komplexe Zahl. Wir definieren die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv über

$$z_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot (z_n + z_n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- i) Es sei $a_0 \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } a_0 > 0 \\ -1, & \text{falls } a_0 < 0 \end{cases}$$

gilt.

- ii) Was passiert für $a_0 = 0$? (Ist die Folge dann immer definiert?)

II.2 Unendliche Reihen

II.2.1 Definitionen. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen.

i) Die *Folge der Partialsummen* oder die *unendliche Reihe* zu $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$s_n := \sum_{k=0}^n z_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Schreibweise. $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$.

ii) Die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ heißt *konvergent*, wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

In diesem Fall bezeichnet man den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ebenfalls mit $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$.

II.2.2 Bemerkung (Das Cauchy Kriterium für Reihen). Aus dem Konvergenzkriterium von Cauchy (Satz II.1.8) folgt, dass eine unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ genau dann konvergiert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n > m \geq n_0 : \left| \left(\sum_{k=0}^n z_k \right) - \left(\sum_{k=0}^m z_k \right) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n z_k \right| < \varepsilon$$

gibt. Insbesondere ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine **Nullfolge**, i.e. eine konvergente Folge mit Grenzwert Null.

II.2.3 Beispiel (Die geometrische Reihe). Zu einer komplexen Zahl $z \neq 1$ betrachten wir die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Für $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$s_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ konvergiert die Reihe, und ihr Grenzwert ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ gilt $|z^n| \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge, und die Reihe divergiert nach Bemerkung II.2.2.

II.2.4 Definition. Eine unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ komplexer Zahlen ist *absolut konvergent*, wenn die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ reeller Zahlen konvergiert. Falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergiert aber nicht absolut konvergiert, dann ist sie *bedingt konvergent*.

II.2.5 Lemma. Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ komplexer Zahlen konvergiert.

Beweis. Wir benutzen das Cauchy Kriterium aus Bemerkung II.2.2. Seien dazu $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n > m \geq n_0 : \sum_{k=m+1}^n |z_k| < \varepsilon.$$

Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$\forall n > m \geq n_0 : \left| \sum_{k=m+1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |z_k| < \varepsilon.$$

Folglich konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$. □

Absolut konvergente Reihen erfüllen eine starke Form des Kommutativgesetzes.

II.2.6 Definition. Eine unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ ist eine *Umordnung* der unendlichen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$, wenn es eine bijektive Abbildung $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : w_n = z_{\sigma(n)}$$

gibt.

II.2.7 Satz (Umordnungssatz). *Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ eine **absolut** konvergente unendliche Reihe und $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ eine Umordnung dieser Reihe. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ gegen den Wert der unendlichen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$.*

Beweis. Es sei s der Grenzwert der Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$s_n := \sum_{k=0}^n z_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

der Partialsummen. Weiter seien

$$t_n := \sum_{k=0}^n w_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

und

$$\sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

eine bijektive Abbildung, für die

$$w_n = z_{\sigma(n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

gilt.

Seien $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so dass

$$\forall n \geq n_0 : \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |z_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dabei beachte man

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |z_k| = \left| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |z_k| \right) - \left(\sum_{k=0}^{n_0} |z_k| \right) \right|.$$

Wir wählen $n_1 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\{ \sigma^{-1}(0), \dots, \sigma^{-1}(n_0) \} \subseteq \{ 0, \dots, n_1 \},$$

d.h.

$$\{ 0, \dots, n_0 \} \subseteq \{ \sigma(0), \dots, \sigma(n_1) \}.$$

Dann gilt²

$$\forall n \geq n_1 : |t_n - s_{n_0}| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |z_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit folgt

$$\forall n \geq n_1 : |t_n - s| = |t_n - s_{n_0} + s_{n_0} - s| \leq |t_n - s_{n_0}| + |s - s_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dies zeigt

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s = \sum_{k=0}^{\infty} z_k,$$

also die behauptete Konvergenz. □

II.2.8 Definition. Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ zwei unendliche Reihen komplexer Zahlen.

Ihr *Cauchyprodukt* ist die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ mit

$$v_n := \sum_{l=0}^n w_l \cdot z_{n-l} = \sum_{l+m=n} w_l \cdot z_m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

II.2.9 Satz. Wenn die unendlichen Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ **absolut** konvergieren, dann konvergiert ihr Cauchyprodukt ebenfalls absolut.

Beweis. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ das Cauchyprodukt der angegebenen Reihen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^n |v_k| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k |w_l| \cdot |z_{k-l}| \leq \left(\sum_{k=0}^n |w_k| \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^n |z_k| \right) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |w_k| \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |z_k| \right). \quad (\text{II.1})$$

Da die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **reeller** Zahlen mit

$$s_n := \sum_{k=0}^n |v_k|, \quad n \in \mathbb{N},$$

monoton wachsend und auf Grund von (II.1) nach oben beschränkt ist, konvergiert sie nach [13], Satz 2.3.2. □

²Diese Betrachtung zeigt nicht, dass $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen s_{n_0} konvergiert, weil n_0 von ε abhängt.

Eine ausführliche Diskussion absolut und bedingt konvergenter Reihen reeller Zahlen mit Gegenbeispielen zu den Sätzen II.2.7 und II.2.9 für bedingt konvergente Reihen ist in den Abschnitten 2.8 und 2.9 von [13] enthalten.

II.2.10 Aufgabe (Das Cauchyprodukt). Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergente unendliche Reihen komplexer Zahlen und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_n := \sum_{k+l=n} a_k \cdot b_l$, $n \in \mathbb{N}$, ihr Cauchyprodukt. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$$

für die Werte dieser Reihen gilt.

II.3 Potenzreihen

II.3.1 Definition. Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, $c \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und z eine Unbestimmte. Der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - c)^k \tag{II.2}$$

steht für die Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der polynomialen Funktionen

$$\begin{aligned} p_n: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\longmapsto \sum_{k=0}^n a_k \cdot (\zeta - c)^k, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

und heißt *formale Potenzreihe* mit *Koeffizienten* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und *Entwicklungspunkt* c .

Die Schreibweise in (II.2) erinnert uns daran, was wir mit Potenzreihen machen möchten, nämlich komplexwertige Funktionen auf Teilmengen der komplexen Ebene beschreiben. Zunächst können wir bei gegebener Potenzreihe und gegebenem Entwicklungspunkt c wie in (II.2) für jede komplexe Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ die unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (\zeta - c)^k$$

bilden.³ Die erste Frage, die sich stellt, ist, wann diese Reihe konvergiert.

II.3.2 Definition. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - c)^k$ eine formale Potenzreihe mit Koeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Entwicklungspunkt c . Ihre *Konvergenzmenge* ist

$$K := \left\{ \zeta \in \mathbb{C} \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (\zeta - c)^k \text{ konvergiert} \right\}.$$

³Als Folge von Partialsummen geschrieben ist dies $(p_n(\zeta))_{n \in \mathbb{N}}$.

Zu einer formalen Potenzreihe gehört damit die komplexwertige Funktion

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (\zeta - c)^k. \end{aligned}$$

II.3.3 Frage. Wie sieht die Konvergenzmenge K aus?

II.3.4 Bemerkung. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Wir nennen f *reell analytisch*, wenn f unendlich oft differenzierbar ist und die Taylorreihe $T_{f,c}$ von f in jedem Punkt $c \in I$ positiven Konvergenzradius ε hat und auf dem Intervall $I \cap (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ gegen f konvergiert. Dies ist die stärkste Differenzierbarkeitsbedingung, der wir in der reellen Analysis begegnet sind (s. [13], Abschnitt 4.8).

Komplexwertige Funktionen auf offenen Teilmengen der komplexen Ebene verhalten sich vollkommen anders. Hier sind die Bedingungen „holomorph“ und „analytisch“ äquivalent (s. Satz III.3.14 und Satz IV.6.8). Potenzreihen sind im Wesentlichen algebraische Objekte. Dadurch, dass sich jede holomorphe Funktion lokal in eine Potenzreihe entwickeln lässt, sind in der Theorie komplexer Funktionen Algebra und Analysis eng verzahnt. Das hat bei der Entwicklung der modernen komplexen Analysis eine bedeutende Rolle gespielt.

Addition und Multiplikation von Funktionen haben ihre Gegenstücke in der Sprache der formalen Potenzreihen:

II.3.5 Definition. Es seien $c \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen komplexer Zahlen und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - c)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot (z - c)^k$$

die zugehörigen formalen Potenzreihen mit Entwicklungspunkt c . Ihre *Summe* ist die formale Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) \cdot (z - c)^k$$

mit Entwicklungspunkt c und Koeffizienten $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ihr *Produkt* die formale Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \cdot (z - c)^k$$

mit Entwicklungspunkt c und Koeffizienten

$$d_n := \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

II.3.6 Bemerkung. Die obige Definition des Produkts macht die Definition des Cauchyprodukts für Reihen (Definition II.2.8) verständlicher. Zwei Potenzreihen werden multipliziert, indem das Distributivgesetz und die Rechenregel

$$\forall l, m \in \mathbb{N} : (z - c)^l \cdot (z - c)^m = (z - c)^{l+m}$$

für die Unbestimmte z benutzt werden und dann nach den Potenzen von $z - c$ sortiert wird. Dies entspricht der bekannten Multiplikation für Polynome ([13], Bemerkung 3.6.2, i).

Der folgende Satz gibt eine wichtige Antwort auf Frage II.3.3:

II.3.7 Satz (Abelsches Konvergenzlemma⁴). *Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-c)^k$ eine formale Potenzreihe und $\zeta_0, \zeta \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen.*

i) *Gelten $\zeta_0 \in K$ und $|\zeta - c| < |\zeta_0 - c|$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (\zeta - c)^k$ absolut. Insbesondere gilt $\zeta \in K$.*

ii) *Falls $\zeta_0 \notin K$ und $|\zeta - c| > |\zeta_0 - c|$, so gilt $\zeta \notin K$.*

Beweis. Wir beobachten zunächst, dass es genügt, die Aussagen für den Entwicklungspunkt $c = 0$ zu beweisen. Ferner folgt ii) unmittelbar aus i).

Da die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \zeta_0^k$ konvergiert, gibt es nach Bemerkung II.1.2, ii), eine Konstante $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n \cdot \zeta_0^n| < C.$$

Weiter seien

$$q := \frac{|\zeta|}{|\zeta_0|} < 1 \quad \text{und} \quad M := \frac{C}{1-q} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Wir weisen die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k \cdot \zeta^k|$ mit dem Cauchy Kriterium aus Bemerkung II.2.2 nach. Dazu geben wir uns eine positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ vor und wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$M \cdot q^{n_0+1} < \varepsilon.$$

Jetzt haben wir

$$\sum_{k=m+1}^n |a_k \cdot \zeta^k| = \sum_{k=m+1}^n |a_k \cdot \zeta_0^k| \cdot \frac{|\zeta|^k}{|\zeta_0|^k} < C \cdot \sum_{k=m+1}^n q^k = C \cdot \frac{q^{m+1} - q^{n+1}}{1-q} < M \cdot q^{m+1} \leq M \cdot q^{n_0+1} < \varepsilon$$

für $n > m \geq n_0$. Damit konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \zeta^k$ absolut. □

In den folgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf formale Potenzreihen mit Entwicklungspunkt 0. Alle Aussagen und Beweise lassen sich unmittelbar auf formale Potenzreihen mit beliebigem Entwicklungspunkt übertragen.

II.3.8 Definition. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$ eine formale Potenzreihe mit Koeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Entwicklungspunkt 0. Die Zahl

$$\varrho := \sup\{|\zeta| \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \zeta \in K\}$$

ist der *Konvergenzradius* der Reihe.

Mit dem abelschen Konvergenzlemma II.3.7 schließen wir

II.3.9 Folgerung. Für die Konvergenzmenge K der formalen Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$ gilt

$$B(0, \varrho) \subset K \subset \overline{B(0, \varrho)}.$$

⁴Niels Henrik Abel (1802 - 1829), norwegischer Mathematiker.

Zu der Konvergenz auf der Menge

$$S := \overline{B(0, \varrho)} \setminus B(0, \varrho) = \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| = \varrho \} \quad (\text{II.3})$$

haben wir keine allgemeingültige Aussage gemacht. Die folgenden Beispiele zeigen, dass die Konvergenz auf dem Rand S sehr unterschiedlich ausfallen kann.

II.3.10 Beispiele. i) Wir betrachten die formale Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}.$$

Wir wissen bereits, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert ([13], Folgerung 2.7.5). Damit konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \zeta^k$ für alle $\zeta \in \overline{B(0, 1)}$ absolut. Insbesondere gilt $\varrho \geq 1$. Für $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| > 1$ folgt aus [13], Aufgabe 6.15.2, b), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\zeta|^n}{n^2} = \infty.$$

Folglich divergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \zeta^k$, und wir schließen $\varrho = 1$. Insgesamt haben wir

$$\varrho = 1 \quad \text{und} \quad S \subset K$$

gezeigt.

ii) Für die **geometrische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

gilt ebenfalls $\varrho = 1$: Für $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| \geq 1$ ist $(\zeta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Deshalb divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k$, und es gilt $\varrho \leq 1$. Auf der anderen Seite haben wir bereits in Beispiel II.2.3

überprüft, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k$ für $|\zeta| < 1$ konvergent ist und den Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k = \frac{1}{1 - \zeta} \quad (\text{II.4})$$

hat. Daran sehen wir $\varrho \leq 1$. Man beachte, dass

$$S \cap K = \emptyset.$$

Gleichung (II.4) ist ein typisches Beispiel für die Potenzreihenentwicklung einer holomorphen Funktion.

iii) Die **logarithmische Reihe** ist⁵

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{z^k}{k}.$$

⁵Sie ergibt sich durch Taylorentwicklung des natürlichen Logarithmus im Punkt 1 ([13], Beispiel 5.7.17).

Für $\zeta = 1$ haben wir die Reihe

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Dies ist die **alternierende harmonische Reihe**. Sie konvergiert nach dem Leibnizkriterium⁶ ([13], Satz 2.7.8). Wir folgern $\varrho \geq 1$.

An der Stelle $z = -1$ ergibt sich die Reihe

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Die **harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergiert ([13], Beispiel 2.3.13). Wir erkennen $\varrho \leq 1$.

Zusammengenommen haben wir

$$\varrho = 1 \quad \text{und} \quad \emptyset \subsetneq S \cap K \subsetneq S$$

nachgewiesen.

II.3.11 Bemerkung. Für Literaturhinweise zum Konvergenzverhalten einer formalen Potenzreihe auf dem Rand S veweisen wir auf [11], S. 85.

II.3.12 Aufgaben (Die logarithmische Reihe). i) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ und $z \neq 1$ konvergiert. (Gegenbeispiel für $z = 1$?)

Hinweis. Untersuchen Sie die Konvergenz der Potenzreihe $(1 - z) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$ mit dem Cauchy Kriterium.

ii) Benutzen Sie i), um zu zeigen, dass die logarithmische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{z^k}{k}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ und $z \neq -1$ (!) konvergiert.

II.3.13 Lemma. *Es sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine nach unten beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann existiert der Grenzwert*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{ \alpha_k \mid k \geq n \}. \tag{II.5}$$

Beweis. Die Folge $(\sup\{ \alpha_k \mid k \geq n \})_{n \in \mathbb{N}}$ ist offenbar monoton fallend. Nach Voraussetzung ist sie nach unten beschränkt. Sie konvergiert folglich nach [13], Satz 2.3.2. \square

II.3.14 Definition. In der Situation von Lemma II.3.13 heißt der Grenzwert in (II.5) der *Limes superior* der Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Schreibweise. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

⁶Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), deutscher Philosoph, Mathematiker uvm.

II.3.15 Aufgabe. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von komplexen Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|.$$

II.3.16 Satz (Cauchy–Hadamard⁷). Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$ eine formale Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0. Dann gilt für ihren Konvergenzradius die Identität⁸

$$\frac{1}{\varrho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Beweis. Wir setzen

$$\alpha := \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

i) Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|\zeta| < \alpha$. Wir fixieren eine reelle Zahl r mit $|\zeta| < r < \alpha$ sowie eine natürliche Zahl n_0 , für die

$$\forall n \geq n_0 : \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r}$$

gilt. Dann haben wir auch

$$\forall n \geq n_0 : \quad |a_n| < \frac{1}{r^n}$$

und folglich

$$\forall n \geq n_0 : \quad |a_n \cdot \zeta^n| = |a_n \cdot r^n| \cdot \left(\frac{|\zeta|}{r}\right)^n \leq \left(\frac{|\zeta|}{r}\right)^n.$$

Nun gilt

$$q := \frac{|\zeta|}{r} < 1,$$

so dass die Konvergenz der geometrischen Reihe und das Majorantenkriterium ([13], Satz 2.10.1) die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k \cdot \zeta^k|$ implizieren. Es folgt die Konvergenz der Reihe

he $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k \cdot \zeta^k|$, d.h. die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \zeta^k$. Aus diesen Betrachtungen ergibt sich $\alpha \leq \varrho$.

ii) Jetzt seien $\zeta \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|\zeta| > \alpha$ und $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $|\zeta| > r > \alpha$. Die Definition des Limes superior zeigt, dass es eine unendliche Teilmenge $S \subset \mathbb{N}$ geben muss, so dass

$$\forall n \in S : \quad \frac{1}{r} < \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \text{d.h.} \quad \frac{1}{r^n} < |a_n|.$$

Damit erkennen wir weiter

$$\forall n \in S : \quad |a_n \cdot \zeta^n| = |a_n| \cdot |\zeta|^n > \frac{1}{r^n} \cdot r^n = 1.$$

Die Folge $(a_n \cdot \zeta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also keine Nullfolge. Nach Bemerkung II.2.2 divergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \zeta^k$. Es folgt $\varrho \leq \alpha$, so dass wir insgesamt $\varrho = \alpha$ und damit die behauptete Formel von Cauchy–Hadamard nachgewiesen haben. \square

⁷Jacques Salomon Hadamard (1865 - 1963), französischer Mathematiker.

⁸In dieser Formel werden die Vereinbarungen $1/0 = \infty$ und $1/\infty = 0$ verwendet.

Die Formel von Cauchy–Hadamard lässt sich auf jede Potenzreihe anwenden. Allerdings sind die n -ten Wurzeln und der Limes superior im Allgemeinen schlecht zu berechnen. Zum Glück gibt es unter geeigneten Voraussetzungen, die von wichtigen Reihen erfüllt werden, einfachere Formeln für den Konvergenzradius.

II.3.17 Satz. *Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$ eine formale Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 und Konvergenzradius ϱ . Wenn die Folge $(|a_n|/|a_{n+1}|)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert ist⁹ und konvergiert,¹⁰ dann gilt*

$$\varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Beweis. Wir gehen wie beim Beweis des Satzes von Cauchy–Hadamard vor und setzen

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

i) Wir schauen uns zunächst eine komplexe Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| < \alpha$ an, wählen dazu eine reelle Zahl r mit $|\zeta| < r < \alpha$ und suchen uns eine natürliche Zahl n_0 mit der Eigenschaft

$$\forall n \geq n_0 : \quad r < \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \tag{II.6}$$

aus. Es sei

$$B := |a_{n_0} \cdot r^{n_0}|.$$

Behauptung. *Für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$ gilt $|a_n \cdot r^n| \leq B$.*

Dies weisen wir mittels vollständiger Induktion über n nach. Der Fall n_0 ist durch die Definition von B abgedeckt. Für $n \geq n_0$ folgt aus (II.6)

$$|a_n| > |a_{n+1}| \cdot r.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich nun

$$B \geq |a_n \cdot r^n| = |a_n| \cdot r^n > |a_{n+1}| \cdot r^{n+1} = |a_{n+1} \cdot r^{n+1}|.$$

Unter Verwendung der Behauptung erhalten wir weiter

$$\forall n \geq n_0 : \quad |a_n \cdot \zeta^n| = |a_n \cdot r^n| \cdot \left(\frac{|\zeta|}{r}\right)^n \leq B \cdot \left(\frac{|\zeta|}{r}\right)^n.$$

Da

$$q := \frac{|\zeta|}{r} < 1,$$

schließen wir wie im Beweis von Satz II.3.16, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \zeta^k$ absolut konvergiert und folglich $\alpha \leq \varrho$ gilt.

⁹Dazu muss $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, gelten.

¹⁰Hier ist auch die Konvergenz gegen den Grenzwert ∞ gemäß [13], Definition 2.4.1, eingeschlossen.

ii) Hier seien $\zeta \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $\alpha < |\zeta|$, $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $\alpha < r < |\zeta|$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so dass

$$\forall n \geq n_0 : r > \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Wieder sei

$$B := |a_{n_0} \cdot r^{n_0}|.$$

Diesmal folgt

$$\forall n \geq n_0 : |a_n \cdot r^n| \geq B.$$

Dann gilt aber auch

$$\forall n \geq n_0 : |a_n \cdot \zeta^n| = |a_n| \cdot |\zeta|^n > |a_n| \cdot r^n = |a_n \cdot r^n| \geq B,$$

so dass die Folge $(a_n \cdot \zeta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \zeta^k$ nach Bemerkung II.2.2 divergent ist. Es folgt $\varrho \leq \alpha$. Die Teile i) und ii) ergeben zusammen wie behauptet die Gleichung $\varrho = \alpha$. \square

II.3.18 Beispiel (Die binomische Reihe). Es sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt der **binomische Lehrsatz** ([13], Satz 1.7.19)

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k.$$

Sei allgemeiner $\nu \in \mathbb{R}$. Die Taylorentwicklung der Funktion $(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^\nu$, wird mit Hilfe verallgemeinerter Binomialkoeffizienten ([13], Definition 5.7.13) beschrieben. Diese lassen sich auch für komplexe Zahlen erklären:

Definition. Es sei $\nu \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl.

i) Man setzt

$$\binom{\nu}{0} := 1$$

und

$$\forall k \geq 1 : \binom{\nu}{k} = \frac{\nu \cdot (\nu - 1) \cdot \dots \cdot (\nu - k + 1)}{k!} = \prod_{l=1}^k \frac{\nu - l + 1}{l}.$$

ii) Die *binomische Reihe* zum Exponenten ν ist

$$b_\nu(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} \cdot z^k.$$

Bemerkungen. i) Die obigen Binomialkoeffizienten genügen folgender Rekursionsvorschrift

$$\forall k \in \mathbb{N} : \binom{\nu}{k+1} = \frac{\nu - k}{k+1} \cdot \binom{\nu}{k}.$$

ii) Für positive natürliche Zahlen $k, n \geq 1$ hat man

$$k > n \iff \binom{n}{k} = 0.$$

Für $\nu = -1$ ergibt sich z.B.

$$\forall k \in \mathbb{N} : \binom{-1}{k} = (-1)^k$$

und

$$b_{-1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k.$$

Für $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\zeta)^k = \frac{1}{1 + \zeta}.$$

Die binomische Reihe ist genau dann endlich, d.h. alle bis auf endlich viele Koeffizienten sind null, wenn ν eine natürliche Zahl ist. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$b_n(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot z^k$$

ein Polynom und hat als formale Potenzreihe den Konvergenzradius $\rho = \infty$. In den verbleibenden Fällen gilt:

Behauptung. Für $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ hat die binomische Reihe $b_\nu(z)$ den Konvergenzradius $\rho = 1$.

Es sei $a_n := \binom{\nu}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Voraussetzung $\nu \notin \mathbb{N}$ garantiert

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \binom{\nu}{n} \neq 0.$$

Weiter gilt nach der obigen Bemerkung

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n+1}{|\nu-n|} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left|1 - \frac{\nu}{n}\right|}.$$

Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1.$$

Die Behauptung zum Konvergenzradius ergibt sich somit aus Satz II.3.17.

Wir werden weiter unten Potenzfunktionen im Komplexen untersuchen (Abschnitt II.7). Damit lässt sich auch im Komplexen die binomische Reihe als Reihenentwicklung einer Funktion auffassen. Dies ist Gegenstand der Formel von Newton¹¹–Abel ([11], S. 115).

II.3.19 Aufgaben (Das Cauchyprodukt). i) Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot z^k$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien ρ_1 und ρ_2 . Was können Sie über den Konvergenzradius des Cauchyprodukts $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z^k$ aussagen?

ii) Es seien u und v zwei komplexe Zahlen. Beweisen Sie folgende Formel für die binomischen Reihen:

$$b_u(z) \cdot b_v(z) = b_{u+v}(z), \quad |z| < 1.$$

¹¹Sir Isaac Newton (1643 - 1727), englischer Physiker, Mathematiker, Astronom, Alchemist, Philosoph und Verwaltungsbeamter, Mitbegründer der Infinitesimalrechnung.

II.3.20 Aufgaben (Der Konvergenzradius). i) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-4}{k} \right)^{k^2} \cdot z^k.$$

ii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^k \cdot (k!)^2} \cdot z^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ln(k) \cdot z^k.$$

II.4 Die Exponentialfunktion

II.4.1 Satz. Für jede komplexe Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!}$$

absolut, d.h. die formale Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

hat unendlichen Konvergenzradius.

Beweis. Wir wenden Satz II.3.17 an. Hier gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{1}{n!} \neq 0,$$

so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1.$$

Somit haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = \infty,$$

und der gesuchte Konvergenzradius ist unendlich. \square

II.4.2 Definitionen. i) Die formale Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ wird die *Exponentialreihe* genannt.

ii) Die Funktion

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\longmapsto \exp(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!} \end{aligned}$$

ist die *Exponentialfunktion*.

II.4.3 Satz (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). Für je zwei komplexe Zahlen $\zeta, \xi \in \mathbb{C}$ ist die Gleichung

$$\exp(\zeta + \xi) = \exp(\zeta) \cdot \exp(\xi)$$

erfüllt.

Beweis. Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k/k!$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \xi^k/k!$ konvergieren absolut. Gemäß Satz II.2.9 und Aufgabe II.2.10 können wir den Wert des Produkts

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} \right)$$

über das Cauchyprodukt (Definition II.2.8) der beteiligten Reihen berechnen, d.h. $\exp(\zeta) \cdot \exp(\xi)$ ist der Wert der unendlichen Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{\zeta^l \cdot \xi^{k-l}}{l! \cdot (k-l)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \cdot \zeta^l \cdot \xi^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta + \xi)^k}{k!}.$$

Bei der letzten Umformung haben wir die binomische Formel ([13], Satz 1.7.19) eingesetzt. An dieser Beschreibung erkennt man, dass die fragliche Reihe den Wert $\exp(\zeta + \xi)$ hat. □

II.4.4 Folgerung. Für jede komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(\lambda) \neq 0 \quad \text{und} \quad \exp(-\lambda) = \frac{1}{\exp(\lambda)}.$$

Beweis. Man hat

$$1 = \exp(0) = \exp(\lambda - \lambda) = \exp(\lambda) \cdot \exp(-\lambda).$$

Daraus liest man alle Behauptungen ab. □

II.5 Die eulerschen Formeln

II.5.1 Satz. Die beiden formalen Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

mit Entwicklungspunkt 0 haben den Konvergenzradius $\rho = \infty$.

Beweis. Wir führen den Beweis für die erste Reihe. Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^n \frac{|\zeta|^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{|\zeta|^k}{k!} \leq \exp(|\zeta|)$$

für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$. Das Majorantenkriterium ([13], Satz 2.10.1) zeigt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |\zeta|^{2k+1}/(2k+1)!$ und damit die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \zeta^{2k+1}/(2k+1)!. \quad \square$$

II.5.2 Definitionen. i) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{2k+1} / (2k+1)!$ ist die *Sinusreihe* und die Funktion

$$\begin{aligned} \sin: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\zeta^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

die *Sinusfunktion*.

ii) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{2k} / (2k)!$ ist die *Kosinusreihe* und die Funktion

$$\begin{aligned} \cos: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\zeta^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

die *Kosinusfunktion*.

II.5.3 Bemerkung. Die Sinusreihe enthält nur ungerade Potenzen von z . Daraus folgert man

$$\forall \zeta \in \mathbb{C} : \quad \sin(-\zeta) = -\sin(\zeta).$$

Ebenso ergibt sich

$$\forall \zeta \in \mathbb{C} : \quad \cos(-\zeta) = \cos(\zeta)$$

aus der Tatsache, dass in der Kosinusreihe nur gerade Potenzen von z vorkommen.

II.5.4 Satz (Eulerformel). Für jede komplexe Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(i \cdot \zeta) = \cos(\zeta) + i \cdot \sin(\zeta).$$

Beweis. Die Potenzen der komplexen Zahl i sehen folgendermaßen aus

$$\begin{aligned} i^{2n+1} &= (-1)^n \cdot i \\ i^{2n} &= (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(i \cdot \zeta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{i^k \cdot \zeta^k}{k!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{\zeta^{2k}}{(2k)!} + i \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{\zeta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$. Wir schließen

$$\begin{aligned} \exp(i \cdot \zeta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(i \cdot \zeta)^k}{k!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{\zeta^{2k}}{(2k)!} \right) + i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{\zeta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \cos(\zeta) + i \cdot \sin(\zeta). \end{aligned}$$

Dies ist die Eulerformel. □

Dieser Satz stellt den wesentlichen Unterschied zwischen der reellen und komplexen Theorie der Exponential-, Sinus- und Kosinusreihe dar. Erst mit Hilfe der komplexen Zahl i können wir die Sinus- und Kosinusreihe zur Exponentialreihe kombinieren. In der komplexen Analysis können wir die Exponential-, Sinus- und Kosinusfunktion elegant gemeinsam behandeln.

Zunächst illustrieren wir, wie man mit Hilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und der obigen Eulerformel die Additionstheoreme für den **reellen** Sinus und Kosinus herleiten kann. Dazu seien $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ zwei **reelle** Zahlen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi) &= \exp(i \cdot (\varphi + \psi)) \\ &= \exp(i \cdot \varphi) \cdot \exp(i \cdot \psi) \\ &= (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \cdot (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi)) \\ &= (\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)) + \\ &\quad i \cdot (\sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)). \end{aligned}$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil der ersten und letzten komplexen Zahl ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) \\ \sin(\varphi + \psi) &= \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi). \end{aligned}$$

Diese Formeln gelten aber auch für komplexe Zahlen:

II.5.5 Satz (Additionstheoreme für die komplexe Sinus- und Kosinusfunktion). *Es seien $\zeta, \xi \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \cos(\zeta + \xi) &= \cos(\zeta) \cdot \cos(\xi) - \sin(\zeta) \cdot \sin(\xi) \\ \sin(\zeta + \xi) &= \sin(\zeta) \cdot \cos(\xi) + \cos(\zeta) \cdot \sin(\xi). \end{aligned}$$

Beweis. Wir zuvor berechnet man

$$\cos(\zeta + \xi) + i \cdot \sin(\zeta + \xi) = (\cos(\zeta) \cdot \cos(\xi) - \sin(\zeta) \cdot \sin(\xi)) + i \cdot (\sin(\zeta) \cdot \cos(\xi) + \cos(\zeta) \cdot \sin(\xi)). \quad (\text{II.7})$$

Hier sind alle beteiligten Zahlen im Allgemeinen komplex, d.h. es handelt sich bei den angegebenen Formeln nicht um die Zerlegung einer komplexen Zahl in Real- und Imaginärteil. Zur Vollendung des Arguments benötigen wir eine weitere Formel. Diese erhalten wir, indem wir in (II.7) die Zahlen $-\zeta$ und $-\xi$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \cos(-\zeta - \xi) + i \cdot \sin(-\zeta - \xi) &= (\cos(-\zeta) \cdot \cos(-\xi) - \sin(-\zeta) \cdot \sin(-\xi)) + \\ &\quad i \cdot (\sin(-\zeta) \cdot \cos(-\xi) + \cos(-\zeta) \cdot \sin(-\xi)). \end{aligned}$$

Mit Bemerkung II.5.3 wird daraus

$$\cos(\zeta + \xi) - i \cdot \sin(\zeta + \xi) = (\cos(\zeta) \cdot \cos(\xi) - \sin(\zeta) \cdot \sin(\xi)) - i \cdot (\sin(\zeta) \cdot \cos(\xi) + \cos(\zeta) \cdot \sin(\xi)). \quad (\text{II.8})$$

Addition von (II.7) und (II.8) führt auf das erste Additionstheorem, die Differenz (II.7) - (II.8) auf das zweite. \square

Die folgenden Formeln drücken die Sinus- und Kosinusfunktion durch die Exponentialfunktion aus:

II.5.6 Satz (Eulerformeln). *Für jede komplexe Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ hat man*

$$\begin{aligned}\sin(\zeta) &= \frac{1}{2i} \cdot (\exp(i \cdot \zeta) - \exp(-i \cdot \zeta)) \\ \cos(\zeta) &= \frac{1}{2} \cdot (\exp(i \cdot \zeta) + \exp(-i \cdot \zeta)).\end{aligned}$$

Beweis. Diese Formeln erhält man aus der Differenz bzw. Summe der Gleichungen

$$\begin{aligned}\exp(i \cdot \zeta) &= \cos(\zeta) + i \cdot \sin(\zeta) \\ \exp(-i \cdot \zeta) &= \cos(-\zeta) + i \cdot \sin(-\zeta) = \cos(\zeta) - i \cdot \sin(\zeta),\end{aligned}$$

die sich aus der Eulerformel II.5.4 und Bemerkung II.5.3 ergeben. \square

Diese Formeln erinnern an weitere Funktionen, die in der reellen Analysis ([13], Aufgabe 6.12.2) betrachtet werden:

II.5.7 Definitionen (Hyperbelfunktionen). i) Die Funktion

$$\begin{aligned}\sinh: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\longmapsto \frac{1}{2} \cdot (\exp(\zeta) - \exp(-\zeta))\end{aligned}$$

ist der *Sinus hyperbolicus*.

ii) Die Funktion

$$\begin{aligned}\cosh: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\longmapsto \frac{1}{2} \cdot (\exp(\zeta) + \exp(-\zeta))\end{aligned}$$

heißt *Kosinus hyperbolicus*.

II.5.8 Folgerung. *Für jede komplexe Zahl ζ hat man*

$$\begin{aligned}\sinh(\zeta) &= \frac{1}{i} \cdot \sin(i \cdot \zeta), \\ \sin(\zeta) &= \frac{1}{i} \cdot \sinh(i \cdot \zeta)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cosh(\zeta) &= \cos(i \cdot \zeta), \\ \cos(\zeta) &= \cosh(i \cdot \zeta).\end{aligned}$$

Wir erkennen, wie „komplex“ z.B. die komplexe Kosinusfunktion ist: Sie vereint unter anderem die sehr verschiedenen reellen Funktionen \cos und \cosh . Die erste erhalten wir durch Einschränkung der komplexen Kosinusfunktion auf die reelle Achse, die zweite durch Einschränkung auf die imaginäre Achse. Schließlich können wir die komplexe Exponentialfunktion aus der Sinus- und Kosinusfunktion aufbauen. Dies hat überraschende Konsequenzen, die die komplexe Exponentialfunktion von der reellen unterscheiden.

Die Periodizität der Exponentialfunktion

Es sei $k \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Mit der Eulerformel II.5.4 finden wir

$$\exp(i \cdot 2k \cdot \pi) = \cos(2k \cdot \pi) + i \cdot \sin(2k \cdot \pi) = 1. \quad (\text{II.9})$$

Die Exponentialfunktion ist somit, anders als im Reellen, **nicht injektiv**. Genauer gilt:

II.5.9 Satz. *Es seien $\zeta, \xi \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen. Dann hat man:*

$$\exp(\zeta) = \exp(\xi) \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \xi = \zeta + k \cdot 2\pi \cdot i.$$

Beweis. Schritt 1. Wir zeigen die Aussage zunächst für $\xi = 0$. Nach (II.9) müssen wir verstehen, für welche komplexe Zahlen $\zeta \in \mathbb{C}$

$$\exp(\zeta) = 1$$

gilt. Dazu schreiben wir $\zeta = a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Gleichung

$$\begin{aligned} 1 &= \exp(\zeta) = \exp(a + b \cdot i) = \exp(a) \cdot \exp(i \cdot b) = \exp(a) \cdot (\cos(b) + i \cdot \sin(b)) \\ &= (\exp(a) \cdot \cos(b)) + (\exp(a) \cdot \sin(b)) \cdot i \end{aligned}$$

zeigt

$$1 = \exp(a) \cdot \cos(b) \quad (\text{II.10})$$

$$0 = \exp(a) \cdot \sin(b). \quad (\text{II.11})$$

Mit

$$\forall a \in \mathbb{R} : \exp(a) > 0$$

folgt aus (II.11)

$$\sin(b) = 0, \quad \text{d.h.} \quad \exists k \in \mathbb{Z} : b = k \cdot \pi.$$

Daraus leiten wir

$$\cos(b) \in \{\pm 1\}$$

ab, so dass sich mit (II.10)

$$\cos(b) = 1, \quad \text{d.h.} \quad \exists k \in \mathbb{Z} : b = 2k \cdot \pi, \quad \text{und} \quad \exp(a) = 1, \quad \text{d.h.} \quad a = 0,$$

ergibt.

Schritt 2. Mit der Funktionalgleichung II.4.3 der Exponentialfunktion und Folgerung II.4.4 erkennen wir

$$\forall \zeta, \xi \in \mathbb{C} : \exp(\zeta) = \exp(\xi) \iff 1 = \exp(\zeta)^{-1} \cdot \exp(\xi) = \exp(\xi - \zeta).$$

Nach Schritt 1 gilt

$$\exists k \in \mathbb{Z} : \xi - \zeta = k \cdot 2\pi \cdot i, \quad \text{d.h.} \quad \exists k \in \mathbb{Z} : \xi = \zeta + k \cdot 2\pi \cdot i.$$

Damit ist der Satz gezeigt. □

Die Exponentialfunktion ist also **periodisch** mit **Periode** $2\pi \cdot i$.

II.5.10 Folgerung. Für eine komplexe Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}\sin(\zeta) = 0 &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : \zeta = k \cdot \pi, \\ \cos(\zeta) = 0 &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : \zeta = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi.\end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage für die Kosinusfunktion. Die Gleichung

$$0 = \cos(\zeta) = \frac{1}{2} \cdot (\exp(i \cdot \zeta) + \exp(-i \cdot \zeta))$$

ist äquivalent zu

$$\exp(i \cdot \zeta) = -\exp(-i \cdot \zeta) = \exp(-i \cdot \pi) \cdot \exp(-i \cdot \zeta) = \exp(-i \cdot (\pi + \zeta)),$$

d.h.

$$\exp(i \cdot (2\zeta + \pi)) = 1.$$

Nach Satz II.5.9 lässt sich diese Aussage umformen zu

$$\exists k \in \mathbb{Z} : (2\zeta + \pi) \cdot i = (k \cdot 2\pi) \cdot i.$$

Dies ist offenbar die Behauptung. □

Alle Nullstellen der komplexen Sinus- bzw. Kosinusfunktion sind somit reell.

II.5.11 Bemerkung. Mit der Eulerformel II.5.4 und der Kenntnis der **reellen** trigonometrischen Funktionen lässt sich die komplexe Exponentialfunktion gut untersuchen. Man kann die Theorie aber auch weitgehend ohne die Eulerformel und die trigonometrischen Funktionen entwickeln. Insbesondere kann man so zeigen:

- ★ Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bildet \mathbb{C} surjektiv auf \mathbb{C}^* ab.
- ★ Es gibt eine eindeutig bestimmte **positive reelle** Zahl $\tilde{\pi}$, so dass

$$\{\zeta \in \mathbb{C} \mid \exp(\zeta) = 1\} = \{k \cdot 2\tilde{\pi} \cdot i \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Damit ergibt sich insbesondere eine neue Definition der Kreiszahl π . Wir verweisen dazu auf [11], Kapitel 5, §2.

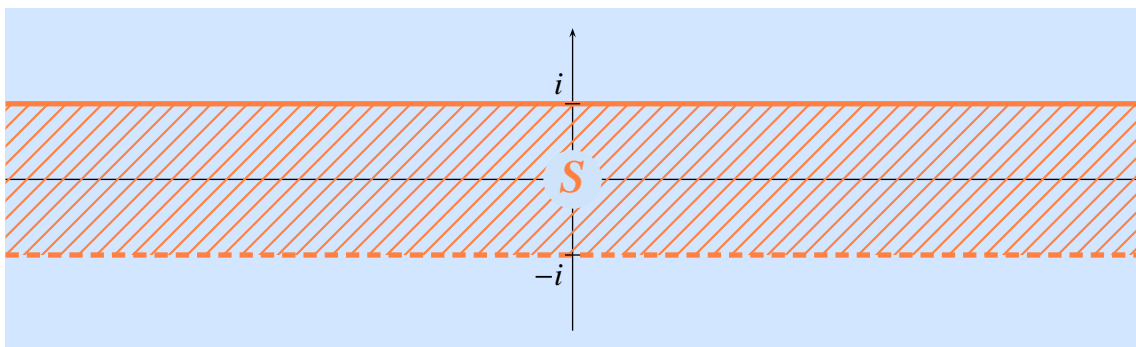
II.5.12 Aufgabe (Eine trigonometrische Formel). Beweisen Sie mit Hilfe der Eulerformel:

$$\sum_{v=0}^n \cos(vz) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2}) \cdot z\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot z\right)}, \quad z \notin 2\pi \cdot \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

II.6 Der Hauptzweig des Logarithmus

Es sei

$$S := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im}(\zeta) \leq \pi\}.$$



Mit der Eulerformel II.5.4, der Funktionalgleichung II.4.3 und Satz I.5.3 zeigt man:

II.6.1 Satz. Die komplexe Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bildet S bijektiv auf \mathbb{C}^* ab.

Es folgt unmittelbar:

II.6.2 Satz. Es gibt genau eine Funktion

$$\text{Log}: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C},$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

- ★ $\forall \zeta \in \mathbb{C}^* : \exp(\text{Log}(\zeta)) = \zeta.$
- ★ $\forall \zeta \in \mathbb{C}^* : \text{Im}(\text{Log}(\zeta)) \in (-\pi, \pi].$

II.6.3 Definition. Die Funktion Log aus Satz II.6.2 heißt der *Hauptzweig des Logarithmus*.

II.6.4 Bemerkungen. i) Für komplexe Zahlen $\zeta \in \mathbb{C}^*$ und $\xi \in \mathbb{C}$ gilt nach Satz II.5.9

$$\exp(\xi) = \zeta \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \xi = \text{Log}(\zeta) + k \cdot 2\pi \cdot i.$$

ii) Für eine **positive reelle** Zahl $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt¹²

$$\text{Log}(x) = \ln(x).$$

iii) Mit dem Hauptzweig des Arguments (Definition I.5.7) gilt

$$\forall z \in \mathbb{C}^* : \text{Log}(z) = \ln(|z|) + i \cdot \text{Arg}(z).$$

II.7 Potenzfunktionen

Wir können die Definition der Potenzfunktionen aus der reellen Analysis ([13], Definition 3.8.16) formal übernehmen:

¹²Hier sei \ln der **natürliche Logarithmus**, der in [13], Definition 3.8.14, definiert und dort mit \log bezeichnet wird. Wir verwenden die Bezeichnung \ln zur besseren Unterscheidung.

II.7.1 Definition. Es seien $\zeta \in \mathbb{C}^*$ und $b \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen. Es wird

$$\zeta^b := \exp(b \cdot \operatorname{Log}(\zeta))$$

gesetzt.

II.7.2 Bemerkung. Es seien $\zeta \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen und $k \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Nach Bemerkung II.6.4, i), gilt

$$\exp(\operatorname{Log}(\zeta) + k \cdot 2\pi \cdot i) = \zeta.$$

Damit kann die Zahl

$$\exp(b \cdot (\operatorname{Log}(\zeta) + k \cdot 2\pi \cdot i))$$

mit demselben Recht wie die in Definition II.7.1 definierte für sich beanspruchen, die Potenz ζ^b zu sein. Wenn

$$b \cdot k \notin \mathbb{Z},$$

dann gilt

$$\exp(b \cdot \operatorname{Log}(\zeta)) \neq \exp(b \cdot (\operatorname{Log}(\zeta) + k \cdot 2\pi \cdot i)) = \exp(b \cdot \operatorname{Log}(\zeta)) \cdot \exp(b \cdot k \cdot 2\pi \cdot i)$$

nach Satz II.5.9. Die möglichen Werte der Potenz ζ^b sind somit die Elemente der Menge

$$\left\{ \exp(b \cdot \operatorname{Log}(\zeta)) \cdot \exp(b \cdot k \cdot 2\pi \cdot i) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dies ist i.A. eine unendliche Menge. Die in Definition II.7.1 getroffene Wahl ist also nur eine mehr oder weniger willkürliche Festlegung der Potenzfunktion $\zeta \mapsto \zeta^b$.

II.7.3 Beispiel. i) Es seien $\zeta \in \mathbb{C}^*$ und $n > 0$. Die n -ten Wurzeln aus ζ bilden die Menge

$$\left\{ \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{Log}(\zeta)\right) \cdot \exp\left(\frac{k}{n} \cdot 2\pi \cdot i\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sie enthält n Elemente. (Für $\zeta = 1$ hatten wir das bereits in Abschnitt I.6 illustriert.) Offenbar gibt es i.A. keine natürliche Wahl für die n -te Wurzel $\zeta^{1/n}$. Die in Definition II.7.1 getroffene ist nur eine mögliche.

ii) Wir berechnen die Potenz i^i mit Definition II.7.1 und Bemerkung II.6.4, iii). Es gilt

$$|i| = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}.$$

Somit haben wir

$$i^i = \exp\left(i \cdot \ln(1) + i \cdot i \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,207879 \dots$$

Dies ist insbesondere eine reelle Zahl. Diese überraschende Tatsache wurde bereits von Euler im Jahr 1746 beobachtet (s. [11], S. 115). Alle möglichen Werte für i^i sind die Elemente der Menge

$$\left\{ \exp\left(-\frac{\pi}{2} - k \cdot 2\pi\right) = \exp\left(-\frac{(4k+1) \cdot \pi}{2}\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sie sind sämtlich reell.

II.7.4 Warnung. Da es keine kanonische Potenz ζ^b , $\zeta \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, gibt, verlieren einige der Rechenregeln, an die man für die reelle Potenzfunktion gewöhnt ist, ihre Gültigkeit. So ist etwa die Identität

$$(\zeta \cdot \zeta')^b = \zeta^b \cdot \zeta'^b, \quad \zeta, \zeta' \in \mathbb{C}^*, \quad b \in \mathbb{C},$$

i.A. falsch. Wir betrachten dafür

$$\zeta := \zeta' := -1 \quad \text{und} \quad b := \frac{1}{2}.$$

Mit

$$|-1| = 1 \quad \text{und} \quad \text{Arg}(-1) = \pi$$

liefert Definition II.7.1

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = \exp\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) = i.$$

Wegen Bemerkung II.6.4, ii), haben wir weiter

$$((-1) \cdot (-1))^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1 \neq -1 = i \cdot i = (-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}}.$$

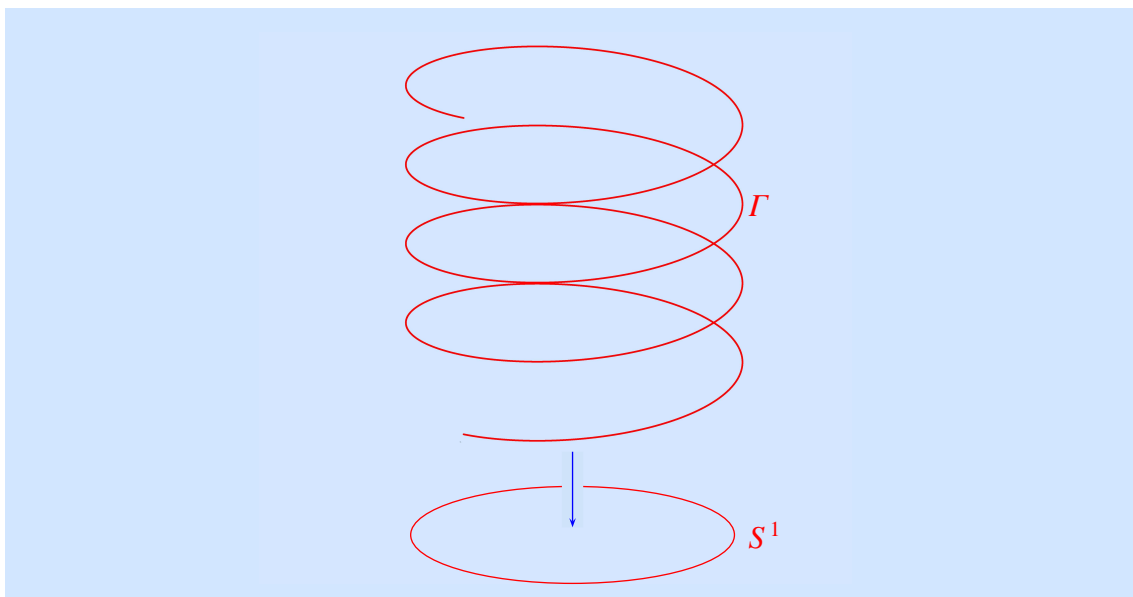


Abbildung II.1: Der Graph der mehrdeutigen Argumentfunktion

II.7.5 Bemerkungen. i) Für **positive reelle** Zahlen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine komplexe Zahl $b \in \mathbb{C}$ findet man allerdings

$$(a_1 a_2)^b = \exp(b \ln(a_1 a_2)) = \exp(b(\ln(a_1) + \ln(a_2))) = \exp(b \ln(a_1)) \exp(b \ln(a_2)) = a_1^b a_2^b.$$

ii) Man kann die Intuition für die Argument-, Logarithmus- und Potenzfunktionen dadurch verbessern oder ergänzen, dass man sie als „mehrdeutige Funktionen“ ansieht. Als solche ordnen sie jeder nichtverschwindenden komplexen Zahl nicht einen eindeutigen Wert sondern eine Menge von möglichen Werten zu. In einigen Fällen ist es möglich, sich diese mehrdeutigen Funktionen mit Hilfe eines Graphen zu veranschaulichen (s. Beispiel II.7.6).

II.7.6 Beispiele. i) Der Graph des Arguments auf dem Definitionsbereich

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

ist die Menge (s. Abbildung II.1)

$$\Gamma := \{(\zeta, \varphi) \in S^1 \times \mathbb{R} \mid \zeta = \exp(i \cdot \varphi)\} \subset S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3.$$

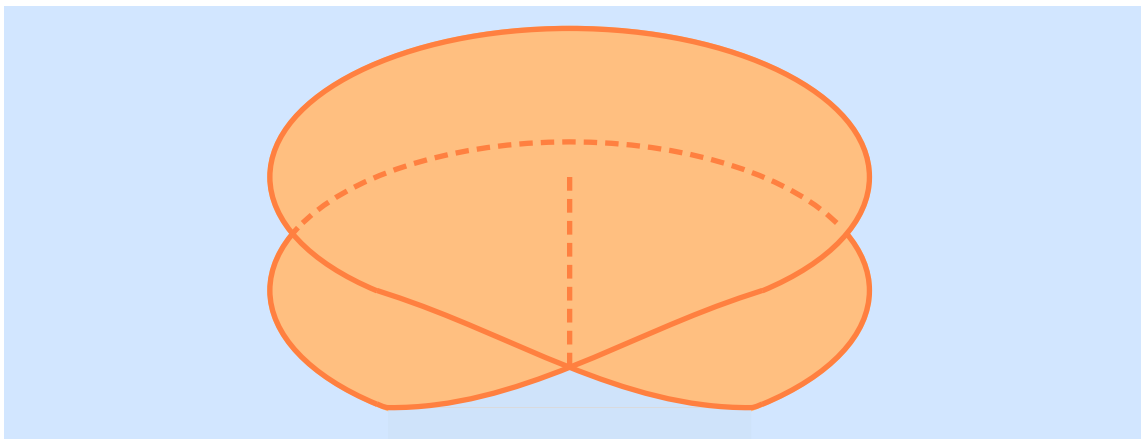
ii) Für $n > 1$ betrachten wir die Menge

$$\tilde{\Gamma} := \{(\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^2 \mid \zeta = \xi^n\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Die Menge

$$\Gamma := \tilde{\Gamma} \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$$

ist der Graph der mehrdeutigen n -ten Wurzelfunktion. Für $n = 2$ ergibt sich das folgende Bild:



Die Überschneidung ist dabei ein Artefakt der Abbildung im \mathbb{R}^3 eines Objekts im vierdimensionalen Raum.

II.7.7 Übung. Zeichnen Sie in Abbildung II.1 den Graphen des Hauptzweigs des Arguments ein.

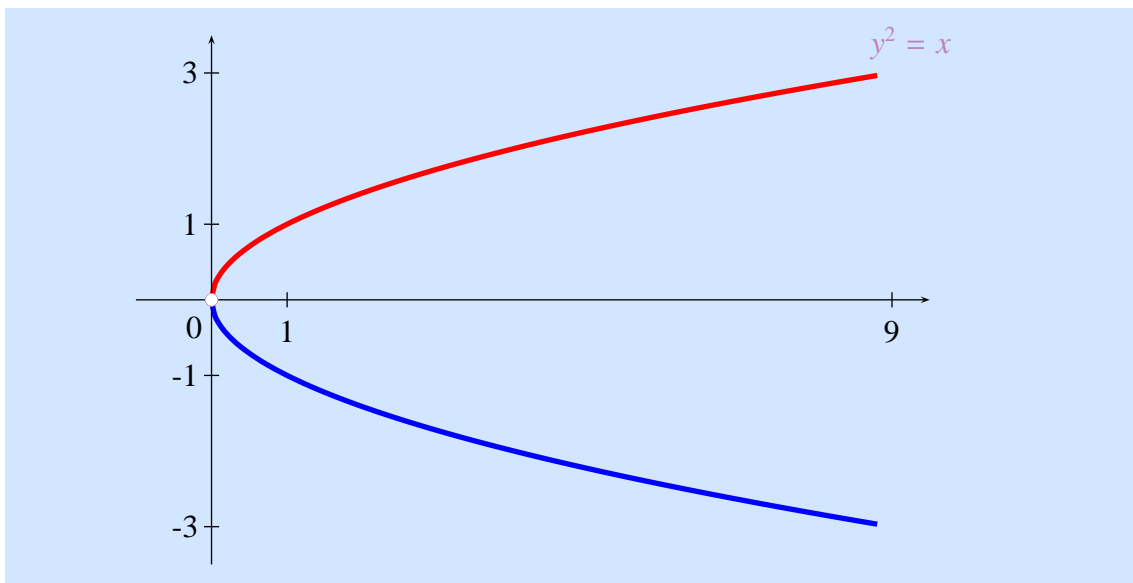
II.7.8 Bemerkung. Warum beobachten wir diese Phänomene nicht für reelle Funktionen einer Variablen? Als motivierendes Beispiel betrachten wir die Wurzelfunktion. Auch hier können wir

$$\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\} \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\Gamma_{\mathbb{R}} := \tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}} \cap (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$$

betrachten. Dabei zerfällt $\Gamma_{\mathbb{R}}$ in zwei disjunkte Teile, die unter der Projektion $\Gamma_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils bijektiv auf das offene Intervall $(0, \infty)$ abgebildet werden, und wir können einen dieser Teile als Graph einer Funktion im üblichen Sinne wählen.



Der Graph Γ aus Beispiel II.7.6, ii), ist **zusammenhängend**. Er kann nur „mit Gewalt“ in zwei Teile zerschnitten werden, von denen sich jeder bijektiv auf \mathbb{C}^* abbildet.

Die richtige Formalisierung und Erklärung geschieht in der **Topologie** ([9], Kapitel 6-8): Wir haben

$$\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \sqcup (0, \infty).$$

Das Intervall $(0, \infty)$ ist **zusammenziehbar**, d.h. es lässt sich stetig in einen Punkt deformieren. Aus diesem Grund hat $(0, \infty)$ keine interessanten **Überlagerungen** und auch keine **topologisch interessanten** Funktionsgraphen. Die topologischen Räume S^1 und \mathbb{C}^* sind nicht zusammenziehbar. Sie haben die **Fundamentalgruppe** \mathbb{Z} . Deshalb gibt es interessante Überlagerungen, die wir als Graphen interessanter mehrwertiger Funktionen ansehen können. Abbildung II.1 zeigt z.B. die **universelle Überlagerung** von S^1 .

II.7.9 Aufgaben (Logarithmus und Potenzen). i) Es sei

$$\begin{aligned} \text{Log}: \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \text{Log}(z) \end{aligned}$$

der Hauptzweig des Logarithmus. Geben Sie eine Formel für

$$\text{Log}(w \cdot z), \quad w, z \in \mathbb{C}^*,$$

an. Unter welchen Bedingungen an w und z aus \mathbb{C}^* gilt folglich

$$\text{Log}(w \cdot z) = \text{Log}(w) + \text{Log}(z)?$$

Geben Sie Beispiele für w und z aus \mathbb{C}^* an, für die diese Gleichung verletzt ist.

ii) Th. Clausen¹³ stellt in Band 2 des Journals für die reine und angewandte Mathematik¹⁴ aus dem Jahr 1827 auf Seite 286f folgende Aufgabe:

¹³Thomas Clausen (1801- 1885), dänischer Astronom und Mathematiker.

¹⁴Diese Zeitschrift ist die älteste noch erscheinende mathematische Zeitschrift und genießt heute noch hohes Ansehen. Die „antiken“ Bände dieser Zeitschrift können bei <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/> angesehen werden.

“Wenn e die Basis der hyperbolischen Logarithmen, π den halben Kreisumfang, und n eine positive oder negative ganze Zahl bedeuten, so ist bekanntlich $e^{2n\pi\sqrt{-1}} = 1$, $e^{1+2n\pi\sqrt{-1}} = e$; folglich auch $e^{(1+2n\pi\sqrt{-1})^2} = e = e^{1+4n\pi\sqrt{-1}-4n^2\pi^2}$. Da aber $e^{1+4n\pi\sqrt{-1}} = e$ ist, so würde daraus folgen: $e^{-4n^2\pi^2} = 1$, welches absurd ist. Nachzuweisen, wo in der Herleitung dieses Resultats gefehlt ist.”

Lösen Sie diese Aufgabe. Welches Gesetz für die Exponentialfunktion wurde fälschlicherweise angewendet und kann daher nicht gelten?

III

Holomorphe Funktionen

Im letzten Kapitel haben wir uns davon überzeugt, dass die Grenzwertrechnung für den Körper der komplexen Zahlen zusammen mit seinem Absolutbetrag ähnlich funktioniert wie für den Körper der reellen Zahlen mit seinem Absolutbetrag. Daher können wir die Definitionen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit aus der Analysis I für komplexwertige Funktionen, die auf einer Teilmenge der komplexen Ebene definiert sind, übernehmen. Allgemeiner lassen sich Stetigkeit und Differenzierbarkeit so auf jedem **normierten Körper** erklären. Die Gesetzmäßigkeiten für Stetigkeit und Differenzierbarkeit, die nur auf den Grenzwertsätzen beruhen, übertragen sich unmittelbar samt Beweisen auf die komplexe Situation.

Komplexwertige Funktionen, die auf einer **offenen** Teilmenge von \mathbb{C} definiert sind und in jedem Punkt dieser offenen Menge differenzierbar sind, werden **holomorph** genannt. Die algebraische Struktur der komplexen Zahlen schlägt sich in der Theorie der holomorphen Funktionen nieder und sorgt dafür, dass sich diese sehr von der Theorie der reell differenzierbaren Funktionen unterscheidet. Um dies zu präzisieren, vergleichen wir den Begriff der Holomorphie mit dem der reellen Differenzierbarkeit von Abbildungen von offenen Teilmengen von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 . Es stellt sich heraus, dass holomorphe Funktionen als diejenigen reell differenzierbaren Funktionen gekennzeichnet werden können, die den **Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen** genügen. Daraus kann man bereits wichtige Informationen über holomorphe Funktionen gewinnen.

Weiter werden wir die **Möbiustransformationen** als Beispiele für holomorphe Funktionen von einem geometrischen Standpunkt genauer inspizieren.

III.1 Stetigkeit

III.1.1 Definitionen. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $a \in D$.

i) Die Funktion f ist *stetig* in $a \in D$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a).$$

für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen mit $z_n \in D$, $n \in \mathbb{N}$, und $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ gilt.

ii) Die Funktion f ist *stetig*, wenn sie in jedem Punkt $b \in D$ stetig ist.

III.1.2 Bemerkung. Die Funktion f ist genau dann stetig in a , wenn sie das **ε - δ -Kriterium**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D : |z - a| < \delta \implies |f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

erfüllt (vgl. [13], Satz 3.4.8; [14], Satz 3.3.1).

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz II.1.3) ergeben sich folgende

III.1.3 Eigenschaften. i) Seien $D \subset \mathbb{C}$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Funktionen, $a \in D$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Wenn f und g stetig in a sind, dann sind auch folgende Funktionen stetig in a :

$$\begin{aligned} f + g: D &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) + g(z), \\ \lambda \cdot f: D &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \lambda \cdot f(z), \\ f \cdot g: D &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) \cdot g(z). \end{aligned}$$

ii) Seien $D \subset \mathbb{C}$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $a \in D$. Wenn $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$ gilt und f in a stetig ist, dann ist auch die Funktion

$$\begin{aligned} \frac{1}{f}: D &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{f(z)} \end{aligned}$$

stetig in a .

iii) Seien $D \subset \mathbb{C}$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, $a \in D$ und

$$\begin{aligned} \varphi: D &\rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \\ z &\mapsto \operatorname{Re}(f(z)), \\ \psi: D &\rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \\ z &\mapsto \operatorname{Im}(f(z)). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\forall z \in D : f(z) = \varphi(z) + \psi(z) \cdot i,$$

und f ist genau dann stetig in a , wenn φ und ψ stetig in a sind.

Ferner gilt:

III.1.4 Lemma. Es seien $D, D' \subset \mathbb{C}$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $g: D' \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen und $a \in D$, so dass

$$f(D) \subset D'.$$

Wenn f in a und g in $f(a)$ stetig sind, dann ist $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in a .

III.1.5 Beispiele. i) Die Betragsfunktion

$$\begin{aligned} |\cdot|: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto |z| \end{aligned}$$

ist stetig. In der Tat gilt

$$\forall z \in \mathbb{C}: |z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2},$$

so dass f als Verkettung stetiger Funktionen stetig ist.

ii) Für $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ist die **polynomiale Funktion**

$$\begin{aligned} p: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_n \cdot z^n \end{aligned}$$

stetig.

iii) Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig. Für $z = a + b \cdot i$ gilt

$$\exp(a + b \cdot i) = \exp(a) \cdot (\cos(b) + i \cdot \sin(b)).$$

Damit finden wir

$$\forall z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(\exp(z)) = \exp(a) \cdot \cos(b) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\exp(z)) = \exp(a) \cdot \sin(b).$$

Folglich sind der Real- und Imaginärteil von \exp stetig. Nach Eigenschaft III.1.3, iii), ist \exp stetig.

iv) Die Funktionen $\sin, \cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind stetig. Das folgt aus den Eulerformeln (Satz II.5.6)

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{1}{2i} \cdot (\exp(iz) - \exp(-iz)) \\ \cos(z) &= \frac{1}{2} \cdot (\exp(iz) + \exp(-iz)), \end{aligned}$$

Eigenschaft III.1.3 und Lemma III.1.4.

III.1.6 Aufgabe (Hauptzweig des Arguments und des Logarithmus). Es seien

$$\operatorname{Arg}: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

bzw.

$$\operatorname{Log}: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

der Hauptzweig des Arguments bzw. des Logarithmus. In welchen Punkten sind diese Funktionen stetig?

III.1.7 Aufgaben (Logarithmus und Wurzel). i) Zeigen Sie, dass es keine **stetige** Funktion

$$l: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $\exp(l(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ geben kann. (**Hinweis.** Vergleichen Sie l mit dem Hauptzweig des Logarithmus.)

ii) Beweisen Sie auch, dass es keine stetige Funktion

$$f: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

mit $(f(z))^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ gibt.

Umkehrfunktionen

Es seien $D \subset \mathbb{C}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine **injektive** Abbildung. Dann gibt es genau eine Funktion

$$f^{-1}: f(D) \rightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$\forall z \in D: f^{-1}(f(z)) = z \quad \text{und} \quad \forall w \in f(D): f(f^{-1}(w)) = w.$$

III.1.8 Definition. Die Funktion f^{-1} ist die *Umkehrfunktion* von f .

III.1.9 Warnung. Wenn die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und injektiv ist, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(D) \rightarrow \mathbb{C}$ **nicht zwangsläufig** stetig.

III.1.10 Beispiele. i) Wir betrachten den Hauptzweig des Arguments (Definition I.5.7)

$$\text{Arg}: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$$

auf $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Lemma. Die Funktion Arg ist in $(-1) \in S^1$ **nicht** stetig.

Beweis. Es gilt $\text{Arg}(-1) = \pi$. Wir verwenden die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$z_n := \exp\left(\left(-\pi + \frac{1}{n}\right) \cdot i\right), \quad n \geq 1.$$

Offenbar haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\pi + \frac{1}{n} = -\pi,$$

so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \exp(-\pi \cdot i) = -1.$$

Weiter gilt

$$\text{Arg}\left(\exp\left(\left(-\pi + \frac{1}{n}\right) \cdot i\right)\right) = -\pi + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Schließlich ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arg}(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\pi + \frac{1}{n} = -\pi \neq \pi = \text{Arg}(-1).$$

Dies zeigt die Behauptung. □

ii) Der Hauptzweig des Logarithmus $\text{Log}: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ ist in keinem Punkt der negativen reellen Achse $\mathbb{R}_{<0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ stetig. In der Tat gilt

$$\text{Log}(z) = \ln(|z|) + i \cdot \text{Arg}\left(\frac{z}{|z|}\right)$$

für $z \in \mathbb{C}^*$. Damit leiten wir das Ergebnis aus Teil i) ab.

III.2 Einige Begriffe aus der Topologie

Wir betrachten den Vektorraum \mathbb{R}^n mit der **euklidischen Norm**

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \end{aligned}$$

Dies enthält den Spezialfall \mathbb{C} mit dem Betrag $|\cdot|$ (Bemerkung I.4.6).

III.2.1 Definition. i) Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ ist

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$$

der *offene Ball* mit *Mittelpunkt* a vom *Radius* r .

ii) Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, wenn es zu jedem Punkt $a \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B(a, \varepsilon) \subset U$.

iii) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist *abgeschlossen*, wenn $U = \mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

III.2.2 Lemma. Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

i) A ist abgeschlossen.

ii) Für jede **konvergente** Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^n mit $z_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in A.$$

Beweis. [14], Satz 2.1.4. □

III.2.3 Definition. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *kompakt*, wenn es für jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen $U_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$, mit

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

eine **endliche** Teilmenge $I_0 \subset I$ mit

$$A \subset \bigcup_{i \in I_0} U_i$$

gibt.

III.2.4 Satz. Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

i) A ist kompakt.

ii) A ist abgeschlossen und beschränkt.

iii) Jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, besitzt eine konvergente Teilfolge, d.h. es gibt eine Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von **natürlichen** Zahlen mit $k_n < k_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass die Folge $(z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und ihr Grenzwert in A liegt.

Beweis. [14], Satz 2.2.12 und Satz 2.2.14. □

III.2.5 Satz. Es seien $A \subset \mathbb{R}^m$ eine kompakte Teilmenge und $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung.¹ Dann ist $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ ebenfalls kompakt.

Beweis. [14], Satz 3.4.1. □

III.2.6 Folgerung. Es seien $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f ein Minimum und ein Maximum an.

Beweis. [14], Folgerung 3.4.2. □

III.2.7 Beispiel. Der Hauptzweig $\text{Arg}: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ ist nicht stetig: Das Bild von A ist das **nichtkompakte** Intervall $(-\pi, \pi]$.

III.2.8 Folgerung. Es seien $A \subset \mathbb{R}^m$ eine kompakte Teilmenge und $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige und injektive Abbildung. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(A) \rightarrow \mathbb{R}^m$ auch stetig.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für jede offene Teilmenge $U \subset A$ das Urbild $(f^{-1})^{-1}(U)$ von U unter der Umkehrabbildung f^{-1} offen ist ([14], Aufgabe A.4.1). Jetzt gilt aber

$$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U).$$

Das Komplement von $f(U)$ in $f(A)$ ist $f(A \setminus U)$. Da $A \setminus U$ abgeschlossen und als Teilmenge der kompakten Menge A damit kompakt ist ([14], Satz 2.2.11), ist $f(A \setminus U)$ nach Satz III.2.5 abgeschlossen. Folglich ist $f(U)$ offen. □

III.3 Differenzierbarkeit

III.3.1 Definition. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $a \in D$. Wir nennen a einen *Häufungspunkt* von D , wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : (D \setminus \{a\}) \cap B(a, \varepsilon) \neq \emptyset,$$

d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $z \in D$ mit $0 < |z - a| < \varepsilon$.

III.3.2 Beispiel. i) Wenn $U \subset \mathbb{C}$ offen ist, dann ist jeder Punkt $a \in U$ ein Häufungspunkt von U .

ii) Jeder Punkt $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist ein Häufungspunkt von \mathbb{R} .

III.3.3 Definitionen. i) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein **Häufungspunkt** und $g: D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir sagen, dass der *Grenzwert*

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z)$$

existiert, wenn es eine komplexe Zahl $l \in \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = l$$

für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n \in D \setminus \{a\}$, $n \in \mathbb{N}$, und² $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ gilt.

Schreibweise. $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = l$.

ii) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $a \in D$. Die Funktion f ist in a (*komplex*) *differenzierbar*, wenn gilt:

¹Stetigkeit wird wie in Definition III.1.1 definiert (s. [14], Definition 3.1.1).

²Diese Bedingung kann man nur formulieren, wenn a ein Häufungspunkt von D ist.

- ★ a ist ein Häufungspunkt von D ,
- ★ $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ existiert.

Schreibweise $f'(a) := \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$.

Die Zahl $f'(a)$ ist die *Ableitung* von f in a .

III.3.4 Bemerkungen. i) Die obige Bedingung der komplexen Differenzierbarkeit in einem Punkt $a \in A$ benötigt die Körperstruktur der komplexen Zahlen \mathbb{C} : Es muss durch $z - a$ geteilt werden. Für $D \subset \mathbb{C}$, eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und $a \in D$ haben wir zwei Differenzierbarkeitsbegriffe, und zwar den der reellen Differenzierbarkeit einer Abbildung von einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ nach \mathbb{R}^2 ([14], Definition 6.1.1) und den der komplexen Differenzierbarkeit aus Definition III.3.3. Der erste bedeutet, dass f in a durch eine \mathbb{R} -lineare Abbildung approximiert werden kann, der zweite, dass f durch eine \mathbb{C} -lineare Abbildung angenähert werden kann. In Abschnitt I.7 haben wir die \mathbb{C} -linearen Abbildungen unter den \mathbb{R} -linearen charakterisiert. Diese Charakterisierung zeigt, dass komplexe Differenzierbarkeit wesentlich restriktiver ist als reelle Differenzierbarkeit (s. Beispiel III.3.5, iii).

ii) Die Definition der Differenzierbarkeit macht in jedem normierten Körper Sinn. Neben $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sind die Körper $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ der **p -adischen Zahlen**, p eine Primzahl, wichtige Beispiele für normierte Körper. Elemente der Analysis für diese Körper werden in [7] vorgestellt.

III.3.5 Beispiele. i) Es seien $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \lambda$, die zugehörige **konstante Funktion**. Diese Funktion ist in jedem Punkt $a \in \mathbb{C}$ differenzierbar mit Ableitung 0. In der Tat gilt $(f(z) - f(a))/(z - a) = (\lambda - \lambda)/(z - a) = 0$ für jeden Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

ii) Die **identische Abbildung** $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z$, ist in jedem Punkt $a \in \mathbb{C}$ differenzierbar mit Ableitung 1. Das ergibt sich aus der Tatsache, dass $(f(z) - f(a))/(z - a) = (z - a)/(z - a) = 1$ für jeden Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ gilt.

iii) Die komplexe Konjugation $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, ist in **keinem** Punkt $a \in \mathbb{C}$ differenzierbar. Dazu betrachten wir die Differenzenquotienten für die beiden Folgen

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} \quad \text{und} \quad \left(a + \frac{i}{n}\right)_{n \geq 1},$$

die gegen a konvergieren. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(a + \frac{i}{n}\right) - f(a)}{\frac{i}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{i}{n}}{\frac{i}{n}} = -1. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis mag auf den ersten Blick überraschend wirken, zumal die komplexe Konjugation, als Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 aufgefasst, unendlich oft differenzierbar ist (d.h. k -mal stetig differenzierbar im Sinne von [14], Bemerkung 10.2.4, für jedes $k \in \mathbb{N}$).

An dieser Stelle manifestiert sich zum ersten Mal der Körper \mathbb{C} . Wir erkennen die reell zweidimensionale Struktur: Wir nähern uns einmal in Richtung der reellen und einmal in Richtung der imaginären Achse an den Punkt a an. Die algebraische Struktur von \mathbb{C} liefert verschiedene Werte für diese **Richtungsableitungen**. Wir werden später die genauen Verträglichkeitsbedingungen für die partiellen Ableitungen, die Differenzierbarkeit fordert, als **Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen** festhalten.

III.3.6 Aufgaben (Komplexe Differenzierbarkeit). i) Es sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, die in jedem Punkt komplex differenzierbar ist. Ferner gelte $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

ii) Es seien $D \subset \mathbb{R}(!)$ und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. Wir schreiben $f(x) = u(x) + v(x) \cdot i$ mit $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f in einem Punkt $a \in D$ genau dann (komplex) differenzierbar ist, wenn u und v in a (reell) differenzierbar sind.

III.3.7 Lemma. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion und $a \in D$ ein Häufungspunkt. Wenn f in a differenzierbar ist, dann ist f in a auch stetig.*

Beweis. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Entweder gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $z_n = a$ für alle $n \geq n_0$ oder die Folgenglieder, die sich von a unterscheiden, bilden eine Teilfolge $(z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ (im Sinne von [13], Definition 2.3.6). Im ersten Fall gilt offenbar $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a)$. Im zweiten Fall haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_{k_n}) = f(a).$$

Daher dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : z_n \neq a.$$

Unter dieser Voraussetzung haben wir

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(z_n) = \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} \cdot (z_n - a) + f(a),$$

so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f'(a) \cdot (a - a) + f(a) = f(a).$$

Damit ist die Stetigkeitsbedingung aus Definition III.1.1 erfüllt. □

Ableitungsregeln

III.3.8 Satz. *Gegeben seien eine Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$, Funktionen $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$, ein Häufungspunkt $a \in D$ sowie eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$.*

i) *Wenn f in a differenzierbar ist, dann ist auch die Funktion $\lambda \cdot f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \lambda \cdot f(z)$, in a differenzierbar mit*

$$(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a).$$

ii) *Sind f und g in a differenzierbar, dann ist auch die Funktion $f + g: D \rightarrow \mathbb{C}$ in a differenzierbar und hat die Ableitung*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

iii) Falls f und g in a differenzierbar sind, dann ist auch $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{C}$ in a differenzierbar mit Ableitung

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

iv) Gilt $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$ und ist f in a differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$, so ist die Funktion $1/f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/f(z)$, in a differenzierbar und hat die Ableitung

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$

Beweis. Teil i) und ii) folgen unmittelbar aus den Grenzwertsätzen II.1.3. Für Teil iii) schreiben wir

$$f(z) \cdot g(z) - f(a) \cdot g(a) = f(z) \cdot g(z) - f(a) \cdot g(z) + f(a) \cdot g(z) - f(a) \cdot g(a), \quad z \in D.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) \cdot g(z) - f(a) \cdot g(a)}{z - a} &= \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{(f(z) - f(a)) \cdot g(z)}{z - a} + \frac{f(a) \cdot (g(z) - g(a))}{z - a} \right) \\ &= \left(\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right) \cdot \lim_{z \rightarrow a} g(z) + f(a) \cdot \left(\lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} \right) \\ &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a). \end{aligned}$$

Neben der Differenzierbarkeit von f und g in a haben wir bei der letzten Umformung verwendet, dass g in a stetig ist (Lemma III.3.7).

iv) Für $z \in D$ haben wir

$$\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{f(a) - f(z)}{f(z) \cdot f(a)}$$

und schließen

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(a)}}{z - a} = \left(\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z) \cdot f(a)} \right) \cdot \left(\lim_{z \rightarrow a} -\frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right) = \frac{1}{f^2(a)} \cdot (-f'(a)).$$

Dabei geht wieder ein, dass f an der Stelle a auch stetig ist (Lemma III.3.7). □

III.3.9 Satz (Kettenregel). *Es seien $D, E \subset \mathbb{C}$ Teilmengen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $g: E \rightarrow \mathbb{C}$ komplexwertige Funktionen und $a \in D$ ein Häufungspunkt. Wenn $f(D) \subset E$ gilt, f in a und g in $f(a)$ differenzierbar sind, dann ist $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{C}$ in a differenzierbar und hat dort die Ableitung*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a)).$$

Beweis. Wir erklären die Hilfsfunktion

$$r: E \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \begin{cases} \frac{g(z) - g(f(a))}{z - f(a)}, & \text{falls } z \neq f(a) \\ g'(f(a)), & \text{falls } z = f(a) \end{cases}.$$

Sie hat folgende Eigenschaften:

★ Die Funktion r ist in $f(a)$ stetig.

★ $\forall z \in E: g(z) - g(f(a)) = r(z) \cdot (z - f(a))$.

Daraus resultiert

$$\frac{g(f(z)) - g(f(a))}{z - a} = \frac{r(f(z)) \cdot (f(z) - f(a))}{z - a}, \quad z \in D \setminus \{a\},$$

und

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{g(f(z)) - g(f(a))}{z - a} = \left(\lim_{z \rightarrow a} r(f(z)) \right) \cdot f'(a) = r(f(a)) \cdot f'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a)).$$

Dies ist die Kettenregel. □

Holomorphe Funktionen

III.3.10 Definition. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine **offene** Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion und $a \in U$.

i) Wir nennen f *holomorph*, wenn f in jedem Punkt $b \in U$ differenzierbar ist.

ii) Die Funktion f ist *holomorph in a* , wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass die Einschränkung $f|_{B(a,\varepsilon)}: B(a,\varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z)$, holomorph ist.

III.3.11 Beispiele. i) Es seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Die zugehörige **polynomiale Funktion**

$$\begin{aligned} p: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_n \cdot z^n \end{aligned}$$

ist holomorph. Dies folgt aus den Ableitungsregeln III.3.8 und Beispiel III.3.5, i) und ii). Für die Ableitung gilt

$$\forall z \in \mathbb{C}: \quad p'(z) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot z + \dots + n \cdot a_n \cdot z^{n-1}.$$

ii) Es seien $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, so dass $b_j \neq 0$ für mindestens ein $j \in \{0, \dots, n\}$. Wir definieren

$$U := \{z \in \mathbb{C} \mid b_0 + b_1 \cdot z + \dots + b_n \cdot z^n \neq 0\}.$$

(Das Komplement $\mathbb{C} \setminus U$ besteht aus höchstens n Punkten.) Die **rationale Funktion**

$$\begin{aligned} \frac{p}{q}: U &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_m \cdot z^m}{b_0 + b_1 \cdot z + \dots + b_n \cdot z^n} \end{aligned}$$

ist holomorph.

III.3.12 Aufgabe. Es sei

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = x + y \cdot i &\longmapsto x^3 \cdot y^2 + x^2 \cdot y^3 \cdot i. \end{aligned}$$

Weisen Sie nach, dass f genau dann in $a \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, wenn $a \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \cdot i$ gilt. Gibt es eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$, so dass $f|_U$ holomorph ist?

Potenzreihen

In diesem Abschnitt weisen wir nach, dass eine Potenzreihe auf der offenen Kreisscheibe, die durch ihren Konvergenzradius bestimmt ist, eine holomorphe Funktion definiert. Es seien also $c \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - c)^k$$

die entsprechende formale Potenzreihe mit Entwicklungspunkt c . Die Reihe habe den Konvergenzradius $\varrho \geq 0$.

III.3.13 Satz. *Es sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge mit*

$$b_n := (n + 1) \cdot a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die formale Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot (z - c)^k$$

hat ebenfalls den Konvergenzradius ϱ .

Beweis. Es sei ϱ' der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot (z - c)^k$. Nach dem Satz von Cauchy–Hadamard II.3.16 gilt

$$\frac{1}{\varrho'} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n+1} \cdot \sqrt[n]{|a_{n+1}|} \right).$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \ln(n+1)\right) = 1,$$

weil

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0.$$

Da weiter $\sqrt[n]{n+1} > 0$, $n \geq 1$, haben wir

$$\frac{1}{\varrho'} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|}.$$

Man beachte, dass ϱ' der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \cdot (z - c)^k$$

ist. Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z - c| < \varrho'$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k \cdot (z - c)^k = a_0 + (z - c) \cdot \sum_{k=0}^n a_{k+1} \cdot (z - c)^k.$$

Wir schließen, dass die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - c)^k$ konvergiert und deshalb $\varrho' \leq \varrho$ gilt.

Jetzt sei umgekehrt $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $0 < |z - c| < \varrho$. Für $n \in \mathbb{N}$ finden wir

$$\sum_{k=0}^n a_{k+1} \cdot (z - c)^k = \frac{1}{z - c} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k \cdot (z - c)^k - a_0 \right).$$

Wir folgern die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \cdot (z - c)^k$ und $\varrho' \geq \varrho$. Insgesamt haben wir die postulierte Gleichheit $\varrho' = \varrho$ bewiesen. \square

III.3.14 Satz. *In der obigen Situation sei*

$$\begin{aligned} f: B(c, \varrho) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - c)^k. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist holomorph, und es gilt

$$\forall z \in B(c, \varrho) : f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (z - c)^{k-1}.$$

Insbesondere ist die Funktion

$$\begin{aligned} f': B(c, \varrho) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f'(z) \end{aligned}$$

holomorph.

Die Ableitungsregel für Polynome (Beispiel III.3.11, i) überträgt sich also auf durch Potenzreihen definierte Funktionen. Eine solche Funktion ist punktweiser Grenzwert einer Folge polynomialer Funktionen. Der obige Satz macht somit eine Aussage über die Vertauschbarkeit zweier Grenzprozesse, und zwar desjenigen, der bei der Bildung von f verwendet wird, und desjenigen, der in der Definition der Ableitung steckt.

Beweis von Satz III.3.14. Mit der Kettenregel (Satz III.3.9), angewandt auf $\varphi: B(0, \varrho) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$, und $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z - c$, überprüfen wir, dass es genügt, die Aussage für $c = 0$ zu beweisen.

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\begin{aligned} s_n(z) &:= \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k, \\ r_n(z) &:= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cdot z^k. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz III.3.13 erklären wir

$$\begin{aligned} g: B(0, \varrho) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot z^{k-1}. \end{aligned}$$

Es ist nun Folgendes zu verifizieren: Für einen Punkt $w \in B(0, \varrho)$, eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ mit

$$|w| < r < \varrho$$

und eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $B(0, r) \setminus \{w\}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(w)}{z_n - w} = g(w).$$

Dazu schreiben wir

$$\frac{f(z_n) - f(w)}{z_n - w} - g(w) = \left(\frac{s_m(z_n) - s_m(w)}{z_n - w} - s'_m(w) \right) + (s'_m(w) - g(w)) + \left(\frac{r_m(z_n) - r_m(w)}{z_n - w} \right) \quad (\text{III.1})$$

für $m, n \in \mathbb{N}$ und geben uns eine positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ vor.

Zunächst bemerken wir, dass der zweite Summand nicht von $n \in \mathbb{N}$ abhängt. Da die Folge $(s'_m(w))_{m \in \mathbb{N}}$ gegen $g(w)$ konvergiert, können wir einen Index $m_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$\forall m \geq m_0 : |s'_m(w) - g(w)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Der entscheidende Schritt besteht nun darin, den letzten Term **unabhängig von n** abzuschätzen. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann haben wir

$$\frac{r_m(z_n) - r_m(w)}{z_n - w} = \frac{1}{z_n - w} \cdot \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \cdot (z_n^k - w^k) = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \cdot \frac{z_n^k - w^k}{z_n - w}.$$

Für $k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \frac{z_n^k - w^k}{z_n - w} \right| = |z_n^{k-1} + z_n^{k-2} \cdot w + \dots + z_n \cdot w^{k-2} + w^{k-1}| \leq k \cdot r^{k-1}$$

wegen $|w| < r$ und $|z_n| < r$. Daher

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : \left| \frac{r_m(z_n) - r_m(w)}{z_n - w} \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} k \cdot |a_k| \cdot r^{k-1}.$$

Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert gegen Null, denn wegen $r < \varrho$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot r^{k-1}$ nach dem abelschen Konvergenzlemma II.3.7 absolut. Deshalb können wir $m_1 \geq m_0$ so wählen, dass

$$\forall m \geq m_1 \forall n \in \mathbb{N} : \left| \frac{r_m(z_n) - r_m(w)}{z_n - w} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Diese Abschätzung ist in der Tat unabhängig von $n \in \mathbb{N}$.

Jetzt fixieren wir eine natürliche Zahl $M \geq m_1$. Die polynomiale Funktion s_M ist holomorph (Beispiel III.3.11, i). Es existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : \left| \frac{s_M(z_n) - s_M(w)}{z_n - w} - s'_M(w) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Gleichung (III.1) zeigt schließlich

$$\forall n \geq n_0 : \left| \frac{f(z_n) - f(w)}{z_n - w} - g(w) \right| < \varepsilon.$$

Damit ist der Beweis beendet. □

III.3.15 Folgerung. Die Funktionen

$$\exp, \sin, \cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

sind holomorph, und für die Ableitungen gilt:

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad \exp'(z) = \exp(z), \quad \sin'(z) = \cos(z), \quad \cos'(z) = -\sin(z).$$

Beweis. Die Holomorphie ergibt sich direkt aus Satz III.3.14, und die Ableitungen ermitteln wir durch gliedweise Differentiation der entsprechenden Potenzreihe. Es sei $z \in \mathbb{C}$.

Mit der Exponentialreihe (Definition II.4.2, i) berechnen wir

$$\exp'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} \cdot z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z).$$

Für die Sinusreihe aus Definition II.5.2, i), ergibt sich

$$\sin'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{2k+1}{(2k+1)!} \cdot z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos(z).$$

Für die in Definition II.5.2, ii), eingeführte Kosinusreihe finden wir schließlich

$$\cos'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{2k}{(2k)!} \cdot z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin(z).$$

Damit sind alle behaupteten Formeln für die Ableitungen überprüft. □

Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen

Wir inspizieren die folgende Lage: Es seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Teilmengen und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ und $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ komplexwertige Funktionen, so dass

- ★ $f(U) \subset V$,
- ★ $\forall z \in U : g(f(z)) = z$.

III.3.16 Satz. *Es sei $a \in U$ ein Punkt, so dass f in a stetig ist, g in $f(a)$ differenzierbar und $g'(f(a)) \neq 0$. Dann ist f in a differenzierbar mit Ableitung*

$$f'(a) = \frac{1}{g'(f(a))}.$$

Beweis. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $U \setminus \{a\}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a.$$

Wegen

$$g(f(z_n)) = z_n \neq a = g(f(a))$$

gilt auch

$$f(z_n) \neq f(a), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{III.2})$$

Die Folge $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ liegt somit in $V \setminus \{f(a)\}$. Auf Grund der vorausgesetzten Stetigkeit von f in a gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a).$$

Die Differenzierbarkeit von g in $f(a)$ liefert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n - a}{f(z_n) - f(a)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(z_n)) - g(f(a))}{f(z_n) - f(a)} = g'(f(a)).$$

Auf Grund von (III.2) und $g'(f(a)) \neq 0$ sind die Voraussetzungen von Satz II.1.3, iii), erfüllt, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} = \frac{1}{g'(f(a))}$$

folgt. □

Die Funktion

$$\text{Log}: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist stetig (Aufgabe III.1.6), und für die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\forall z \in \mathbb{C}: \quad \exp'(z) = \exp(z) \neq 0$$

nach Folgerung III.3.15 und II.4.4. Wir können Satz III.3.16 auf $U := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, $f := \text{Log}$, $V := \mathbb{C}$ und $g := \exp$ anwenden.

III.3.17 Folgerung. *Die Einschränkung*

$$\text{Log}: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

des Hauptzweigs des Logarithmus auf die offene Menge $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist holomorph.

Gebiete

III.3.18 Definitionen. i) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Ein Weg in D ist eine stetige Abbildung

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$\gamma([a, b]) \subset D.$$

Dabei sind $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $a < b$.

ii) Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg. Seine *Spur* ist die Teilmenge

$$\text{Spur}(\gamma) := \gamma([a, b]) = \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\} \subset \mathbb{C}.$$

iii) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ ist *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $w, z \in D$ einen Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ in D mit

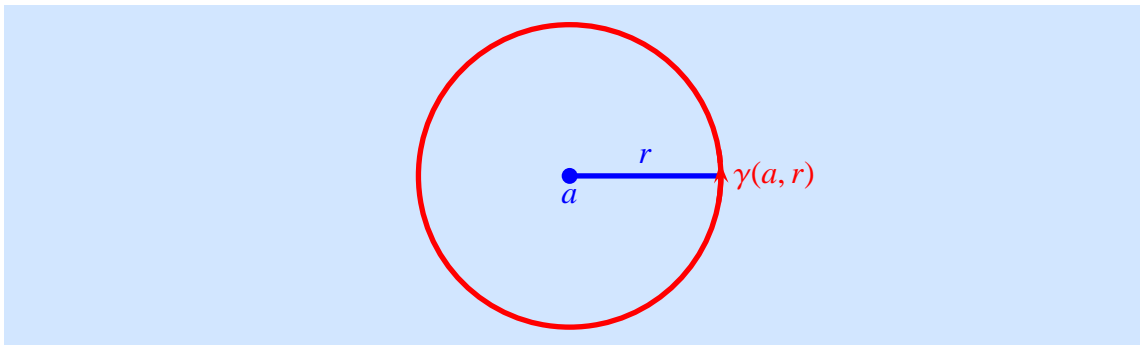
$$\gamma(a) = w \quad \text{und} \quad \gamma(b) = z$$

gibt.

iv) Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ darf sich *Gebiet* nennen, wenn sie nichtleer, offen und wegzusammenhängend ist.

III.3.19 Beispiel (Kreiswege). Es seien $a \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und $r > 0$ ein Radius. Dazu definieren wir den **Kreisweg**

$$\begin{aligned} \gamma(a, r): [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto a + r \cdot \exp(i \cdot \varphi). \end{aligned}$$



III.3.20 Bemerkung. Wir werden in Definition IV.7.3 einen weiteren Zusammenhangsbegriff kennenlernen. Für Gebiete ist er äquivalent zum Wegzusammenhang (Folgerung IV.7.5 und Aufgabe IV.7.6).

Die folgende Aufgabe zeigt, dass jede offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ auf kanonische Weise als disjunkte Vereinigung von Gebieten geschrieben werden kann, d.h.

$$U = \bigsqcup_{i \in I} G_i, \quad G_i \subset \mathbb{C} \text{ ein Gebiet, } i \in I.$$

Die Indexmenge I ist dabei endlich oder abzählbar. Für eine komplexe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ und Indizes $i, j \in I$ mit $i \neq j$ ist das Verhalten von f auf G_i völlig unabhängig vom dem Verhalten auf G_j . Daher macht es beim Studium holomorpher Funktionen Sinn, sich auf Gebiete als Definitionsbereiche zu beschränken.

III.3.21 Aufgaben (Zusammenhangskomponenten). i) Zu zeigen: Es seien G und G' Gebiete in der komplexen Ebene. Dann ist $G \cup G'$ genau dann ein Gebiet, wenn $G \cap G' \neq \emptyset$.

ii) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine *Zusammenhangskomponente* von U ist eine zusammenhängende Teilmenge $V \subset U$, die maximal bzgl. Inklusion unter den zusammenhängenden Teilmengen von U ist, d.h. für $V \subset V' \subset U$ mit V' zusammenhängend gilt $V = V'$. Zeigen Sie:

1. Eine Zusammenhangskomponente von U ist offen.
2. Für zwei Zusammenhangskomponenten V, V' von U gilt $V = V'$ oder $V \cap V' = \emptyset$.
(Die Menge U ist also die disjunkte Vereinigung ihrer Zusammenhangskomponenten.)

iii) Weisen Sie nach, dass eine offene Teilmenge von \mathbb{C} höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten hat. Geben Sie ein Beispiel für eine offene Teilmenge von \mathbb{C} mit abzählbar unendlich vielen Zusammenhangskomponenten.

III.3.22 Aufgaben (Gebiete). i) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass es zu je zwei Punkten $w, z \in G$ einen **stückweise glatten** Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ mit $\gamma(a) = w$ und $\gamma(b) = z$ gibt.

ii) Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $z_1, \dots, z_m \in G$. Weisen Sie nach, dass auch

$$G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$$

ein Gebiet ist.

iii) Welche der folgenden Teilmengen von \mathbb{C} sind Gebiete? Begründen Sie Ihre Antwort und skizzieren Sie die jeweiligen Teilmengen.

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 3| < 1\}$.
2. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| < 3\}$.
3. $\{z \in \mathbb{C} \mid ||z^2| - 3| < 1\}$.
4. $\{z \in \mathbb{C} \mid z + |z| \neq 0\}$.
5. $A \setminus B, A := \left\{z = x + y \cdot i \in \mathbb{C} \mid (0 < x < 1) \wedge (0 < y < 1)\right\},$
 $B := \bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{z = x + y \cdot i \in \mathbb{C} \mid x = \frac{1}{n} \wedge 0 < y \leq \frac{1}{2}\right\}.$

Charakterisierung konstanter Funktionen

III.3.23 Satz. Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein **Gebiet** und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) Die Funktion f ist konstant.
- ii) Die Funktion f ist holomorph, und für alle $z \in G$ gilt $f'(z) = 0$.

III.3.24 Bemerkung. In der reellen Analysis kann man die entsprechende Aussage bequem aus dem Mittelwertsatz ableiten ([13], Folgerung 4.3.5 und 4.3.7). Der Mittelwertsatz gilt in der komplexen Analysis nicht. Man betrachte z.B. die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Hier gilt

$$\exp(0) = \exp(2\pi \cdot i) \quad \text{aber} \quad \forall z \in \mathbb{C} : \quad \exp'(z) = \exp(z) \neq 0.$$

Auf Grund dieser Bemerkung besteht die Strategie des obigen Beweises darin, sich auf die reelle Situation zurückzuziehen.

Beweis von III.3.23. Wir fixieren einen Punkt $u_0 \in G$ und müssen zeigen, dass

$$f(v) = f(u_0)$$

für jeden anderen Punkt $v \in G$ gilt. Dazu wählen wir einen Weg

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

in G mit

$$\gamma(a) = u_0 \quad \text{und} \quad \gamma(b) = v.$$

Die Funktion $f \circ \gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ist nun auf einem reellen Intervall definiert (vgl. Aufgabe III.3.6, ii). Allerdings ist der Weg γ nur stetig, so dass wir nicht schließen können, dass $f \circ \gamma$ differenzierbar ist. Um das Argument zu beenden, müssen wir zeigen, dass wir γ differenzierbar wählen können. Dafür geben wir eine topologische Begründung (vgl. Aufgabe III.3.22, i).

Schritt 1. Die Menge $A := \mathbb{C} \setminus G$ ist abgeschlossen. Es sei

$$\begin{aligned} d(\cdot, A): \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \inf\{|z - a| \mid a \in A\} \end{aligned}$$

die Funktion, die den Abstand zu A misst. Sie ist stetig ([14], Lemma 3.3.3). Daher nimmt die stetige Funktion

$$\begin{aligned} [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto d(\gamma(t), A) \end{aligned}$$

auf dem kompakten Intervall ein positives Minimum δ an. Somit gilt

$$\text{Spur}(\gamma) \subset \bigcup_{t \in [a, b]} B(\gamma(t), \delta) \subset G.$$

Da $\text{Spur}(\gamma)$ nach Satz III.2.5 kompakt ist, können wir $n \in \mathbb{N}$ und Parameter $t_1, \dots, t_n \in [a, b]$ finden, so dass

$$\gamma([a, b]) \subset \bigcup_{i=1}^n B(\gamma(t_i), \delta).$$

Dabei können wir

$$B(\gamma(t_i), \delta) \cap B(\gamma(t_{i+1}), \delta) \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

voraussetzen.

Schritt 2. Nach Schritt 1 können wir uns auf den Fall $G = B(u_0, \delta)$ und

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto (1-t) \cdot u_0 + t \cdot v \end{aligned}$$

beschränken. Es sei

$$g := f \circ \gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Wir schreiben

$$g(t) = \varphi(t) + \psi(t) \cdot i \quad \text{mit} \quad \varphi(t) = \operatorname{Re}(g(t)), \quad \psi(t) = \operatorname{Im}(g(t)), \quad t \in [0, 1].$$

Für $s, t \in [0, 1]$ mit $s \neq t$ haben wir

$$\begin{aligned} \frac{g(t) - g(s)}{t - s} &= \frac{f((1-t) \cdot u_0 + t \cdot v) - f((1-s) \cdot u_0 + s \cdot v)}{(s-t) \cdot u_0 + (t-s) \cdot v} \cdot \frac{(s-t) \cdot u_0 + (t-s) \cdot v}{t-s} \\ &= \frac{f((1-t) \cdot u_0 + t \cdot v) - f((1-s) \cdot u_0 + s \cdot v)}{(s-t) \cdot u_0 + (t-s) \cdot v} \cdot (v - u_0). \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{g(t) - g(s)}{t - s} = f'((1-s) \cdot u_0 + s \cdot v) \cdot (v - u_0)$$

für $s \in [0, 1]$. Die Funktionen $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. $\varphi, \psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sind komplex bzw. reell differenzierbar, und es gilt

$$\varphi'(t) = 0 = \psi'(t), \quad t \in [0, 1].$$

Nach [13], Folgerung 4.3.7, sind φ und ψ und damit auch g konstant, und es ergibt sich

$$f(v) = g(1) = g(0) = f(u_0)$$

wie behauptet. □

III.4 Die Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt werden wir reelle und komplexe Differenzierbarkeit miteinander vergleichen und komplex differenzierbare Funktionen als reell differenzierbare Funktionen kennzeichnen, die gewisse Differentialgleichungen, die sogenannten **Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen**, erfüllen.

Wir betrachten dazu ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, eine komplexwertige Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ und $a \in G$, so dass f in a komplex differenzierbar ist. Wir schreiben

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y) \cdot i$$

mit

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z)) \quad \text{und} \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z)), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad z = x + y \cdot i \in G. \quad (\text{III.3})$$

III.4.1 Schreibweise. Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in G$ und $g: G \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Da G offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon): \quad a + t \in G \quad \text{und} \quad a + t \cdot i \in G.$$

Für eine komplexe Zahl l schreiben wir

$$\lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \rightarrow 0}} g(a + h) = l \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \rightarrow 0}} g(a + h \cdot i) = l,$$

wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(a + t_n) = l \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(a + t_n \cdot i) = l$$

für jede Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **reeller** Zahlen mit $a + t_n \in G$ bzw. $a + t_n \cdot i \in G$, $n \in \mathbb{N}$, gilt.

Die komplexe Differenzierbarkeit in $a = b + c \cdot i$, $b, c \in \mathbb{R}$, zeigt

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \rightarrow 0}} \frac{f((b+h) + c \cdot i) - f(b + c \cdot i)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \rightarrow 0}} \frac{u(b+h, c) - u(b, c)}{h} + i \cdot \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \rightarrow 0}} \frac{v(b+h, c) - v(b, c)}{h}, \\ f'(a) &= \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \rightarrow 0}} \frac{f(b + (c+h) \cdot i) - f(b + c \cdot i)}{i \cdot h} \\ &= \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \rightarrow 0}} \frac{u(b, c+h) - u(b, c)}{i \cdot h} + i \cdot \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \rightarrow 0}} \frac{v(b, c+h) - v(b, c)}{i \cdot h} \\ &= \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \rightarrow 0}} \frac{v(b, c+h) - v(b, c)}{h} - i \cdot \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \rightarrow 0}} \frac{u(b, c+h) - u(b, c)}{h}. \end{aligned}$$

Wir erkennen:

★ u und v sind in a partiell differenzierbar.

$$\star \frac{\partial u}{\partial x}(b, c) = \frac{\partial v}{\partial y}(b, c) \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y}(b, c) = -\frac{\partial v}{\partial x}(b, c).$$

III.4.2 Definition. Die Gleichungen in der zweiten Zeile heißen *Cauchy–Riemann³-Differentialgleichungen*.

Wir erinnern nun an einige Konzepte aus der Analysis reeller Funktionen mehrerer Veränderlicher, die wir auf eine Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, spezialisieren:

III.4.3 Erinnerungen. Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion und $a \in G$.

i) Wir sagen, dass f in $a \in G$ *reell differenzierbar* ist, wenn es eine **\mathbb{R} -lineare** Abbildung $T_a f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt,⁴ so dass

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{|f(z) - f(a) - T_a f(z - a)|}{|z - a|} = 0.$$

ii) Die lineare Abbildung $T_a f$ ist durch die in i) genannte Bedingung eindeutig bestimmt (s. [14], Bemerkung 6.1.2, i), oder 6.1.4, i). Sie ist das *Differential* von f in a .

iii) Die Funktion f ist genau dann in a reell differenzierbar, wenn es eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $T_a f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und eine Funktion $r: G \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, die in a stetig mit $r(a) = 0$ ist, so dass

$$\forall z \in G: \quad f(z) = f(a) + T_a f(z - a) + r(z) \cdot (z - a).$$

Man konsultiere dazu [14], Definition 6.1.1 und Bemerkung 6.1.2, iii).

³Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), deutscher Mathematiker.

⁴Auch hier benötigen wir, dass $G \subset \mathbb{C}$ eine **offene** Teilmenge ist: Wir benutzen die Tatsache, dass wir \mathbb{C} als **Tangentialraum** von G in a ansehen können (vgl. [14], Definition 11.4.1, b).

iv) Wir schreiben $f(z) = u(x, y) + v(x, y) \cdot i$ wie in (III.3). Bzgl. der \mathbb{R} -Basis $(1, i)$ von \mathbb{C} wird das Differential $T_a f$ durch die **Jacobimatrix**⁵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

dargestellt.

III.4.4 Satz. *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion und $a \in G$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) *Die Funktion f ist in a komplex differenzierbar.*

ii) *Die Funktion f ist in a reell differenzierbar, und das Differential $T_a f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist \mathbb{C} -linear.*

iii) *Die Funktion f ist in a reell differenzierbar, und in der Notation von Erinnerung III.4.3, iv), gilt*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(a) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a).$$

Beweis. „i) \implies ii)“. Wenn f in a komplex differenzierbar ist mit Ableitung $f'(a)$, dann gilt

$$0 = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a) - f'(a) \cdot (z - a)}{z - a}.$$

Dies zeigt, dass f in a reell differenzierbar ist mit Ableitung

$$\begin{aligned} T_a f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ w &\mapsto f'(a) \cdot w. \end{aligned}$$

Dies ist eine \mathbb{C} -lineare Abbildung.

„ii) \implies i)“. Wenn $T_a f$ \mathbb{C} -linear ist, dann gilt

$$\forall w \in \mathbb{C}: \quad T_a f(w) = w \cdot T_a f(1),$$

d.h. $T_a f$ ist die Multiplikation mit der komplexen Zahl $T_a f(1)$. Die Gleichung

$$0 = \lim_{z \rightarrow a} \frac{|f(z) - f(a) - T_a f(z - a)|}{|z - a|} = \lim_{z \rightarrow a} \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - T_a f(1) \right|$$

zeigt, dass f in a komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(a) = T_a f(1)$ ist.

„ii) \iff iii)“. Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann \mathbb{C} -linear, wenn

$$\forall w \in \mathbb{C}: \quad L(w) = w \cdot L(1),$$

d.h. wenn L die Multiplikation mit der komplexen Zahl $L(1)$ ist. Schreiben wir $L(1) = \alpha + \beta \cdot i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist diese Bedingung äquivalent dazu, dass L bzgl. der \mathbb{R} -Basis $(1, i)$ von \mathbb{C} durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

⁵Carl Gustav Jacob Jacobi (eigentlich Jacques Simon; 1804 - 1851), deutscher Mathematiker.

dargestellt wird. Wir wenden diese Überlegung auf T_{af} und die Jacobimatrix aus Bemerkung III.4.10 an. Sie zeigt somit, dass T_{af} genau dann \mathbb{C} -linear ist, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a)$$

gilt. □

In den folgenden Unterabschnitten werden wir die Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen mit Hilfe von Differentialoperatoren, die besser an die komplexen Variablen angepasst sind, umformulieren.

Über lineare Abbildungen

Es sei

$$L: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine \mathbb{R} -lineare Abbildung. Wir wollen diese lineare Abbildung auf zwei Weisen zerlegen. Die erste Zerlegung ergibt sich direkt aus der \mathbb{R} -Linearität:

III.4.5 Beobachtung. $\forall w \in \mathbb{C} : L(w) = L(1) \cdot \operatorname{Re}(w) + L(i) \cdot \operatorname{Im}(w)$.

III.4.6 Definition. Die \mathbb{R} -lineare Abbildung $L: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist **komplex antilinear**, wenn

$$\forall \lambda, w \in \mathbb{C} : L(\lambda \cdot w) = \bar{\lambda} \cdot L(w).$$

III.4.7 Bemerkung. Es sei $L: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine komplex antilineare Abbildung. Die Formel

$$\forall w \in \mathbb{C} : L(w) = \bar{w} \cdot L(1)$$

zeigt, dass L die komplexe Konjugation gefolgt von der Multiplikation mit der komplexen Zahl $L(1)$ ist.

Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $L: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ können wir in eine \mathbb{C} -lineare und eine komplex antilineare Abbildung zerlegen: Dazu schreiben wir mit Eigenschaft I.4.3, iii),

$$w = \frac{1}{2} \cdot (w + \bar{w}) + \frac{1}{2} \cdot (w - \bar{w}) = \frac{1}{2} \cdot (w + \bar{w}) - \left(\frac{i}{2} \cdot (w - \bar{w}) \right) \cdot i = \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) \cdot i, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Wir setzen dies in Beobachtung III.4.5 ein:

$$\begin{aligned} L(w) &= L(1) \cdot \operatorname{Re}(w) + L(i) \cdot \operatorname{Im}(w) \\ &= \frac{1}{2} \cdot L(1) \cdot (w + \bar{w}) - \frac{i}{2} \cdot L(i) \cdot (w - \bar{w}) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot (L(1) - i \cdot L(i)) \right) \cdot w + \left(\frac{1}{2} \cdot (L(1) + i \cdot L(i)) \right) \cdot \bar{w}, \quad w \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

III.4.8 Beobachtung. Für eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $L: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\forall w \in \mathbb{C} : L(w) = l_1 \cdot w + l_2 \cdot \bar{w}$$

mit

$$l_1 := \frac{1}{2} \cdot (L(1) - i \cdot L(i)) \quad \text{und} \quad l_2 := \frac{1}{2} \cdot (L(1) + i \cdot L(i)).$$

Anwendung auf differenzierbare Funktionen

Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion und $a \in G$. Wir nehmen an, dass f in a reell differenzierbar ist und schreiben $T_a f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ für das Differential von f in a .

III.4.9 Definition. Wir setzen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) := T_a f(1) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) := T_a f(i).$$

III.4.10 Bemerkung. Wir verwenden die Notation aus Erinnerung III.4.3, iv). Wie zuvor festgestellt wird die \mathbb{R} -lineare Abbildung $T_a f$ bzgl. der \mathbb{R} -Basis $(1, i)$ von \mathbb{C} durch die Jacobimatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

dargestellt. Wir schließen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + \frac{\partial v}{\partial x}(a) \cdot i \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial u}{\partial y}(a) + \frac{\partial v}{\partial y}(a) \cdot i.$$

III.4.11 Definition. Es seien l_1, l_2 die Zahlen aus Beobachtung III.4.8 für die \mathbb{R} -lineare Abbildung $T_a f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Man definiere

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) := l_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) := l_2.$$

III.4.12 Bemerkung. Mit der Definition von l_1 und l_2 in Beobachtung III.4.8 finden wir

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right).$$

Wir schreiben kurz

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

III.4.13 Definition. Die Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

werden *Wirtingerableitungen*⁶ genannt.

⁶Wilhelm Wirtinger (1865 - 1945), österreichischer Mathematiker.

Setzen wir weiter die Formeln aus Bemerkung III.4.12 für $\partial f/\partial z$ und $\partial f/\partial \bar{z}$ ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(a) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + \frac{\partial v}{\partial x}(a) \cdot i \right) - \frac{i}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}(a) + \frac{\partial v}{\partial y}(a) \cdot i \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + \frac{\partial v}{\partial y}(a) \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}(a) - \frac{\partial u}{\partial y}(a) \right) \cdot i \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + \frac{\partial v}{\partial x}(a) \cdot i \right) + \frac{i}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}(a) + \frac{\partial v}{\partial y}(a) \cdot i \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) - \frac{\partial v}{\partial y}(a) \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}(a) + \frac{\partial u}{\partial y}(a) \right) \cdot i. \end{aligned}$$

Daraus folgern wir:

III.4.14 Lemma. *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in G$ und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine in a reell differenzierbare komplexwertige Funktion. Die Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a)$$

sind äquivalent zu der Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0.$$

III.4.15 Aufgaben (Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen). i) Es sei

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Überprüfen Sie, dass f die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen in jedem Punkt $a \in \mathbb{C}$ erfüllt, in jedem Punkt $a \in \mathbb{C}^*$ komplex differenzierbar ist, jedoch in $0 \in \mathbb{C}$ **nicht** komplex differenzierbar ist.

ii) Man schreibe die folgenden Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ in der Form $u(z) + v(z) \cdot i$, $z \in \mathbb{C}$, mit $u, v: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ und entscheide, wo sie reell bzw. komplex differenzierbar sind.

a) $f(z) := z \cdot \bar{z}$, b) $f(z) := z \cdot \bar{z}^2$, c) $f(z) := \operatorname{Re}(z)$,

d) $f(z) := \sin(z)$, e) $f(z) := \cosh(z)$, f) $f(z) := z^3 + z$.

III.5 Konforme Abbildungen

In Abschnitt I.7 haben wir die komplexen Zahlen in der euklidischen Geometrie verankert. Diese Ergebnisse wollen wir nun verwenden, um eine weitere Charakterisierung gewisser holomorpher Funktionen anzugeben.

III.5.1 Definition. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine **offene** Teilmenge und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine **reell** differenzierbare Funktion.

i) Die Funktion f ist *lokal konform*, wenn das Differential $T_a f$ in jedem Punkt $a \in U$ orientierungs- und winkeltreu⁷ ist.

ii) Wir sagen, dass f *konform* ist, wenn f lokal konform und injektiv ist.

Lokale Konformität ist eine lokale Eigenschaft, d.h. sie kann in einer kleinen Umgebung eines Punkts überprüft werden. Dagegen ist Konformität, so wie Injektivität, eine globale Eigenschaft, d.h. wir müssen die Funktion auf dem ganzen Definitionsbereich kennen.

Die Diskussion in Abschnitt I.7 hat ergeben, dass eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann orientierungs- und winkeltreu ist, wenn sie die Multiplikation mit einer nichtverschwindenden komplexen Zahl $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ist. Es folgt:

III.5.2 Satz. *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) *Die Funktion f ist lokal konform.*

ii) *Die Funktion f ist holomorph, und für jeden Punkt $z \in U$ gilt $f'(z) \neq 0$.*

Geometrie holomorpher Abbildungen

Wenn eine Abbildung lokal konform ist, dann ist sie infinitesimal eine Drehstreckung. Dies kann man benutzen, um das lokale Verhalten zu verstehen. Wir wollen die Bedingung der lokalen Konformität noch auf geometrische Weise formulieren und ein Verfahren zur Veranschaulichung lokal konformer Abbildungen besprechen.

Wir betrachten einen Weg

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

und setzen

$$\varphi(t) := \operatorname{Re}(\gamma(t)) \quad \text{und} \quad \psi(t) := \operatorname{Im}(\gamma(t)), \quad t \in [a, b].$$

Nach Aufgabe III.3.6, ii), stimmen reelle und komplexe Differenzierbarkeit für γ überein, und γ ist genau dann (komplex) differenzierbar, wenn φ und ψ differenzierbar sind (im Sinne der Analysis I).

Wenn γ differenzierbar ist, dann gilt für die Ableitung

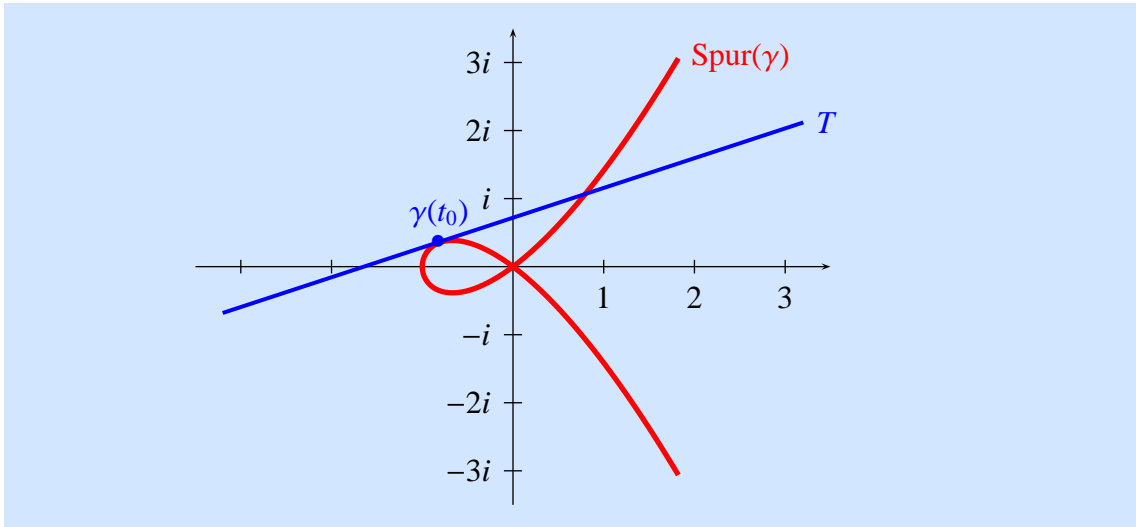
$$\gamma'(t) = \varphi'(t) + i \cdot \psi'(t), \quad t \in [a, b].$$

III.5.3 Anschauung. Für $t_0 \in [a, b]$ ist die Gerade

$$T := \{ \gamma(t_0) + \lambda \cdot \gamma'(t_0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

die **Tangente** an den Punkt $\gamma(t_0)$ der Kurve $\operatorname{Spur}(\gamma)$.

⁷Gemäß Definition I.7.1, iii), ist eine winkeltreue Abbildung invertierbar. Falls f sogar **stetig** differenzierbar ist, dann garantiert die Bedingung, dass $T_a f$ invertierbar ist, dass f in einer Umgebung von a umkehrbar ist ([14], Satz 10.2.1 und 10.2.3), $a \in U$. Wir werden weiter unten sehen (Satz IV.5.6), dass jede holomorphe Funktion stetig differenzierbar ist.



Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg mit $\text{Spur}(\gamma) \subset U$. Dann ist der Weg

$$\begin{aligned} f \circ \gamma: [a, b] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto f(\gamma(t)) \end{aligned}$$

ebenfalls differenzierbar, und es gilt

$$\forall t \in [a, b]: (f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t). \quad (\text{III.4})$$

III.5.4 Definition. Für abgeschlossene und beschränkte Intervalle $I_i \subset \mathbb{R}$, differenzierbare Wege $\gamma_i: I_i \rightarrow \mathbb{C}$ und Punkte $t_i \in I_i$, $i = 1, 2$, mit

$$\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) =: c \quad \text{und} \quad \gamma_1'(t_1) \neq 0 \neq \gamma_2'(t_2)$$

ist der *Schnittwinkel* $\varphi \in [0, \pi]$ von γ_1 und γ_2 im Punkt c durch die Formel

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2) \rangle}{|\gamma_1'(t_1)| \cdot |\gamma_2'(t_2)|}$$

bestimmt.

III.5.5 Bemerkung. Durch die Nummerierung γ_1, γ_2 können wir dem Schnittwinkel φ einen **Drehsinn** zuordnen.

Seien in der Situation von Definition III.5.4 weiter $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine lokal konforme Funktion, so dass $\gamma_i(I_i) \subset U$, $i = 1, 2$. Dann schneiden sich die Wege $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ im Punkt $f(c)$ ebenfalls im Winkel φ , und der Drehsinn bleibt erhalten (Abbildung III.2).

Zur Veranschaulichung einer lokal konformen Funktion können wir folgendes Verfahren anwenden: Wir zeichnen geeignete Scharen differenzierbarer Wege in der komplexen Ebene ein und betrachten die Bilder dieser Scharen unter der holomorphen Abbildung.

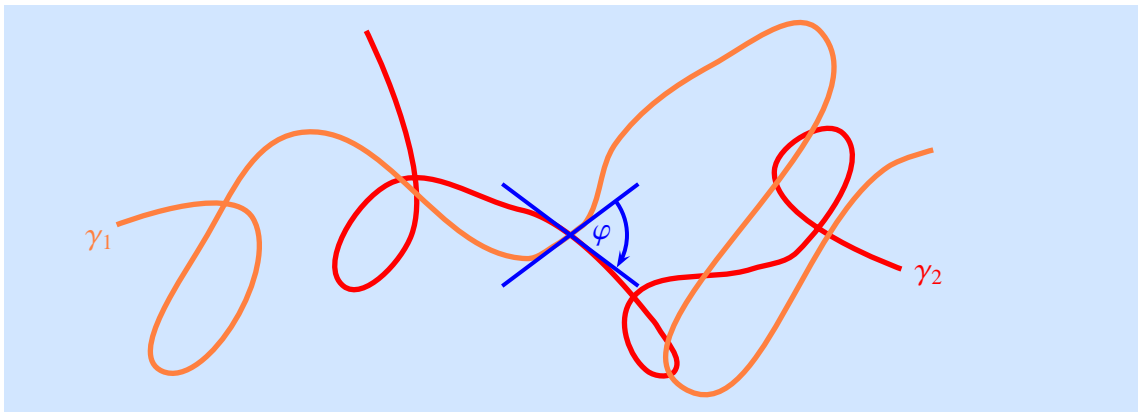
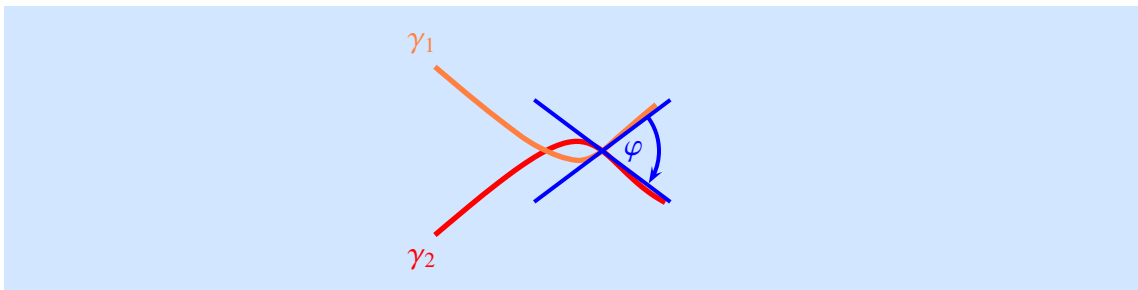


Abbildung III.1: Der Schnittwinkel zweier Wege

Abbildung III.2: Ausschnitt aus dem Bild der Wege aus Abbildung III.1 unter einer lokal konformen, aber nicht injektiven holomorphen Abbildung f

III.5.6 Beispiele. i) Es sei $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2$. Wegen $f'(z) = 2z \neq 0, z \in \mathbb{C}^*$, ist f lokal konform. Man beachte, dass f nicht injektiv und damit auch nicht konform ist.

Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x + y \cdot i) = x^2 - y^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i.$$

Mit

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 - y^2, \\ v: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2 \cdot x \cdot y \end{aligned}$$

haben wir

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, z = x + y \cdot i \neq 0: \quad f(x + y \cdot i) = u(x, y) + v(x, y) \cdot i.$$

Wir beschreiben jetzt die Bilder unter f von Geraden, die parallel zur reellen oder zur imaginären Achse sind.

Wir untersuchen zunächst eine Gerade L , die parallel zur reellen Achse ist. Es gibt somit eine komplexe Zahl $y_0 \in \mathbb{C}$ mit

$$L = \{ x + y_0 \cdot i \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

Falls $y_0 = 0$, dann ist das Bild von L die Halbgerade $\mathbb{R}_{>0}$ der positiven reellen Zahlen.

Für $y_0 \neq 0$ können wir

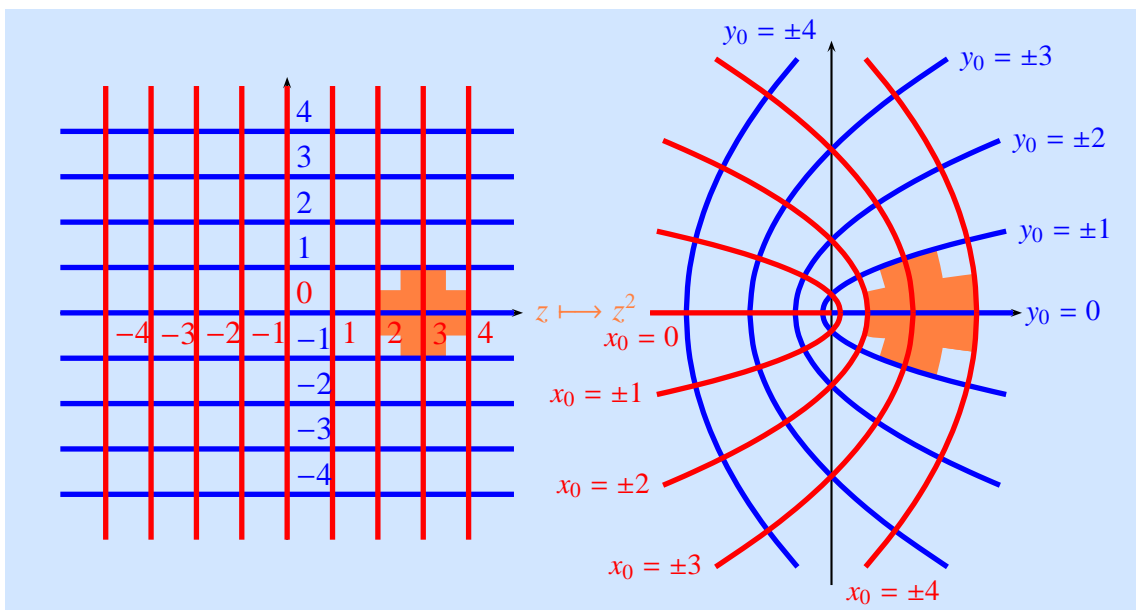
$$x = \frac{v(x, y_0)}{2 \cdot y_0} \quad \text{und} \quad u(x, y_0) = \frac{v(x, y_0)^2}{4 \cdot y_0^2} - y_0^2$$

schreiben. Die Gerade L wird also auf eine nach rechts geöffnete Parabel abgebildet.

Für eine zur imaginären Achse parallele Gerade L gibt es eine komplexe Zahl x_0 mit

$$L = \{ x_0 + y \cdot i \mid y \in \mathbb{R} \}.$$

Im Fall $x_0 = 0$ wird L auf die Halbgerade $\mathbb{R}_{<0}$ der negativen reellen Zahlen abgebildet, andernfalls auf eine nach links geöffnete Parabel.)



ii) Es sei

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Man beachte

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}: \quad f'(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot z^2} \neq 0.$$

Folglich ist f lokal konform. Die Abbildung f ist allerdings nicht injektiv und damit nicht konform.

Um die Geometrie von f zu beschreiben, verwenden wir **Polarkoordinaten** ([14], Beispiel 3.2.4, iv):

$$\forall r \in \mathbb{R}_{>0}, \varphi \in [0, 2\pi), r \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i) \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}: \quad f(z) = u(r, \varphi) + v(r, \varphi) \cdot i$$

mit

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2} \cdot \left(r + \frac{1}{r} \right) \cdot \cos(\varphi),$$

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2} \cdot \left(r - \frac{1}{r} \right) \cdot \sin(\varphi).$$

Es seien $0 < r_0 < 1$ eine reelle Zahl und K der Kreis vom Radius r_0 mit Mittelpunkt 0 . Die Gleichung

$$\frac{u(r_0, \varphi)^2}{\left(\frac{1}{2} \cdot \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \right)^2} + \frac{v(r_0, \varphi)^2}{\left(\frac{1}{2} \cdot \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right) \right)^2} = 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

zeigt, dass K auf eine Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 und den Halbachsen $(1/2) \cdot (r_0 - (1/r_0))$ und $(1/2) \cdot (r_0 + (1/r_0))$ abgebildet wird (vgl. [8], Abschnitt 7.5.1).

Es seien $\varphi_0 \in (0, \pi) \setminus \{\pi/2\}$ sowie

$$\zeta_0 := \cos(\varphi_0) \quad \text{und} \quad \xi_0 := \sin(\varphi_0).$$

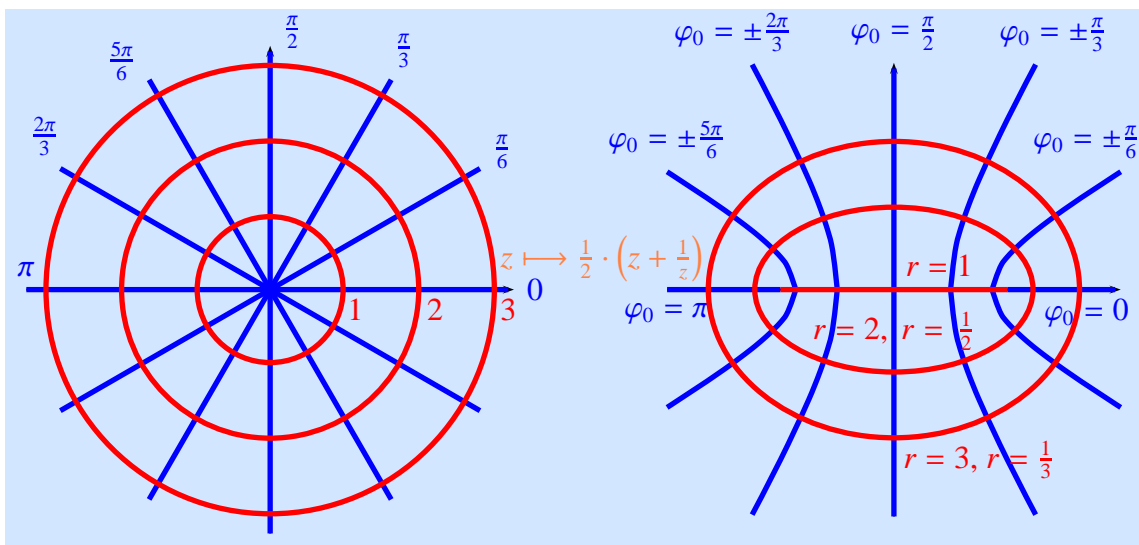
Wir beobachten

$$\forall r > 0 : \quad \frac{u(r, \varphi_0)^2}{\zeta_0^2} - \frac{v(r, \varphi_0)^2}{\xi_0^2} = 1.$$

Daraus folgern wir, dass die Gerade

$$L := \left\{ \lambda \cdot (\zeta_0 + \xi_0 \cdot i) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

durch den Ursprung auf eine Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1 abgebildet wird (vgl. [8], Abschnitt 7.5.2). Für $\varphi_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi$ bzw. $\varphi_0 = \pi/2$ erhält man die Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 1}$, $\mathbb{R}_{\leq -1}$ bzw. die imaginäre Achse. Dies zeigt insbesondere, dass Schnittwinkel in den Punkten, in denen f nicht lokal konform ist, nicht erhalten bleiben.



Für weitere Illustrationen verweisen wir auf [10], Kapitel 2.

III.5.7 Aufgaben (Die Geometrie der Exponentialfunktion). Wir betrachten $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

i) Bestimmen Sie das Bild unter \exp des Gebietes

$$G := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}.$$

ii) Bestimmen Sie die Bilder unter \exp der Geraden in \mathbb{C} , die parallel zur reellen oder imaginären Achse verlaufen. Fertigen Sie eine Skizze dazu an.

iii) Diskutieren Sie auch das Bild einer beliebigen reellen Geraden

$$L_{z_0} = \{\lambda \cdot z_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad z_0 \in \mathbb{C}^*,$$

durch den Ursprung.

III.6 Möbiustransformationen

III.6.1 Definition. Es seien $G, H \subset \mathbb{C}$ Gebiete.

i) Eine Abbildung $f: G \rightarrow H$ ist *biholomorph*, wenn die komplexwertige Funktion $f: G \rightarrow H \subset \mathbb{C}$ holomorph ist und es eine holomorphe Funktion $g: H \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$\star \quad \forall w \in G: (g \circ f)(w) = w.$$

$$\star \quad g(H) \subset G \text{ und } \forall z \in H: (f \circ g)(z) = z.$$

ii) Die Gebiete G und H sind *biholomorph äquivalent*, wenn es eine biholomorphe Abbildung $f: G \rightarrow H$ gibt.

Biholomorph äquivalente Gebiete sind vom Standpunkt der Funktionentheorie ununterscheidbar, d.h. vermöge einer biholomorphen Abbildung $f: G \rightarrow H$ zwischen Gebieten G und H können die komplexwertigen Funktionen auf G mit denjenigen auf H identifiziert werden und alle Aussagen über Holomorphie von Funktionen auf G in Aussagen über Holomorphie von Funktionen auf H übersetzt werden. Dies werden wir nun an Beispielen illustrieren.

III.6.2 Aufgabe. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine **stetige** komplexwertige Funktion. Wir sagen, dass f *offen* ist, wenn $f(V)$ für jede offene Teilmenge $V \subset U$ offen ist. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

★ Die Funktion f ist injektiv und offen.

★ Die Abbildung $f: U \rightarrow f(U)$ ist ein **Homöomorphismus**, d.h. es gibt eine **stetige** Abbildung $g: f(U) \rightarrow U$, so dass $(g \circ f)(w) = w$, $w \in U$, und $(f \circ g)(z) = z$, $z \in f(U)$.

III.6.3 Bemerkung. Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine **nichtkonstante** holomorphe Abbildung. Das Bild $f(G)$ ist offenbar wieder wegzusammenhängend. Wir zeigen weiter unten (Satz IV.8.1), dass f eine offene Abbildung ist und folglich $f(G)$ auch offen ist. Die Funktion f sei injektiv. Aufgabe III.6.2 impliziert, dass $f^{-1}: f(G) \rightarrow G$ stetig ist, und aus Satz III.3.16 folgern wir, dass f^{-1} auch holomorph ist. Somit ist eine holomorphe Abbildung $f: G \rightarrow H$ zwischen Gebieten genau dann biholomorph, wenn sie bijektiv ist.

III.6.4 Definition. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

eine komplexe (2×2) -Matrix mit $c \neq 0$ oder $d \neq 0$.

★ Falls $c = 0$ ist die zu A gehörige *Möbiustransformation*⁸ die holomorphe Abbildung

$$\begin{aligned} h_A: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{a \cdot z + b}{d}. \end{aligned}$$

★ Falls $c \neq 0$ ist die zu A gehörige *Möbiustransformation* die holomorphe Abbildung

$$\begin{aligned} h_A: \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}. \end{aligned}$$

III.6.5 Eigenschaften. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

komplexe (2×2) -Matrizen mit $c \neq 0$ oder $d \neq 0$ bzw. $c' \neq 0$ oder $d' \neq 0$.

i) Die Abbildung h_A ist genau dann konstant, wenn $\text{Det}(A) = 0$ gilt. Wenn $\text{Det}(A) \neq 0$, dann ist h_A lokal konform.

ii) Es gilt genau dann $h_A(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $c \cdot z + d \neq 0$, wenn $b = c = 0$ und $a = d \neq 0$. In diesem Fall ist $h_A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die identische Abbildung.

iii) Es sei $z \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit

$$c' \cdot z + d' \neq 0 \quad \text{und} \quad c \cdot h_{A'}(z) + d \neq 0.$$

Dann gilt

$$h_A(h_{A'}(z)) = h_{A \cdot A'}(z).$$

iv) Falls $\text{Det}(A) \neq 0$ und $A' = A^{-1}$, dann ist

$$h_A: \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d'}{c'} \right\}$$

eine biholomorphe Abbildung mit inverser Abbildung $h_{A'}$.

Beweis. i) Wegen $(c, d) \neq (0, 0)$ gilt genau dann $\text{Det}(A) = 0$, wenn es eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $(a, b) = \lambda \cdot (c, d)$. Auf der anderen Seite haben wir

$$\forall z \in \mathbb{C}, c \cdot z + d \neq 0: \quad h_A(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} = \lambda \iff a \cdot z + b = \lambda \cdot c \cdot z + \lambda \cdot d.$$

Diese Bedingung soll für unendlich viele komplexe Zahlen erfüllt werden. Das ist nur möglich, wenn $(a, b) = \lambda \cdot (c, d)$.

⁸August Ferdinand Möbius (1790 - 1868), deutscher Mathematiker und Astronom.

Schließlich gilt

$$h'_A(z) = \frac{a \cdot (c \cdot z + d) - c \cdot (a \cdot z + b)}{(c \cdot z + d)^2} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{(c \cdot z + d)^2} = \frac{\text{Det}(A)}{(c \cdot z + d)^2}.$$

Somit impliziert $\text{Det}(A) \neq 0$, dass h_A lokal konform ist.

ii) Hier haben wir

$$\forall z \in \mathbb{C}, c \cdot z + d \neq 0: \quad h_A(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} = z \iff a \cdot z + b = c \cdot z^2 + d \cdot z.$$

Auch diese Bedingung soll wieder für unendlich viele komplexe Zahlen gelten. Daher muss $a = d$ und $b = 0 = c$ gelten. Wegen $c = 0$ ist h_A auf ganz \mathbb{C} definiert.

iii) Wir berechnen

$$\begin{aligned} h_A(h_{A'}(z)) &= \frac{a \cdot \frac{a' \cdot z + b'}{c' \cdot z + d'} + b}{c \cdot \frac{a' \cdot z + b'}{c' \cdot z + d'} + d} \\ &= \frac{a \cdot (a' \cdot z + b') + b \cdot (c' \cdot z + d')}{c \cdot (a' \cdot z + b') + d \cdot (c' \cdot z + d')} \\ &= \frac{c' \cdot z + d'}{(c \cdot a' + d \cdot c') \cdot z + (c \cdot b' + d \cdot d')} \\ &= \frac{(a \cdot a' + b \cdot c') \cdot z + (a \cdot b' + b \cdot d')}{(c \cdot a' + d \cdot c') \cdot z + (c \cdot b' + d \cdot d')} \\ &= h_{A \cdot A'}(z). \end{aligned}$$

iv) Es gilt

$$A' = A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.} \quad c' = -\frac{c}{\text{Det}(A)}, \quad d' = \frac{a}{\text{Det}(A)}.$$

Somit haben wir

$$c \cdot h_{A'}(z) + d = c \cdot \frac{a' \cdot z + b'}{c' \cdot z + d'} + d = c \cdot \frac{d \cdot z - b}{-c \cdot z + a} + d = \frac{\text{Det}(A)}{-c \cdot z + a} = \frac{1}{c' \cdot z + d'}.$$

Damit ist $h_{A \cdot A'}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $c' \cdot z + d' \neq 0$ definiert. □

III.6.6 Beispiel. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

führt auf die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Dies ist die komplexe Konjugation gefolgt von der Inversion am Einheitskreis (s. [14], Beispiel 3.2.4, iii). Wir haben

$$\forall z \in \mathbb{C}^*: \quad (f \circ f)(z) = z.$$

Die Abbildung f bildet somit \mathbb{C}^* biholomorph auf \mathbb{C}^* ab.

Die offene bzw. abgeschlossene Einheitskreisscheibe ist definiert als

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

$$\text{bzw. } \overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

Weiter sei

$$\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\}.$$

Die Abbildung f bildet \mathbb{D}^* biholomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ ab und umgekehrt. Das Gebiet \mathbb{D}^* ist dabei beschränkt und das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ unbeschränkt.

III.6.7 Aufgabe (Inversion). Es sei

$$f: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$z \longmapsto \frac{1}{z}.$$

Bestimmen und skizzieren Sie die Bilder unter f der Geraden in \mathbb{C} , die parallel zur reellen oder imaginären Achse verlaufen.

III.6.8 Aufgaben (Möbiustransformationen und Kreise). Es seien

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}), \quad c \neq 0,$$

und $f := h_A$.

i) Wir betrachten die Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 , die auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich wie folgt gegeben sind:

$$f_1(z) := z + \frac{d}{c}$$

$$f_2(z) := \frac{1}{z}$$

$$f_3(z) := -\frac{ad - bc}{c^2} \cdot z$$

$$f_4(z) := z + \frac{a}{c}.$$

Zeigen Sie

$$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1.$$

Erläutern Sie kurz die Geometrie der Abbildungen f_1, f_2, f_3, f_4 .

ii) Schließen, dass eine Möbiustransformation Kreise auf Kreise (oder in Ausnahmefällen auf Geraden) abbildet. (Vorsicht bei der Inversion $z \mapsto 1/z$.)

Die Cayley-Abbildung

Wir setzen

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C' := \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\text{Det}(C) = 2i = \text{Det}(C') \quad \text{und} \quad C \cdot C' = C' \cdot C = 2i \cdot \mathbb{E}_2.$$

Es folgt

$$C^{-1} = \frac{1}{2i} \cdot C'. \tag{III.5}$$

Somit

$$\forall w \in \mathbb{C} \setminus \{1\} : (h_C \circ h_{C'})(w) = w \quad \text{und} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\} : (h_{C'} \circ h_C)(z) = z.$$

Damit ist

$$h_C : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

eine biholomorphe Abbildung.

III.6.9 Definition. i) Die Abbildung h_C heißt *Cayleyabbildung*⁹.

ii) Das Gebiet

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$$

ist die *obere Halbebene*.

III.6.10 Satz. Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{H}$ aus der oberen Halbebene gilt

$$h_C(z) \in \mathbb{D}$$

und

$$\begin{aligned} \chi_C : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto h_C(z) = \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

ist biholomorph.

Beweis. Für eine komplexe Zahl $z \neq i$ haben wir

$$|h_C(z)|^2 = \frac{z-i}{z+i} \cdot \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} = \frac{z \cdot \bar{z} + i \cdot (z - \bar{z}) + 1}{z \cdot \bar{z} + i \cdot (\bar{z} - z) + 1}.$$

Damit berechnen wir

$$1 - |h_C(z)|^2 = \frac{2i \cdot (\bar{z} - z)}{z \cdot \bar{z} + i \cdot (\bar{z} - z) + 1} = \frac{4 \cdot \text{Im}(z)}{z \cdot \bar{z} + 2 \cdot \text{Im}(z) + 1}.$$

Das zeigt

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\} : \text{Im}(z) > 0 \implies |h_C(z)| < 1.$$

Sei umgekehrt $z \neq 1$. Dann

$$\begin{aligned} \text{Im}(h_{C'}(z)) &= -\frac{i}{2} \cdot \left(i \cdot \frac{1+z}{1-z} - (-i) \cdot \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \right) \\ &= \frac{1 - |z|^2}{|1-z|^2}. \end{aligned}$$

⁹Arthur Cayley (1821 - 1895), englischer Mathematiker.

Wir folgern

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} : |z| < 1 \implies \operatorname{Im}(h_C(z)) > 0.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \chi_C : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ z &\longmapsto h_C(z) = i \cdot \frac{z+1}{-z+1} \end{aligned}$$

definiert, und wegen $(h_C \circ h_C)(w) = w$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $(h_C \circ h_C)(z) = z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, sind χ_C und $\chi_C : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ zueinander invers. \square

III.6.11 Satz. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} q : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto -z^2 \end{aligned}$$

bildet die obere Halbebene \mathbb{H} bijektiv auf $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ab.

Beweis. **Schritt 1.** Für $c \in \mathbb{C}$ mit $-c^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$, also $c^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, folgt $c \in \mathbb{R}$. Wegen $\mathbb{H} \cap \mathbb{R} = \emptyset$ folgt $q(\mathbb{H}) \subset \mathbb{C}^-$.

Schritt 2. Für komplexe Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ mit $c_1^2 = c_2^2$ gilt $c_1 = \pm c_2$. Wenn c_1, c_2 beide der oberen Halbebene entstammen, dann folgt $\operatorname{Im}(-c_2) = -\operatorname{Im}(c_2) < 0$ und $-c_2 \notin \mathbb{H}$. In diesem Fall impliziert $c_1^2 = c_2^2$, dass $c_1 = c_2$. Daher ist $q|_{\mathbb{H}}$ injektiv.

Schritt 3. Es seien $w \in \mathbb{C}^-$ und $\tilde{c} \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $\tilde{c}^2 = -w$. Wie in Schritt 1 gesehen folgt $\tilde{c} \notin \mathbb{R}$. Somit haben wir $\operatorname{Im}(\tilde{c}) > 0$ oder $\operatorname{Im}(-\tilde{c}) > 0$. Es gibt folglich eine komplexe Zahl $c \in \mathbb{H}$ mit $q(c) = w$. \square

III.6.12 Folgerung. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{C}^- \\ z &\longmapsto \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2 \end{aligned}$$

ist holomorph und bijektiv.

III.6.13 Bemerkung. Wie in Bemerkung III.6.3 folgt, dass

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{C}^- \\ z &\longmapsto -z^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{C}^- \\ z &\longmapsto \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2 \end{aligned}$$

biholomorph sind.

Automorphismen der oberen Halbebene und der Einheitskreisscheibe

III.6.14 Definition. Es sei G ein Gebiet. Seine *Automorphismengruppe*¹⁰ ist

$$\text{Aut}(G) = \{ f: G \longrightarrow G \mid f \text{ ist biholomorph} \}.$$

Wir wollen jetzt die Elemente von $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ als Automorphismen der oberen Halbebene interpretieren.

III.6.15 Satz. *Es sei*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Dann gilt

$$h_A(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H},$$

und

$$\begin{aligned} \chi_A: \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ z &\longmapsto h_A(z) = \frac{\alpha \cdot z + \beta}{\gamma \cdot z + \delta} \end{aligned}$$

ist eine biholomorphe Abbildung.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass aus $\gamma \cdot z + \delta = 0$ folgt, dass z eine reelle Zahl ist. Da die obere Halbebene keine reelle Zahl enthält, ist h_A auf ganz \mathbb{H} definiert. Es sei $z \in \mathbb{H}$.

$$h_A(z) - \overline{h_A(z)} = \frac{\alpha \cdot z + \beta}{\gamma \cdot z + \delta} - \frac{\alpha \cdot \bar{z} + \beta}{\gamma \cdot \bar{z} + \delta} = \frac{(\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma) \cdot (z - \bar{z})}{|\gamma \cdot z + \delta|^2} \stackrel{\text{Det}(A)=1}{=} \frac{z - \bar{z}}{|\gamma \cdot z + \delta|^2}.$$

Wir erkennen

$$\text{Im}(h_A(z)) = -\frac{i}{2} \cdot (h_A(z) - \overline{h_A(z)}) = \frac{\text{Im}(z)}{|\gamma \cdot z + \delta|^2}$$

und somit

$$h_A(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}.$$

Ebenso gilt

$$h_{A^{-1}}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}.$$

Deshalb ist χ_A biholomorph mit inverser Abbildung $\chi_{A^{-1}}$. □

III.6.16 Folgerung. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \text{SL}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}) \\ A &\longmapsto \chi_A \end{aligned}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

¹⁰Die Multiplikation ist durch die Verknüpfung von Abbildungen, das Neutralelement durch die identische Abbildung id_G und das inverse Element zu $f: G \longrightarrow G$ durch die Umkehrabbildung $f^{-1}: G \longrightarrow G$ gegeben.

Vermöge der Cayleyabbildung (s. Satz III.6.10) können wir die Automorphismengruppen der oberen Halbebene und der Einheitskreisscheibe miteinander identifizieren:

III.6.17 Satz. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{H}) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{D}) \\ \varphi &\longmapsto \chi_C \circ \varphi \circ \chi_{C^{-1}} \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von Gruppen. Der inverse Isomorphismus ist

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{D}) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}) \\ \psi &\longmapsto \chi_{C^{-1}} \circ \psi \circ \chi_C. \end{aligned}$$

Auf Niveau der Matrixgruppen betrachten wir die Abbildung (vgl. Seite 83f)

$$\begin{aligned} H: \text{SL}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto C \cdot A \cdot C^{-1} = \frac{1}{2i} \cdot C \cdot A \cdot C'. \end{aligned}$$

III.6.18 Satz. *Die Abbildung H ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus mit Bild*

$$M := \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{array} \right) \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}.$$

Beweis. Für zwei Matrizen $A, A' \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ gilt

$$H(A) \cdot H(A') = (C \cdot A \cdot C^{-1}) \cdot (C \cdot A' \cdot C^{-1}) = C \cdot A \cdot A' \cdot C^{-1} = H(A \cdot A').$$

Wir haben

$$\forall A \in \text{SL}_2(\mathbb{R}) : C \cdot A \cdot C^{-1} = H(A) = \mathbb{E}_2 \iff A = \mathbb{E}_2.$$

Das zeigt $\text{Ker}(H) = \{\mathbb{E}_2\}$ und damit, dass H injektiv ist ([16], Lemma II.4.5).

Man berechnet

$$\forall A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) :$$

$$C \cdot A \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \delta) + \frac{1}{2} \cdot (\beta - \gamma) \cdot i & \frac{1}{2} \cdot (\alpha - \delta) - \frac{1}{2} \cdot (\beta + \gamma) \cdot i \\ \frac{1}{2} \cdot (\alpha - \delta) + \frac{1}{2} \cdot (\beta + \gamma) \cdot i & \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \delta) - \frac{1}{2} \cdot (\beta - \gamma) \cdot i \end{pmatrix}. \quad (\text{III.6})$$

Wenn $A \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$, so gilt offenbar

$$H(A) \in M.$$

Jetzt geben wir uns eine Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in M$$

vor und setzen

$$\alpha := \text{Re}(a + b), \quad \beta := \text{Im}(a - b), \quad \delta := \text{Re}(a - b), \quad \gamma := -\text{Im}(a + b).$$

Nach (III.6) gilt

$$C \cdot A \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Schließlich beobachten wir

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(C \cdot A \cdot C^{-1}) = \text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = 1.$$

Es folgt $A \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$. □

III.6.19 Folgerung. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{D}) \\ A &\longmapsto \chi_A: z \longmapsto h_A(z) \end{aligned}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir werden im folgenden Kapitel, Satz IV.9.5, beweisen, dass dieser Homomorphismus auch surjektiv ist.

III.6.20 Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist *homogen*, wenn es zu je zwei Punkten $w, w' \in G$ ein Element $\varphi \in \text{Aut}(G)$ mit

$$\varphi(w) = w'$$

gibt.

III.6.21 Satz. *Die Gebiete \mathbb{H} und \mathbb{D} sind homogen.*

Wir formulieren einen Hilfssatz, den wir später nocheinmal nutzen werden.

III.6.22 Hilfssatz. *Es seien $\eta, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen, so dass $|\eta| = 1$ und $|w| < 1$. Zu der Matrix*

$$A := \begin{pmatrix} \eta & -\eta \cdot w \\ \bar{w} & -1 \end{pmatrix}$$

existieren eine komplexe Zahl $s \in \mathbb{C}^$ und eine Matrix $B \in M$ mit*

$$A = s \cdot B.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $1 - |w|^2 > 0$. Wir wählen $a \in \mathbb{C}^*$ mit

$$a^2 = -\frac{\eta}{1 - |w|^2} \quad \text{und setzen} \quad b := -w \cdot a.$$

Wir finden

$$|a|^2 - |b|^2 \stackrel{|\eta|=1}{=} \frac{1}{1 - |w|^2} - \frac{|w|^2}{1 - |w|^2} = 1,$$

d.h.

$$B := \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in M.$$

Weiter sei

$$s := \frac{\eta}{a} \in \mathbb{C}^*.$$

Offenbar gilt $s \cdot a = \eta$, und aus

$$s \cdot a \cdot \bar{a} = s \cdot |a|^2 \stackrel{|\eta|=1}{=} \frac{s}{1 - |w|^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\eta}{1 - |w|^2} = -\frac{a^2}{a} = -a$$

folgt $s \cdot \bar{a} = -1$. Weiter haben wir $s \cdot b = -\eta \cdot w$ und $s \cdot \bar{b} = \bar{w}$. Zusammengenommen ergibt sich

$$A = s \cdot B.$$

Das ist die Behauptung. □

Beweis von Satz III.6.21. Auf Grund von Satz III.6.10 genügt es, die Aussage für das Gebiet \mathbb{D} zu beweisen.

Schritt 1. Nach Satz III.6.18 ist $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, $z \mapsto h_B(z)$, ein Automorphismus der Einheitskreisscheibe. Aus Hilfssatz III.6.22 folgt, dass auch

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \eta \cdot \frac{z - w}{\bar{w} \cdot z - 1} \end{aligned}$$

ein Automorphismus ist.

Schritt 2. Für jede komplexe Zahl $u \in \mathbb{D}$ ist nach Hilfssatz III.6.22 und Schritt 1 durch

$$\begin{aligned} f_u: \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \frac{z - u}{\bar{u} \cdot z - 1} \end{aligned}$$

ein Automorphismus gegeben. Offenbar hat man

$$f_u(0) = u.$$

Für zwei Punkte $w, w' \in \mathbb{D}$ ist $f_{w'} \circ f_w^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ein Automorphismus, der w auf w' abbildet. □

III.6.23 Aufgabe (Ein Fundamentalbereich). Für die Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ der invertierbaren (2×2) -Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und Determinante eins betrachten wir den Homomorphismus

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}) \\ A &\longmapsto h_A. \end{aligned}$$

i) Skizzieren Sie die Teilmenge

$$F := \left\{ z \in \mathbb{H} \mid \left(|z| > 1 \wedge -\frac{1}{2} < \text{Re}(z) < 0 \right) \vee \left(|z| \geq 1 \wedge 0 \leq \text{Re}(z) \leq \frac{1}{2} \right) \right\} \subset \mathbb{H}.$$

ii) Beweisen Sie: Zu jedem Punkt $\tau \in \mathbb{H}$ gibt es **genau einen** Punkt $\tau' \in F$, so das gilt:

$$\exists A \in SL_2(\mathbb{Z}) : h_A(\tau) = \tau'.$$

Hinweise. Für die Existenz des Punktes τ' : Zeigen Sie zunächst, dass man zu τ eine Matrix $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ mit $-(1/2) < \text{Re}(h_A(\tau)) \leq (1/2)$ finden kann.

Für die Untersuchung von Punkten τ mit $-(1/2) < \text{Re}(\tau) \leq (1/2)$ ist das Folgende nützlich: Geben Sie eine Matrix J an, für die h_J die Abbildung $z \mapsto -1/\bar{z}$ ist.

IV

Integration komplexer Funktionen

Dies ist das zentrale Kapitel des Skripts. Es enthält die stärksten Aussagen über holomorphe Funktionen und bedeutende Anwendungen wie den Fundamentalsatz der Algebra. Die Techniken aus diesem Kapitel werden in den folgenden Kapiteln noch ausgebaut und verfeinert.

Mit Hilfe des Riemannintegrals ([13], Kapitel 5) lässt sich ein einfacher Formalismus entwickeln, mit dem man eine stetige komplexwertige Funktion längs eines stetig differenzierbaren Wegs innerhalb ihres Definitionsbereichs integrieren kann. Dieser Formalismus erweist sich als ein Schlüssel zum Verständnis holomorpher Funktionen. Wie in der reellen Analysis lassen sich mit Hilfe von Integralen Stammfunktionen konstruieren. Es gibt jedoch eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit dieser Ansatz funktioniert, und zwar dass das Wegintegral längs jedes geschlossenen Wegs verschwindet. Es gibt zwei zentrale Beobachtungen in diesem Zusammenhang:

- Für ein Dreieck, das ganz im Definitionsbereich der zu integrierenden **holomorphen** Funktion enthalten ist, verschwindet das Wegintegral längs des Rands des Dreiecks (Satz von Goursat oder Cauchy-Integralsatz für Dreieckswege IV.4.3).
- Ist die zu integrierende holomorphe Funktion auf einem **sternförmigen Gebiet** erklärt, dann lässt sich durch Integration direkt eine Stammfunktion definieren, ohne dass man das Verschwinden längs beliebiger geschlossener Wege überprüfen muss. Man braucht lediglich den Satz von Goursat.

Weiter lässt sich mit Hilfe der Definitionen direkt die unscheinbare Formel (Lemma IV.5.1)

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi \cdot i$$

überprüfen. Dabei ist γ ein Kreisweg im mathematisch positiven Sinne um den Ursprung. Dies sind bereits alle Zutaten, die man im Beweis der Cauchy-Integralformel (Satz IV.5.2) benötigt. Mit ihr eröffnet sich der Weg zum Beweis zahlreicher starker und verblüffender Aussagen über holomorphe Funktionen, wie des Satzes von Liouville (Satz IV.5.9) oder der Analytizität holomorpher Funktionen (Satz IV.6.8).

IV.1 Integration über Intervalle

IV.1.1 Definitionen. Es seien $-\infty < a < b < \infty$ reelle Zahlen und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion.

i) Die Funktion f ist *integrierbar*, wenn die reellen Funktionen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f): [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \operatorname{Re}(f(z)), \\ \operatorname{Im}(f): [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \operatorname{Im}(f(z)) \end{aligned}$$

integrierbar sind.

ii) Wenn f integrierbar ist, dann ist das *Integral* die Zahl

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))dt + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))dt.$$

Weiter setzen wir

$$\int_b^a f(t)dt := - \int_a^b f(t)dt \quad \text{und} \quad \int_a^a f(t)dt := 0.$$

iii) Eine Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine *Stammfunktion* für F , wenn für die komplexe Ableitung¹

$$\forall t \in [a, b] : \quad F'(t) = f(t)$$

gilt.

IV.1.2 Beispiel. Wenn $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, dann folgt aus Eigenschaft III.1.3, iii), und [13], Satz 5.1.9, i), dass f integrierbar ist. Wir werden im Folgenden meist voraussetzen, dass f stetig ist.

IV.1.3 Eigenschaften. Es seien $-\infty < a < b < \infty$ reelle Zahlen.

i) *Das Integral ist \mathbb{C} (!)-linear:* Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\lambda \cdot f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \quad \text{und} \quad \int_a^b (\lambda \cdot f)(t)dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)dt.$$

ii) *Es seien f stetig und $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion.* Dann gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

iii) *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.* Dann hat man die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

¹vgl. Aufgabe III.3.6, ii)

Sei ferner $C \in \mathbb{R}_{>0}$ eine positive reelle Konstante, so dass

$$\forall t \in [a, b] : |f(t)| \leq C.$$

Dann hat man

$$\int_a^b |f(t)| dt \leq C \cdot (b - a).$$

iv) Es gilt die **Substitutionsregel**. Es seien $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ zwei abgeschlossene Intervalle, $a, b \in I_1$, $\varphi: I_1 \rightarrow I_2$ eine stetig differenzierbare Funktion und $f: I_2 \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion. In diesem Fall findet man

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s) ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

v) **Partielle Integration**. Für stetig differenzierbare² Funktionen $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ folgt:

$$\int_a^b u(t) \cdot v'(t) dt = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b u'(t) \cdot v(t) dt.$$

vi) Für eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ und eine stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Die Beweise ergeben sich im Wesentlichen aus den entsprechenden Sätzen zur Integration aus der reellen Analysis ([13], Satz 5.1.13 und Abschnitt 5.4).

Beweis. i) Die Additivität ergibt sich unmittelbar aus den Formeln

$$\operatorname{Re}(f + g) = \operatorname{Re}(f) + \operatorname{Re}(g) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$$

und der Additivität des reellen Integrals ([13], Satz 5.1.13, ii). Für $\lambda = \varrho + \sigma \cdot i$, $\varrho, \sigma \in \mathbb{R}$, haben wir

$$\operatorname{Re}(\lambda \cdot f) = \varrho \cdot \operatorname{Re}(f) - \sigma \cdot \operatorname{Im}(f) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\lambda \cdot f) = \sigma \cdot \operatorname{Re}(f) + \varrho \cdot \operatorname{Im}(f).$$

Mit [13], Satz 5.1.13, i), sehen wir

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda \cdot f(t) dt &= \varrho \cdot \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt - \sigma \cdot \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt + \\ &\quad + i \cdot \left(\sigma \cdot \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + \varrho \cdot \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt \right) \\ &= (\varrho + \sigma \cdot i) \cdot \left(\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt \right) \\ &= \lambda \cdot \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

²Wie im Reellen nennen wir eine Funktion $h: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt $z \in D$ differenzierbar ist und die Ableitung $h': D \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto h'(z)$, stetig ist.

ii) Das ist eine Folgerung aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ([13], Satz 5.3.5) und Aufgabe III.3.6, ii), die besagt, dass $\operatorname{Re}(F)$ eine Stammfunktion für $\operatorname{Re}(f)$ ist und $\operatorname{Im}(F)$ eine für $\operatorname{Im}(f)$.

iii) **Schritt 1.** Es sei $s \in \mathbb{R}$. Nach Teil i) haben wir

$$\exp(i \cdot s) \cdot \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \exp(i \cdot s) \cdot f(t) dt.$$

Die Monotonie des reellen Integrals ([13], Satz 5.1.13, iii) liefert uns die Abschätzung

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\exp(i \cdot s) \cdot \int_a^b f(t) dt \right) &= \int_a^b \operatorname{Re}(\exp(i \cdot s) \cdot f(t)) dt \\ &\leq \int_a^b |\exp(i \cdot s) \cdot f(t)| dt \\ &= \int_a^b |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Schritt 2. Falls

$$\int_a^b f(t) dt = 0$$

ist nichts zu zeigen. Ansonsten setzen wir

$$s := -\operatorname{Arg} \left(\int_a^b f(t) dt \right).$$

Es gilt dann (vgl. Bemerkung II.6.4, iii)

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \exp(i \cdot s) \cdot \int_a^b f(t) dt.$$

Mit Schritt 1 folgt jetzt die Behauptung. Der Zusatz folgt ebenfalls aus der Monotonie des reellen Integrals.

iv) Es sei F eine Stammfunktion von f . Dann ist $(F \circ \varphi)$ nach der Kettenregel III.3.9 eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Also gilt nach Teil ii)

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) dt = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s) ds.$$

v) Auch dieser Teil folgt aus Teil ii), denn nach der Produktregel (Satz III.3.8, iii) ist $u \cdot v$ eine Stammfunktion für $u' \cdot v + u \cdot v'$.

vi) Man wende [13], Satz 5.1.12, an. □

IV.2 Wegintegrale

IV.2.1 Definitionen. i) Ein Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist *glatt*, wenn γ stetig differenzierbar ist.³

³Man beachte, dass **glatt** in der Literatur oftmals für \mathcal{C}^∞ steht.

ii) Es seien $a < b$ reelle Zahlen. Eine *Unterteilung* des Intervalls $[a, b]$ ist ein Tupel $\underline{a} = (a_0, \dots, a_n)$ reeller Zahlen mit

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b.$$

iii) Ein Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise glatt*, wenn es eine Unterteilung $\underline{a} = (a_0, \dots, a_n)$ von $[a, b]$ gibt, so dass die Wege

$$\gamma_i := \gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}, \quad i = 1, \dots, n,$$

glatt sind.

iv) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine **stetige** komplexwertige Funktion und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein glatter Weg in D . Dann ist das *Wegintegral* von f längs des Wegs γ der Ausdruck

$$\int_{\gamma} f := \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

v) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg in D und $\underline{a} = (a_0, \dots, a_n)$ eine Unterteilung von $[a, b]$, so dass die Wege

$$\gamma_i := \gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}, \quad i = 1, \dots, n,$$

glatt sind. Dann setzen wir

$$\int_{\gamma, \underline{a}} f := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f.$$

IV.2.2 Lemma. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg in D und $\underline{a} = (a_0, \dots, a_m)$, $\underline{b} = (b_0, \dots, b_n)$ Unterteilungen von $[a, b]$, so dass die Wege

$$\gamma_i := \gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{bzw.} \quad \sigma_j := \gamma|_{[b_{j-1}, b_j]}, \quad j = 1, \dots, n,$$

glatt sind. Dann hat man

$$\int_{\gamma, \underline{a}} f = \int_{\gamma, \underline{b}} f.$$

Beweis. Es sei $\underline{c} = (c_0, \dots, c_q)$ die Unterteilung von $[a, b]$, die aus den Elementen der Menge $\{a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n\}$ in aufsteigender Reihenfolge besteht. Die Gleichungen

$$\int_{\gamma, \underline{a}} f = \int_{\gamma, \underline{c}} f \quad \text{bzw.} \quad \int_{\gamma, \underline{b}} f = \int_{\gamma, \underline{c}} f$$

folgen dann leicht aus Eigenschaft IV.1.3, vi). □

IV.2.3 Definition. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg in D . Dann ist das *Wegintegral* von f längs des Wegs γ die komplexe Zahl

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma, \underline{a}} f.$$

Dabei ist $\underline{a} = (a_0, \dots, a_m)$ eine Unterteilung von $[a, b]$, so dass die Wege

$$\gamma_i := \gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}, \quad i = 1, \dots, m,$$

glatt sind.

IV.2.4 *Bemerkung* (Alternative Definition von Wegintegralen). Man kann die Theorie der Wegintegrale auch auf dem folgenden Resultat aufbauen:

Satz. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg in D . Dann existiert eine komplexe Zahl I , die folgende Eigenschaften aufweist:

i) Für jede positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine positive reelle Zahl $\delta > 0$, so dass für jede Unterteilung $\underline{a} = (a_0, \dots, a_n)$ des Intervalls $[a, b]$, die

$$|a_i - a_{i-1}| < \delta, \quad i = 1, \dots, n,$$

erfüllt, und jede Wahl von Stützstellen

$$t_i \in [a_{i-1}, a_i], \quad i = 1, \dots, n,$$

die Abschätzung

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(\gamma_i(t_i)) \cdot (\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})) \right| < \varepsilon$$

gilt.

ii) Die Zahl I stimmt mit dem Wegintegral von f längs des Wegs γ überein:

$$I = \int_{\gamma} f.$$

Teil i) des Satzes gilt allgemeiner für **rektifizierbare** Wege ([14], Definition 4.2.1, d). Den Satz kann man wie Satz 4.3.2 in [14] beweisen. Eine Referenz ist [1], Proposition 1.3 und Theorem 1.4.

IV.2.5 *Beispiele.* i) Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Punkt und $r > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} \setminus \{z_0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z - z_0} \end{aligned}$$

und den glatten Weg

$$\begin{aligned} \gamma(z_0, r): [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto r \cdot \exp(i \cdot \varphi) + z_0. \end{aligned}$$

Aus Definition IV.2.1, i), ergibt sich

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r \cdot \exp(i \cdot \varphi)} \cdot i \cdot r \cdot \exp(i \cdot \varphi) d\varphi = i \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \cdot i.$$

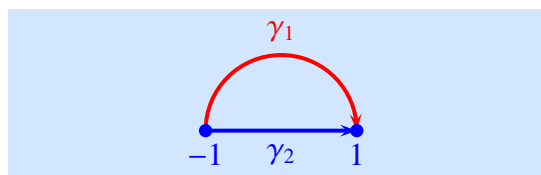
Man beachte, dass dieses Ergebnis nicht vom Radius r abhängt.

ii) Diesmal sei

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto |z|. \end{aligned}$$

Wir definieren folgende Wege

$$\begin{aligned}\gamma_1: [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \exp(i \cdot (\pi - \varphi)), \\ \gamma_2: [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto t.\end{aligned}$$



Wir setzen diese Daten in Definition IV.2.1, i), ein und finden

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f &= - \int_0^\pi i \cdot \exp(i \cdot (\pi - \varphi)) d\varphi = \exp(i \cdot (\pi - \varphi)) \Big|_0^\pi = 1 - (-1) = 2, \\ \int_{\gamma_2} f &= \int_{-1}^1 |t| dt = \int_{-1}^0 -t dt + \int_0^1 t dt = -\frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_0^1 = 1.\end{aligned}$$

Wir sehen damit

$$\int_{\gamma_1} f \neq \int_{\gamma_2} f.$$

Das Wegintegral hängt also i.A. von der Auswahl des Wegs und nicht nur von seinen Endpunkten ab. Dieses Phänomen werden wir im Weiteren genauer untersuchen.

iii) Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Es gelte $[a, b] \subset D$. Wir setzen

$$\begin{aligned}\gamma: [a, b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto t.\end{aligned}$$

Dann finden wir

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(t) dt.$$

IV.2.6 Eigenschaften. i) *Das Wegintegral ist \mathbb{C} -linear: Für jede Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$, jeden stückweise glatten Weg $\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ in D , jedes Paar $f, g: D \longrightarrow \mathbb{C}$ von stetigen Funktionen auf D und jede komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ hat man die Formeln*

$$\int_{\gamma} (f + g) = \int_{\gamma} f + \int_{\gamma} g \quad \text{und} \quad \int_{\gamma} (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \int_{\gamma} f.$$

ii) *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $F: U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine **Stammfunktion** von f , d.h.*

$$\forall z \in U: \quad F'(z) = f(z).$$

Dann hat man

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

*Ist insbesondere γ ein **geschlossener** Weg, d.h. gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so folgt*

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

iii) **Umparametrisierung.** Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg in D . Für eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$$

mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$ hat man

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma \circ \varphi} f.$$

Beweis. i) Dies ist eine Folgerung aus Eigenschaft IV.1.3, i).

ii) Die Kettenregel III.3.9 zeigt

$$\forall t \in [a, b]: (F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Damit zeigen Definition IV.2.1, i), und Eigenschaft IV.1.3, ii), dass

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \cdot \gamma'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

iii) Mit Definition IV.2.1, i), und der Substitutionsregel (Eigenschaft IV.1.3, iv) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_c^d f((\gamma \circ \varphi)(t)) \cdot \gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \int_c^d f((\gamma \circ \varphi)(t)) \cdot (\gamma \circ \varphi)'(t) dt \\ &= \int_{\gamma \circ \varphi} f. \end{aligned}$$

Dies ist die behauptete Gleichheit. □

IV.2.7 Beispiele. i) Die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

besitzt keine Stammfunktion. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \exp(i \cdot \varphi) \end{aligned}$$

ein glatter Weg mit

$$\gamma(0) = 1 = \gamma(2\pi).$$

In Beispiel IV.2.5, i), haben wir

$$\int_{\gamma} f = 2\pi \cdot i \neq 0$$

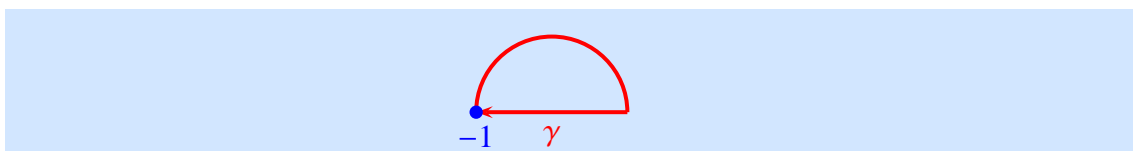
berechnet. Die Behauptung ist somit eine Folgerung aus Eigenschaft IV.2.6, ii).

ii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto |z| \end{aligned}$$

besitzt ebenfalls keine Stammfunktion. Dazu definieren wir den stückweise glatten Weg

$$\begin{aligned} \gamma: [0, \pi + 2] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \begin{cases} \exp(i \cdot (\pi - t)), & \text{falls } 0 \leq t < \pi \\ -t + \pi + 1, & \text{falls } \pi \leq t \leq \pi + 2 \end{cases} \end{aligned}$$



Die Berechnung in Beispiel IV.2.5, ii), ergibt

$$\int_{\gamma} f = 1 \neq 0.$$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem elementaren aber effizienten Hilfsmittel.

IV.2.8 Definition. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg in D und $\underline{a} = (a_0, \dots, a_n)$ eine Unterteilung von $[a, b]$, so dass die Wege

$$\gamma_i := \gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}, \quad i = 1, \dots, n,$$

glatt sind. Die *Bogenlänge* von γ ist die Zahl⁴

$$L(\gamma) := \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} |\gamma'(t)| dt.$$

IV.2.9 Satz (Die Standardabschätzung). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg in D und $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine reelle Zahl mit*

$$\max \left\{ |f(\gamma(t))| \mid t \in [a, b] \right\} \leq C.$$

Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq C \cdot L(\gamma).$$

⁴Wie im Beweis von Lemma IV.2.2 zeigt man, dass diese Zahl nicht von der Auswahl von \underline{a} abhängt.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass γ glatt ist. Unter Verwendung von Eigenschaft IV.2.5, iii), und der Monotonie des reellen Integrals ([13], Satz 5.1.13, iii) finden wir

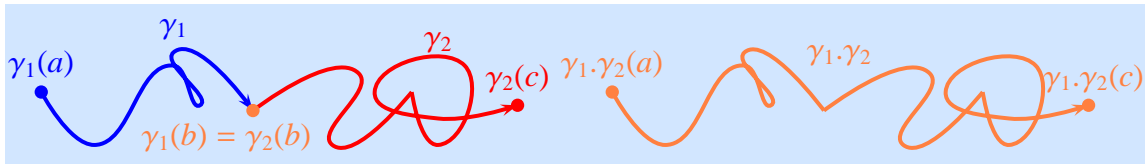
$$\left| \int_{\gamma} f \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq C \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt = C \cdot L(\gamma).$$

Das ist die Standardabschätzung. □

IV.2.10 Definitionen. i) Es seien $a < b < c$ reelle Zahlen sowie $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ Wege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Der Weg

$$\begin{aligned} \gamma_1 \cdot \gamma_2: [a, c] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{falls } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & \text{falls } t \in [b, c] \end{cases} \end{aligned}$$

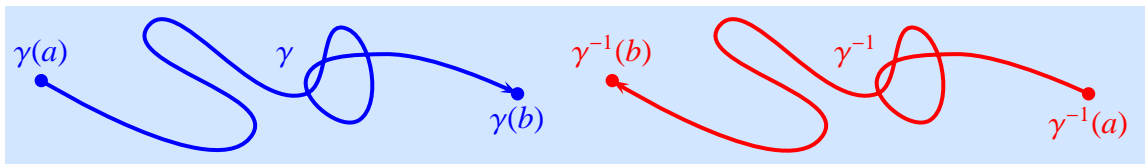
ist die *Verknüpfung* von γ_1 und γ_2 .



ii) Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg. Der Weg

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}: [a, b] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma(a + b - t) \end{aligned}$$

ist der zu γ *entgegengesetzte Weg*.



IV.2.11 Bemerkung. In der Situation der Definition seien γ_1 , γ_2 und γ stückweise glatte Wege. Dann sind auch die Wege $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ und γ^{-1} stückweise glatt.

IV.2.12 Eigenschaften. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

i) Für reelle Zahlen $a < b < c$ und Wege $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ in D mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ gilt

$$\int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

ii) Für reelle Zahlen $a < b$ und einen Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ in D hat man

$$\int_{\gamma^{-1}} f = - \int_{\gamma} f.$$

Beweis. i) Dieser Teil folgt unmittelbar aus den Definitionen. Für Teil ii) verwendet man Definition IV.2.1, i), und die Substitutionsregel (Eigenschaft IV.1.3, iv). \square

IV.2.13 Aufgabe (Wegintegrale). i) Es seien $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto (2 \cdot t - 1) \cdot i$. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} z \cdot \cos(z) dz.$$

ii) Geben Sie einen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto x(t) + y(t) \cdot i$ an, so dass $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = -1 + i$ und $y(t) = x(t)^2$ für alle $t \in [0, 1]$, und berechnen Sie

$$\int_{\gamma} \sin(z) dz.$$

iii) Es seien $r > 0$ und $\gamma: [0, \pi/4] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto r \cdot \exp(it)$. Beweisen Sie:

$$\left| \int_{\gamma} \exp(i \cdot z^2) dz \right| \leq \frac{\pi \cdot (1 - \exp(-r^2))}{4r} < \frac{\pi}{4r}.$$

IV.3 Stammfunktionen

IV.3.1 Satz. Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ auf G sind folgende Aussagen äquivalent:

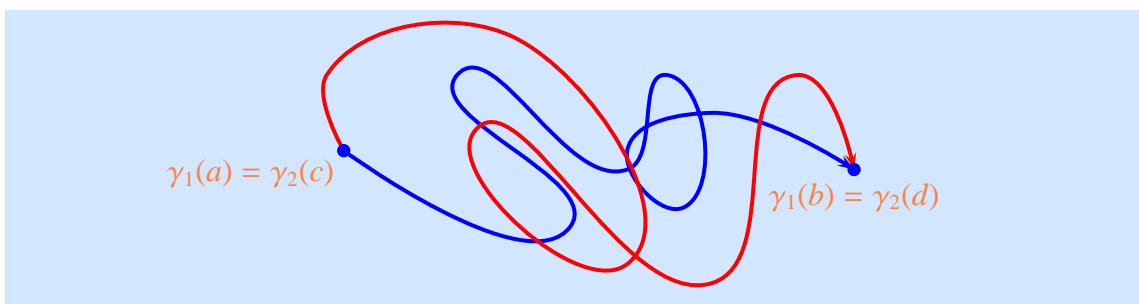
i) Die Funktion f besitzt eine Stammfunktion.

ii) Für jeden **geschlossenen** stückweise glatten Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ in G gilt

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

iii) Für je zwei stückweise glatte Wege $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ in G mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ und $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$ hat man

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$



Beweis. Die Implikation „i) \implies ii)“ haben wir bereits in Eigenschaft IV.2.6, ii), abgearbeitet. Für die Implikation „ii) \implies iii)“ führen wir zunächst die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: [b, \underbrace{d + (b - c)}_{=: \tilde{c}}] &\longrightarrow [c, d] \\ t &\longmapsto t + (c - b) \end{aligned}$$

ein und setzen

$$\tilde{\gamma}_2 := \gamma_2 \circ \varphi: [b, \bar{c}] \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Nach Eigenschaft IV.2.6, iii), haben wir

$$\int_{\gamma_2} f = \int_{\tilde{\gamma}_2} f.$$

Weiter gilt $\gamma_1(b) = \tilde{\gamma}_2(b)$. Damit haben wir nachgewiesen, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b = c$ voraussetzen dürfen. Somit ist der geschlossene stückweise glatte Weg

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}: [a, d] \longrightarrow \mathbb{C}$$

in G erklärt. Die Voraussetzung besagt

$$0 = \int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2^{-1}} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f.$$

Dabei haben wir Eigenschaft IV.2.12, i) und ii), benutzt.

„iii) \implies i)“. Für je zwei Punkte $w, z \in G$ existiert nach Definition IV.2.12 eines Gebiets und Aufgabe III.3.22, i), ein stückweise glatter Weg $\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(a) = w$ und $\gamma(b) = z$. Durch die in iii) formulierte Voraussetzung ist die Schreibweise

$$\int_w^z f := \int_{\gamma} f$$

gerechtfertigt. Wir fixieren einen Punkt $z_0 \in G$ und definieren

$$\begin{aligned} F: G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \int_{z_0}^z f. \end{aligned}$$

Behauptung. Die so definierte Funktion F ist holomorph und erfüllt

$$\forall z \in G: \quad F'(z) = f.$$

Es sei $w \in G$. Wir möchten die Differenzierbarkeit von F in w beweisen. Da das Gebiet G offen ist, existiert eine positive reelle Zahl $\varrho > 0$, so dass $B(w, \varrho) \subset G$. Für $z \in G$ haben wir

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_{z_0}^w f(\zeta) d\zeta + \int_w^z f(\zeta) d\zeta = F(w) + \int_w^z f(\zeta) d\zeta.$$

Für einen Punkt $z \in B(w, \varrho)$ können wir $\int_w^z f(\zeta) d\zeta$ mit dem Weg

$$\begin{aligned} \sigma: [0, 1] &\longrightarrow B(w, \varrho) \\ t &\longmapsto (1-t) \cdot w + t \cdot z \end{aligned}$$

ausrechnen. Offenbar gilt

$$\star \int_{\sigma} 1 = z - w.$$

$$\star L(\sigma) = |z - w|.$$

Wir finden

$$F(z) = F(w) + f(w) \cdot (z - w) + \underbrace{\int_{\sigma} (f(\zeta) - f(w)) d\zeta}_{=: r(z)}.$$

Es bleibt, $r(z)$ abzuschätzen. Da f stetig in w ist, finden wir zu einer vorgegebenen positiven reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine positive reelle Zahl $0 < \delta < \varrho$, so dass

$$\forall z \in G : |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

Die Standardabschätzung IV.2.9 zeigt nun

$$|r(z)| = \left| \int_{\sigma} (f(\zeta) - f(w)) d\zeta \right| \leq L(\sigma) \cdot \varepsilon = |z - w| \cdot \varepsilon.$$

Wir schließen

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{r(z)}{z - w} = 0$$

und damit

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{F(z) - F(w)}{z - w} = f(w).$$

Damit ist F in w differenzierbar und hat dort die Ableitung $F'(w) = f(w)$. \square

IV.3.2 Aufgaben (Wegintegrale und Stammfunktionen). i) Zeigen Sie, dass die Funktionen $z \mapsto |z|$ und $z \mapsto \bar{z}$ auf \mathbb{C} keine Stammfunktionen besitzen.

ii) Man berechne

$$\int_{\gamma} f$$

für die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$, und die Wege $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto t$, $a < b$, und $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + r \cdot \exp(i \cdot t)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Besitzt f eine Stammfunktion?

IV.4 Der Cauchy-Integralsatz

Wir stellen in diesem Abschnitt den zentralen Satz dieses Skripts vor. Aus ihm werden wir die Hauptsätze der Funktionentheorie ableiten.

Dreieckswege

IV.4.1 Definitionen. i) Drei Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ sind *kollinear*, wenn sie auf einer Geraden liegen.

ii) Es seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ drei **nicht** kollineare Punkte. Dann ist

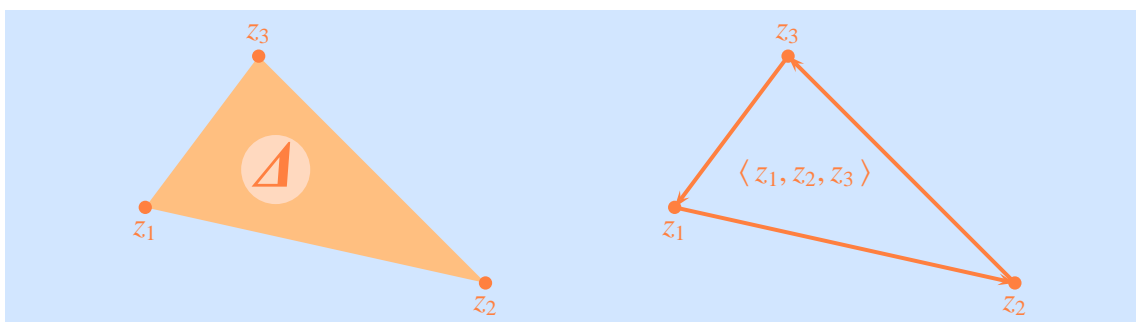
$$\Delta_{z_1, z_2, z_3} := \{ z = t_1 \cdot z_1 + t_2 \cdot z_2 + t_3 \cdot z_3 \mid t_i \in [0, 1], i = 1, 2, 3, t_1 + t_2 + t_3 = 1 \}$$

die von z_1, z_2, z_3 aufgespannte Dreiecksfläche.

iii) Drei **nicht** kollineare Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ definieren den *Dreiecksweg*

$$\langle z_1, z_2, z_3 \rangle: [0, 3] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto \begin{cases} (1-t) \cdot z_1 + t \cdot z_2, & \text{falls } 0 \leq t < 1 \\ (2-t) \cdot z_2 + (t-1) \cdot z_3, & \text{falls } 1 \leq t < 2 \\ (3-t) \cdot z_3 + (t-2) \cdot z_1, & \text{falls } 2 \leq t \leq 3 \end{cases} .$$



IV.4.2 Bemerkung. Es seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ drei nicht kollineare Punkte. Dann gilt offenkundig

$$\text{Spur}(\langle z_1, z_2, z_3 \rangle) \subset \Delta_{z_1, z_2, z_3} .$$

Der folgende Satz ist der **Cauchy-Integralsatz für Dreieckswege**.⁵ Er ist auch als **Lemma** oder **Satz von Goursat**⁶ bekannt.

IV.4.3 Satz. *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Für drei nicht kollineare Punkte $z_1, z_2, z_3 \in U$, so dass*

$$\Delta_{z_1, z_2, z_3} \subset U,$$

hat man

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f = 0.$$

Beweis. Zunächst definieren wir Folgen $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, z_3^{(n)}$ von jeweils nicht kollinearen Punkten mit zugehörigen Dreieckswegen

$$\alpha^{(n)} := \langle z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, z_3^{(n)} \rangle, \quad n \in \mathbb{N},$$

durch Rekursion:

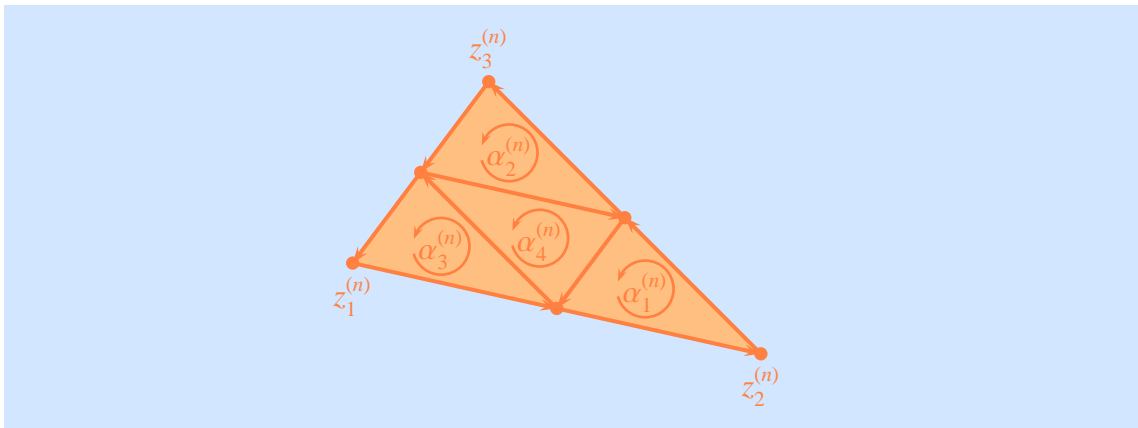
★ Es ist $z_i^{(0)} := z_i, i = 1, 2, 3$.

⁵Für Erläuterungen zur Geschichte dieses Satzes verweisen wir auf [11], §7.3 und 7.4

⁶Édouard Jean-Baptiste Goursat (1858 - 1936), französischer Mathematiker

★ Es seien $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, z_3^{(n)}$ und $\alpha^{(n)}$ bereits definiert. Wir setzen

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(n)} &:= \left\langle \frac{z_1^{(n)} + z_2^{(n)}}{2}, z_2^{(n)}, \frac{z_2^{(n)} + z_3^{(n)}}{2} \right\rangle, \\ \alpha_2^{(n)} &:= \left\langle \frac{z_2^{(n)} + z_3^{(n)}}{2}, z_3^{(n)}, \frac{z_1^{(n)} + z_3^{(n)}}{2} \right\rangle, \\ \alpha_3^{(n)} &:= \left\langle \frac{z_1^{(n)} + z_3^{(n)}}{2}, z_1^{(n)}, \frac{z_1^{(n)} + z_2^{(n)}}{2} \right\rangle, \\ \alpha_4^{(n)} &:= \left\langle \frac{z_1^{(n)} + z_2^{(n)}}{2}, \frac{z_2^{(n)} + z_3^{(n)}}{2}, \frac{z_1^{(n)} + z_3^{(n)}}{2} \right\rangle.\end{aligned}$$



Damit gilt

$$\int_{\alpha^{(n)}} f = \sum_{i=1}^4 \int_{\alpha_i^{(n)}} f.$$

Es seien $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ der kleinste Index, für den

$$\left| \int_{\alpha^{(n)}} f \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\alpha_i^{(n)}} f \right| \quad (\text{IV.1})$$

erfüllt ist und $z_1^{(n+1)}, z_2^{(n+1)}, z_3^{(n+1)}$ die Eckpunkte des Dreieckswegs $\alpha_i^{(n)}$.

Mit dieser Festlegung gilt

$$\left| \int_{\alpha} f \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\alpha^{(n)}} f \right|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Weiter sei

$$\Delta^{(n)} := \Delta_{z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, z_3^{(n)}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für diese (kompakten) Dreiecksflächen gilt:

★ $\Delta^{(0)} \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots \supset \Delta^{(n)} \supset \Delta^{(n+1)} \supset \dots$.

★ $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Diam}(\Delta^{(n)}) = 0.$ ⁷

★ Das **Schachtelungsprinzip** ([14], Satz 2.2.8) zeigt, dass es einen Punkt $z_0 \in \Delta^{(0)}$ gibt, so dass

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta^{(n)} = \{z_0\}.$$

Jetzt bringen wir die Holomorphie von f ins Spiel. Wegen der Differenzierbarkeit von f in z_0 gibt es eine stetige Funktion $r: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

★ $f(z) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot (z - z_0) + r(z), z \in U.$

★ $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0.$

Die Funktion $f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0)$ besitzt eine Stammfunktion. Daher gilt nach Satz IV.3.1

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_{\alpha^{(n)}} f = \int_{\alpha^{(n)}} r.$$

Mit (IV.1) haben wir

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \int_{\alpha} f \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\alpha^{(n)}} r \right|. \tag{IV.2}$$

Wir bereiten nun die Abschätzung des Terms auf der rechten Seite vor.

★ Die Bedingung $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0$ können wir folgendermaßen formulieren: Zu jeder positiven reellen Zahl $\varepsilon > 0$ findet man eine positive reelle Zahl $\delta > 0$, so dass

$$\forall z \in U : |z - z_0| < \delta \implies |r(z)| \leq \varepsilon \cdot |z - z_0|.$$

★ Aus der Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Diam}(\Delta^{(n)}) = 0$ folgern wir zu gegebenem $\delta > 0$ die Existenz einer natürlichen Zahl $n(\delta) \in \mathbb{N}$ mit:

$$\forall n \geq n(\delta) : \Delta^{(n)} \subset B(z_0, \delta).$$

★ $\forall n \in \mathbb{N} \forall z \in \Delta^{(n)} : |z - z_0| \leq L(\alpha^{(n)}) = (1/2^n) \cdot L(\alpha).$

Diese Beobachtungen ergeben zusammen mit der Standardabschätzung IV.2.9

$$\forall n \geq n(\delta) : \left| \int_{\alpha^{(n)}} r \right| \leq \varepsilon \cdot L(\alpha^{(n)})^2 = \varepsilon \cdot \frac{L(\alpha)^2}{4^n}.$$

Zusammengenommen finden wir

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \int_{\alpha} f \right| \leq 4^n \cdot \varepsilon \cdot \frac{L(\alpha)^2}{4^n} = \varepsilon \cdot L(\alpha)^2.$$

Da ε beliebig gewählt werden kann, folgt damit

$$\int_{\alpha} f = 0$$

wie behauptet. □

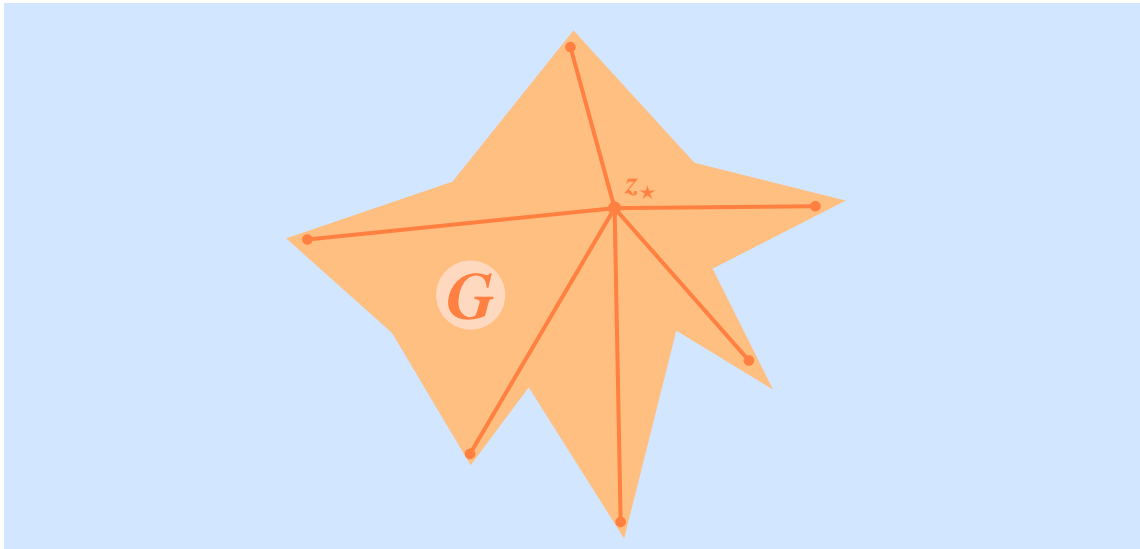
⁷Für den Begriff des **Durchmessers** verweisen wir auf [14], Definition 2.2.5, a).

Sternförmige Gebiete

IV.4.4 Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist *sternförmig*, wenn es einen Punkt $z_\star \in G$ mit der Eigenschaft

$$\forall z \in G : \{ (1-t) \cdot z_\star + t \cdot z \mid t \in [0, 1] \} \subset G \quad (\text{IV.3})$$

gibt, d.h. mit jedem Punkt $z \in G$ enthält das Gebiet G auch die Verbindungsstrecke zwischen z_\star und z .



In einem sternförmigen Gebiet G heißt ein Punkt z_\star mit Eigenschaft (IV.3) ein *Sternmittelpunkt*.

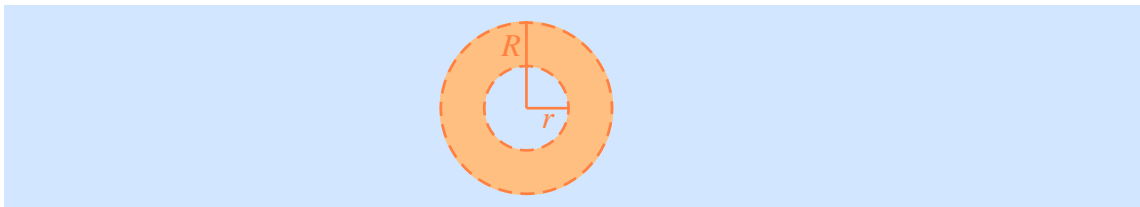


Abbildung IV.1: Ein Kreisringgebiet

IV.4.5 Beispiele. i) Jedes konvexe Gebiet ([14], S. 62f) $G \subset \mathbb{C}$ ist sternförmig, und jeder Punkt $z \in G$ ist ein Sternmittelpunkt.

ii) Für einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und eine positive reelle Zahl $r > 0$ ist die Kreisscheibe $B(z_0, r)$ konvex ([14], S. 62f) und damit sternförmig.

iii) Die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ (vgl. Folgerung III.3.17 für die Bedeutung dieses Gebiets) ist sternförmig aber nicht konvex. Die Sternmittelpunkte sind die Punkte auf der positiven reellen Achse $\mathbb{R}_{>0}$.

iv) Das Gebiet \mathbb{C}^* ist nicht sternförmig, denn für jeden Punkt $z \in \mathbb{C}^*$ enthält die Strecke

$$\{ (1-t) \cdot z + t \cdot (-z) \mid t \in [0, 1] \}$$

den Nullpunkt, der nicht im Gebiet liegt.

v) Für positive reelle Zahlen $0 < r < R$ ist das Gebiet (s. Abbildung IV.1)

$$R := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$$

nicht sternförmig.

Jetzt sind wir bereit, den **Cauchy-Integralsatz für sternförmige Gebiete** zu beweisen.

IV.4.6 Satz. *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist für jeden geschlossenen stückweise glatten Weg die Gleichung*

$$\int_{\gamma} f = 0$$

erfüllt.

Beweis. Nach Satz IV.3.1 ist die behauptete Aussage äquivalent dazu, dass f eine Stammfunktion $F: G \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt. Eine solche Stammfunktion werden wir nun konstruieren. Dazu fixieren wir einen Sternmittelpunkt $z_{\star} \in G$. Für jeden Punkt $z \in G$ können wir einen Verbindungsweg zwischen z_{\star} und z auszeichnen, und zwar die Verbindungsstrecke:

$$\begin{aligned} \sigma_z: [0, 1] &\longrightarrow G \\ t &\longmapsto (1-t) \cdot z_{\star} + t \cdot z. \end{aligned}$$

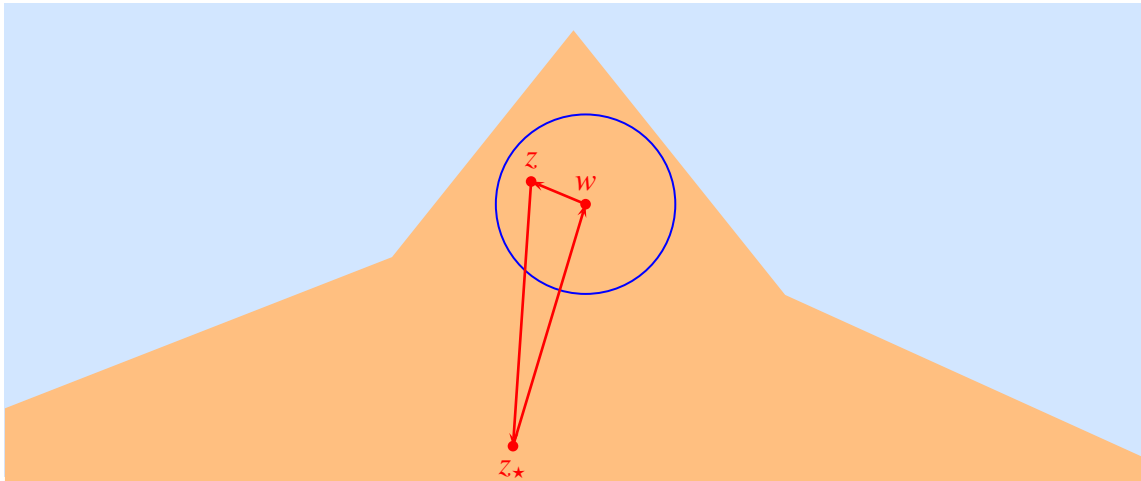
Damit erklären wir

$$\begin{aligned} F: G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \int_{\sigma_z} f. \end{aligned}$$

Wir weisen im Folgenden nach, dass F in jedem Punkt $w \in G$ differenzierbar mit Ableitung $F'(w) = f(w)$ ist. Sei also $w \in G$. Es gibt einen positiven Radius $\varrho > 0$, so dass $B(w, \varrho) \subset G$. Für $z \in B(w, \varrho)$ sei

$$\begin{aligned} \gamma_z: [0, 1] &\longrightarrow G \\ t &\longmapsto (1-t) \cdot w + t \cdot z. \end{aligned}$$

die Verbindungsstrecke zwischen w und z . Es sei $z \in B(w, \varrho)$, so dass die drei Punkte z_{\star} , w und z nicht kollinear sind. Die Dreiecksfläche $\Delta_{z_{\star}, w, z}$ ist im Gebiet G enthalten (s. Definition IV.4.1 für die verwendeten Begriffe).



Der Cauchy-Integralsatz für Dreieckswege (Satz IV.4.3) ergibt nun

$$0 = \int_{\langle z_*, w, z \rangle} f = \int_{\sigma_w} f + \int_{\gamma_z} f - \int_{\sigma_z} f,$$

d.h.

$$F(z) = F(w) + \int_{\gamma_z} f.$$

Wie im Beweis der Implikation „iii) \implies i)“ in Satz IV.3.1 schließen wir, dass F in w differenzierbar ist und die Ableitung den Wert $f(w)$ hat. \square

IV.4.7 Folgerung. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine **offene Teilmenge** und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann besitzt f **lokale Stammfunktionen**, d.h. zu jedem Punkt $z \in U$ gibt es eine offene Umgebung $z \in V \subset U$ und eine holomorphe Funktion $F: V \rightarrow \mathbb{C}$, so dass

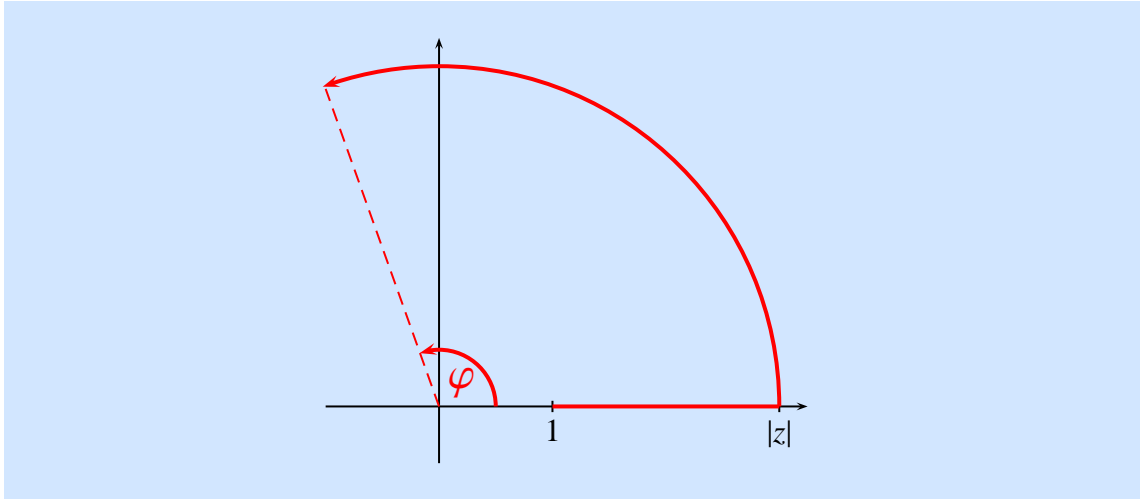
$$\forall z \in V: \quad F'(z) = f(z).$$

Beweis. Zu jedem Punkt $z \in U$ gibt es eine positive reelle Zahl $r > 0$, so dass die Kreisscheibe $B(z, r)$ in der offenen Menge U enthalten ist. Da $B(z, r)$ sternförmig ist (Beispiel IV.4.5, ii), existiert nach Satz IV.4.6 eine Stammfunktion für $f|_{B(z, r)}$. \square

IV.4.8 Beispiel. Es sei $G := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Wir benutzen das im Beweis von Satz IV.3.1 vorgestellte Verfahren und die dortigen Bezeichnungen, um eine Stammfunktion für $z \mapsto 1/z$ zu erhalten. Dies führt zu

$$F: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Wir können $F(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, mit jedem Integrationsweg, der 1 mit z verbindet, berechnen. Hier erweist sich der unten skizzierte Weg als günstig.



Es sei $z = |z| \cdot \exp(i \cdot \text{Arg}(z))$ mit $\text{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$. Wir finden

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_1^{|z|} \frac{1}{t} dt + \int_0^{\text{Arg}(z)} \frac{1}{|z| \cdot \exp(i \cdot \varphi)} \cdot i \cdot |z| \cdot \exp(i \cdot \varphi) d\varphi \\ &= \ln(|z|) + i \cdot \int_0^{\text{Arg}(z)} d\varphi \\ &= \ln(|z|) + i \cdot \text{Arg}(z). \end{aligned}$$

Die Funktion F stimmt also mit dem Hauptzweig des Logarithmus überein (Bemerkung II.6.4, iii). Damit haben wir eine weitere Eigenschaft des reellen Logarithmus ins Komplexe übertragen: Der Hauptzweig des Logarithmus ist eine Stammfunktion für die Funktion $z \mapsto 1/z$ auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.

Dieses Beispiel erinnert uns auch daran, dass der Cauchy-Integralsatz nicht für beliebige Gebiete gelten kann (s. Beispiel IV.2.7, i). Weitere Informationen sind in Aufgabe IV.4.10 enthalten.

Wir benötigen noch eine gewisse Verschärfung des Cauchy-Integralsatzes.

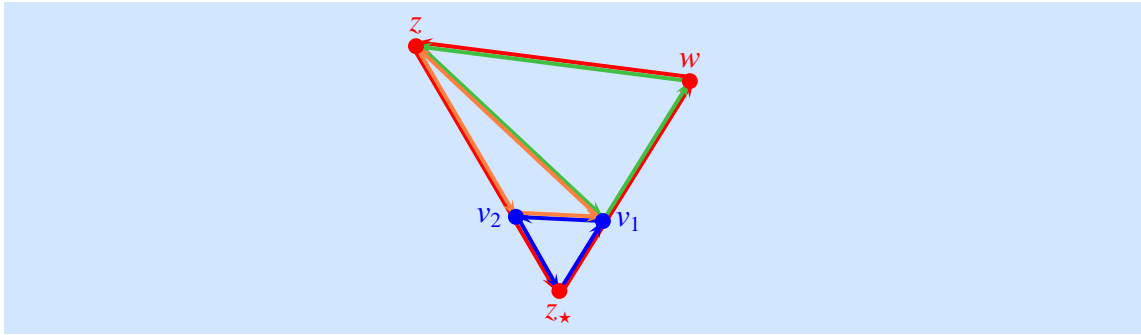
IV.4.9 Satz. *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $z_\star \in G$ ein Sternmittelpunkt und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf $G \setminus \{z_\star\}$ holomorph ist. Dann besitzt f eine Stammfunktion.*

Beweis. Wir benutzen dieselben Bezeichnungen und Konstruktionen wie im Beweis von Satz IV.4.6. Wir müssen zeigen, dass für jeden Punkt $w \in G$, jede positive reelle Zahl $r > 0$, so dass $B(w, r) \subset G$, und jeden Punkt $z \in B(w, r)$, so dass z_\star, w und z nicht kollinear sind, die Gleichung

$$\int_{\langle z_\star, w, z \rangle} f = 0$$

erfüllt ist. Wir wählen $t_1, t_2 \in (0, 1)$ und setzen

$$v_1 := (1 - t_1) \cdot z_\star + t_1 \cdot w \quad \text{sowie} \quad v_2 := (1 - t_2) \cdot z_\star + t_2 \cdot z.$$



Es gilt

$$\int_{\langle z_*, w, z \rangle} f = \int_{\langle z_*, v_1, v_2 \rangle} f + \int_{\langle v_1, w, z \rangle} f + \int_{\langle z, v_2, v_1 \rangle} f = \int_{\langle z_*, v_1, v_2 \rangle} f.$$

Die letzte Gleichung ist dabei eine Folgerung aus dem Cauchy-Integralsatz für Dreieckswege IV.4.3. Da f stetig ist, nimmt $|f|$ auf $\Delta_{\langle z_*, w, z \rangle}$ ein Maximum an. Wir können t_1 und t_2 beliebig nahe bei Null wählen, so dass der Dreiecksweg $\langle z_*, v_1, v_2 \rangle$ beliebig kurz wird. Die Standardabschätzung IV.2.9 zeigt, dass

$$\left| \int_{\langle z_*, v_1, v_2 \rangle} f \right|$$

kleiner als jede positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ ist und daher

$$\int_{\langle z_*, w, z \rangle} f = \int_{\langle z_*, v_1, v_2 \rangle} f = 0$$

gilt. □

IV.4.10 Aufgaben (Elementargebiete). i) Gegeben seien $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r < R$ und $\beta \in (0, 2\pi]$. Wir setzen

$$G := \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_0 + \varrho \cdot \zeta \cdot \exp(i \cdot \varphi), r < \varrho < R, 0 < \varphi < \beta\}.$$

Skizzieren Sie G und geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen an r , R und β an, unter denen G sternförmig ist.

ii) Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ wird als *Elementargebiet* bezeichnet, wenn jede holomorphe Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion besitzt. Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

1. Wenn G und G' Elementargebiete sind und $G \cap G'$ zusammenhängend ist, dann ist auch $G \cup G'$ ein Elementargebiet.
2. Es seien $G_n \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, Elementargebiete, so dass $G_n \subset G_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$$

ein Elementargebiet.

iii) Weisen Sie nach, dass

$$G := \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_0 + \varrho \cdot \zeta \cdot \exp(i \cdot \varphi), r < \varrho < R, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r < R$ ein Elementargebiet ist, das nicht sternförmig ist.

IV.4.11 Aufgaben (Logarithmen und Wurzeln). Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

i) Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $h: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \exp(h(z)), \quad z \in G,$$

gibt.

ii) Überprüfen Sie für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ die Existenz einer holomorphen Funktion $h: G \rightarrow \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = h(z)^n, \quad z \in G.$$

IV.4.12 Aufgabe (Zum Satz von Goursat). Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, die lokale Stammfunktionen besitze. Dann gilt für je drei verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in G$, die ein Dreieck $\Delta \subset U$ aufspannen:

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f = 0.$$

Hinweis. Sie dürfen nur die Techniken und Resultate bis zum Beweis des Satzes von Goursat verwenden.

IV.5 Die Cauchy-Integralformeln

IV.5.1 Lemma. Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $\gamma := \gamma(z_0, r)$. Für **jeden** Punkt $a \in B(z_0, r)$ gilt

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 2\pi \cdot i.$$

Beweis. **Schritt 1.** Für $a = z_0$ haben wir dies bereits berechnet (Beispiel IV.2.5, i).

Schritt 2. Es sei $a \neq z_0$. Wir wählen $0 < \varrho < r$, so dass

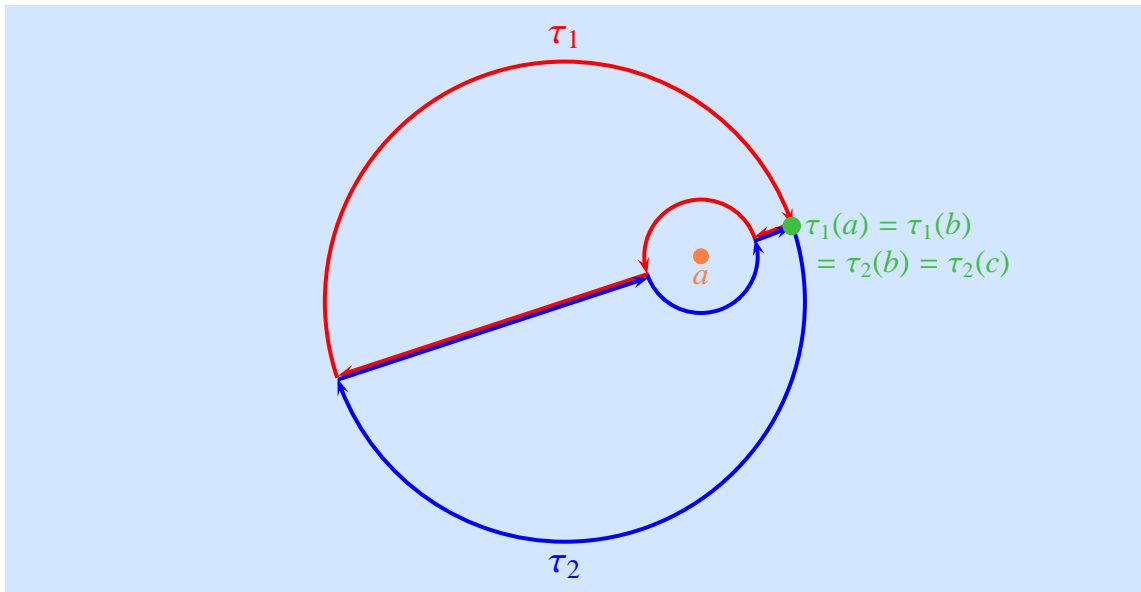
$$\overline{B(a, \varrho)} \subset B(z_0, r),$$

und setzen $\sigma := \gamma(a, \varrho)$. Das Lemma ist eine Folgerung aus der

Behauptung.

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \int_{\sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - a}.$$

Wir definieren Wege $\tau_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\tau_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ durch folgendes Bild:



Nach Eigenschaft IV.2.12, i), bestehen die Gleichungen

$$\int_{\tau_1, \tau_2} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \int_{\sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - a} - \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - a},$$

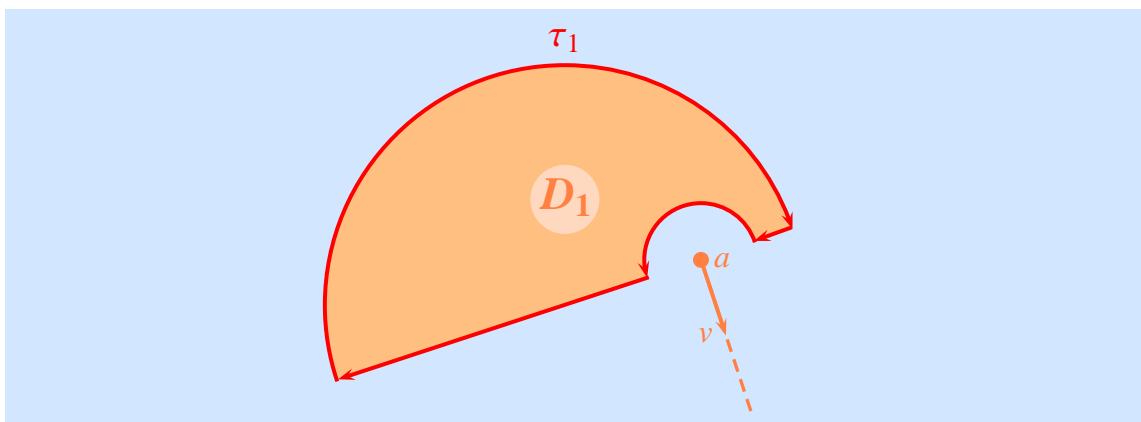
$$\int_{\tau_1, \tau_2} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \int_{\tau_1} \frac{d\zeta}{\zeta - a} + \int_{\tau_2} \frac{d\zeta}{\zeta - a}.$$

Die Behauptung ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass

$$\int_{\tau_1} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 0 = \int_{\tau_2} \frac{d\zeta}{\zeta - a}.$$

Es sei D_1 das Gebiet, das von der Spur von τ_1 begrenzt wird. Wir finden einen Vektor $v \in \mathbb{C}$, so dass

$$D_1 \cap (a + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot v) = \emptyset, \quad a + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot v := \{a + t \cdot v \in \mathbb{C} \mid t \geq 0\}.$$



Das Gebiet

$$G_1 := \mathbb{C} \setminus (a + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot v)$$

ist sternförmig (Beispiel IV.4.5, iii), und die Funktion $z \mapsto 1/(z - a)$ ist holomorph auf G_1 . Nach Satz IV.4.6 gilt

$$\int_{\tau_1} \frac{d\zeta}{z - a} = 0.$$

Entsprechend beweist man das Verschwinden des zweiten Integrals. \square

IV.5.2 Satz (Die Cauchy-Integralformel). *Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$, eine holomorphe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, und Zahlen $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ mit*

$$\overline{B(z_0, r)} \subset U$$

gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (\text{IV.4})$$

IV.5.3 Bemerkung. Die Formel (IV.4) gilt für **jeden** Punkt $z \in B(z_0, r)$. Die Werte der holomorphen Funktion f auf $B(z_0, r)$ sind durch die Werte von f auf dem Rand von $B(z_0, r)$, d.h. auf dem Kreis

$$K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\},$$

bestimmt. Dies zeigt, wie stark die gemachte Aussage ist.

Beweis von Satz IV.5.2. Wegen der Voraussetzung $\overline{B(z_0, r)} \subset U$ gibt es eine positive reelle Zahl $r' > r$, so dass $B(z_0, r') \subset U$. Wir definieren

$$g: B(z_0, r') \rightarrow \mathbb{C}$$

$$w \mapsto \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, & \text{falls } w \neq z \\ f'(w), & \text{falls } w = z \end{cases}.$$

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften:

- ★ Sie ist stetig in z , weil f in z differenzierbar ist.
- ★ Sie ist in allen Punkten $w \neq z$ differenzierbar.

Da z ein Sternmittelpunkt für das sternförmige Gebiet $B(z_0, r')$ ist, folgt aus der Verschärfung des Cauchy-Integralsatzes IV.4.9, dass

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} d\zeta = f(z) \cdot \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{z - \zeta} = -2\pi \cdot i \cdot f(z).$$

Dies ist die Cauchy-Integralformel. \square

Differenzieren unter dem Integralzeichen

IV.5.4 Satz. *Es seien $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg und $f: \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion. Für $m \in \mathbb{N}$ ist*

$$F_m: \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^m} d\zeta$$

eine holomorphe Funktion, und die Ableitung ist durch

$$F'_m = m \cdot F_{m+1}: \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto m \cdot \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta$$

gegeben.

Beweis. Schritt 1. Wir beweisen zunächst, dass F_m eine stetige Funktion ist. Die Funktion f ist nach Voraussetzung stetig, so dass $|f|$ auf der kompakten Menge $\text{Spur}(\gamma)$ ein Maximum annimmt:

$$C := \max\left\{ |f(\gamma(t))| \mid t \in [a, b] \right\}.$$

Für $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\gamma)$ finden wir

$$|F_m(z) - F_m(z_0)| \leq C \cdot \int_{\gamma} \left| \frac{1}{(\zeta - z)^m} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^m} \right| d\zeta. \quad (\text{IV.5})$$

Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta - z)^m} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^m} &= \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) \cdot \sum_{i=1}^m \frac{1}{(\zeta - z)^{m-i}} \cdot \frac{1}{(\zeta - z_0)^{i-1}} \\ &= (z - z_0) \cdot \sum_{i=1}^m \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1-i} \cdot (\zeta - z_0)^i}. \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Wir setzen

$$r_{z_0} := \min\{ |\gamma(t) - z_0| \mid t \in [a, b] \}.$$

Es seien $0 < \varepsilon < r_{z_0}$ und $z \in B(z_0, \varepsilon)$. Dann gilt

$$|\gamma(t) - z| \geq r_{z_0} - \varepsilon$$

für jede Zahl $t \in [a, b]$. Für $z \in B(z_0, \varepsilon)$, $t \in [a, b]$ und $\zeta := \gamma(t)$ gilt auch

$$\left| \sum_{i=1}^m \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1-i} \cdot (\zeta - z_0)^i} \right| \leq \frac{m}{(r_{z_0} - \varepsilon)^{m+1}}.$$

Mit (IV.5) und (IV.6) folgern wir

$$\lim_{z \rightarrow z_0} F_m(z) = F_m(z_0).$$

Schritt 2. Wie in Schritt 1 beobachten wir zunächst

$$\frac{F_m(z) - F_m(z_0)}{z - z_0} = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) \cdot (\zeta - z_0)^{-i}}{(\zeta - z)^{m+1-i}} d\zeta. \quad (\text{IV.7})$$

Jetzt können wir Schritt 1 auf die Funktionen

$$\begin{aligned} \text{Spur}(\gamma) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\longmapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^i}, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

anwenden. Jeder Integralausdruck auf der rechten Seite von (IV.7) ist folglich stetig, und wir sehen

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F_m(z) - F_m(z_0)}{z - z_0} = \sum_{i=1}^m \lim_{z \rightarrow z_0} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) \cdot (\zeta - z_0)^{-i}}{(\zeta - z)^{m+1-i}} d\zeta = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta = m \cdot F_{m+1}(z_0)$$

und haben damit die Behauptung bewiesen. \square

Wir können diesen Satz auf holomorphe Funktionen anwenden. Dabei verwenden wir folgende Sprechweise:

IV.5.5 Definitionen. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

- i) Die Funktion f ist *0-mal differenzierbar* und $f^{(0)}(z) := f(z)$, $z \in U$.
- ii) Die Funktion f ist *1-mal differenzierbar*, wenn sie holomorph ist. In diesem Fall ist $f^{(1)}(z) := f'(z)$, $z \in U$.
- iii) Es sei $n \geq 2$. Die Funktion f ist *n-mal differenzierbar*, wenn sie $(n-1)$ -mal differenzierbar und die Funktion $f^{(n-1)}: U \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f^{(n-1)}(z)$, holomorph ist. In diesem Fall definiert man $f^{(n)}(z) := (f^{(n-1)})'(z)$, $z \in U$.
- iv) Die Funktion f ist *unendlich oft differenzierbar*, wenn sie für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ n -mal differenzierbar ist.

IV.5.6 Satz (Verallgemeinerte Cauchy-Integralformel). *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine **holomorphe** Funktion. Dann ist f unendlich oft differenzierbar. Für $z_0 \in U$, $r > 0$ mit $\overline{B}(z_0, r) \subset U$, $z \in B(z_0, r)$ und $n \geq 1$ gilt dabei*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Beweis. Wir wenden Satz IV.5.4 auf

$$f|_{\text{Spur}(\gamma(z_0, r))}: \text{Spur}(\gamma(z_0, r)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

an. \square

Ganze Funktionen

IV.5.7 Definition. Eine *ganze Funktion* ist eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

IV.5.8 Beispiele. Beispiele für ganze Funktionen sind polynomiale Funktionen (Beispiel III.3.11, i), \exp , \sin und \cos

IV.5.9 Satz (Liouville⁸). *Eine ganze Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist entweder konstant oder unbeschränkt, d.h. für jede positive reelle Zahl $C > 0$ existiert ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|f(z)| > C$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass f beschränkt ist. Es gibt dann eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq C.$$

Wir wenden die Cauchy-Integralformel IV.5.2 auf die Ableitung von f an:

$$\forall z \in \mathbb{C} \forall r > 0 : f'(z) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(z,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Die Standardabschätzung IV.2.9 impliziert

$$\forall z \in \mathbb{C} \forall r > 0 : |f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{C}{r^2} \cdot 2\pi \cdot r = \frac{C}{r}.$$

Es folgt

$$\forall z \in \mathbb{C} : f'(z) = 0.$$

Nach Satz III.3.23 ist f konstant. □

IV.5.10 Beispiel. In der reellen Analysis ist die Kosinusfunktion $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Ihre Fortsetzung als ganze Funktion $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist unbeschränkt. In der Tat gilt nach Satz II.5.6

$$\forall \varphi \in \mathbb{R} : \cos(i \cdot \varphi) = \frac{\exp(\varphi) + \exp(-\varphi)}{2},$$

so dass

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \cos(i \cdot \varphi) = \infty.$$

Die Bedeutung des Satzes von Liouville wird dadurch illustriert, dass er den **Fundamentalsatz der Algebra** impliziert:

IV.5.11 Satz (Der Fundamentalsatz der Algebra). *Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen, d.h. für $n \geq 1$ und komplexe Zahlen $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$ gibt es eine komplexe Zahl ζ , so dass*

$$a_0 + a_1 \cdot \zeta + \dots + a_{n-1} \cdot \zeta^{n-1} + a_n \cdot \zeta^n = 0.$$

Beweis. Zu komplexen Zahlen $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$ betrachten wir die polynomiale Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_n \cdot z^n. \end{aligned}$$

⁸Joseph Liouville (1809 - 1882), französischer Mathematiker.

Man beachte

$$\forall z \in \mathbb{C}^* : \left| \frac{f(z)}{z^n} \right| \geq \left| |a_n| - \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{z^{n-i}} \right| \right|.$$

Man erkennt daran leicht, dass es zu $0 < \varepsilon < |a_n|$ ein $r > 0$ mit

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z| > r \implies \left| \frac{f(z)}{z^n} \right| \geq |a_n| - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{|z|^{n-i}} > |a_n| - \varepsilon$$

gibt. Es folgt

$$\forall C > 0 \exists r > 0 \forall z \in \mathbb{C} : |z| > r \implies |f(z)| > C.$$

Wir fixieren eine Konstante $C > 0$ und eine passende positive reelle Zahl $r > 0$ und setzen voraus, dass f keine Nullstelle besitzt. Da $\overline{B(0, r)}$ kompakt ist, existiert dann eine positive reelle Zahl $C' > 0$ mit

$$\forall z \in \overline{B(0, r)} : |f(z)| > C'.$$

Die Funktion

$$h: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{1}{f(z)}$$

ist holomorph, und $|h|$ ist durch $\max\{1/C, 1/C'\}$ nach oben beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist h konstant. Dann ist f selber konstant. Dies widerspricht allerdings den Voraussetzungen. \square

Der Satz von Morera

Zum Abschluss unserer Diskussion des Cauchy-Integralsatzes und der Cauchy-Integralformeln besprechen wir einen Satz, der den Cauchy-Integralsatz für Dreieckswege IV.4.3 umkehrt.

IV.5.12 Satz (Morera⁹). *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Für je drei nicht kollineare Punkte $z_1, z_2, z_3 \in U$ mit $\Delta_{z_1, z_2, z_3} \subset U$ gelte*

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f = 0.$$

Dann ist f holomorph.

Beweis. Es seien $z_0 \in U$ und $r > 0$ eine positive reelle Zahl mit $B(z_0, r) \subset U$. Bei $B(z_0, r)$ handelt es sich um ein sternförmiges Gebiet, und wie im Beweis von Satz IV.4.6 zeigt man, dass es eine holomorphe Funktion $F: B(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$\forall z \in B(z_0, r) : F'(z) = f(z).$$

Die verallgemeinerte Cauchy-Integralformel IV.5.6, auf F angewandt, impliziert, dass $f|_{B(z_0, r)}$ holomorph ist. Damit ist f gemäß Definition III.6.1, ii), holomorph in z_0 . Da z_0 beliebig gewählt werden kann, ist der Satz bewiesen. \square

⁹Giacinto Morera (1856–1909), italienischer Ingenieur und Mathematiker.

IV.5.13 Aufgaben (Wegintegrale). Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei $\gamma(z_0, r): [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto z_0 + r \cdot \exp(i \cdot \varphi)$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i)

$$\int_{\gamma(0,2)} \frac{\sin(\zeta)}{\zeta + i} d\zeta.$$

ii)

$$\int_{\gamma(3/2,1)} \frac{\exp(\zeta)}{\zeta \cdot (\zeta - 1)^3} d\zeta.$$

iii)

$$\int_{\gamma(0,r)} \frac{1}{(\zeta - a)^m \cdot (\zeta - b)^n} d\zeta, \quad |a| < r < |b| \text{ und } m, n \in \mathbb{N}.$$

IV.6 Potenzreihen

Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $a \in U$. Da f in a nach Satz IV.5.6 unendlich oft differenzierbar ist, können wir die **Taylorreihe** von f mit Entwicklungspunkt a als

$$T_{f,a}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (z - a)^k \quad (\text{IV.8})$$

erklären. Um unser Bild von holomorphen Funktionen zu vervollständigen, werden wir zeigen, dass

- ★ $T_{f,a}(z)$ einen positiven Konvergenzradius hat,
- ★ in einer Umgebung von a gegen f konvergiert.

Gleichmäßige Konvergenz

IV.6.1 Definition. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen.

i) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen f , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall z \in D: |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

ii) Die *unendliche Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

ist die Folge

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad u_n = \sum_{k=0}^n f_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sie *konvergiert gleichmäßig* gegen f , wenn die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

IV.6.2 Satz. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen. Wenn die Funktionen f_n , $n \in \mathbb{N}$, stetig sind und die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **gleichmäßig** gegen f konvergiert, dann ist auch f stetig.*

Beweis. Für jedes $a \in D$ müssen wir

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$$

nachweisen. Seien dazu $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

und $\varepsilon > 0$.

- ★ Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon/3$, $z \in D$, $n \geq n_0$.
- ★ Da f_{n_0} in a stetig ist, gibt es ein $n_1 \geq n_0$ mit $|f_{n_0}(z_n) - f_{n_0}(a)| < \varepsilon/3$, $n \geq n_1$.

Für $n \geq n_1$ haben wir dann

$$|f(z_n) - f(a)| \leq \underbrace{|f(z_n) - f_{n_0}(z_n)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(z_n) - f_{n_0}(a)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(a) - f(a)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

Es folgt die Behauptung. □

IV.6.3 Satz (Weierstraßscher¹⁰ Majorantentest). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ und $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen. Es gebe eine Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen, so dass*

- ★ $\forall n \in \mathbb{N} \forall z \in D: |f_n(z)| \leq M_n$.
- ★ $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ konvergiert.

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig.

Beweis. Schritt 1. Es sei

$$u_n := \sum_{k=0}^n f_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für jedes $z \in D$ ist $(u_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge komplexer Zahlen. In der Tat gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0 , so dass

$$\forall n_0 \leq m < n: \sum_{k=m+1}^n M_k < \varepsilon.$$

Damit folgt

$$\forall n_0 \leq m < n: |u_n(z) - u_m(z)| \leq |f_{m+1}(z)| + \dots + |f_n(z)| \leq M_{m+1} + \dots + M_n < \varepsilon.$$

¹⁰Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815 - 1897), deutscher Mathematiker

Schritt 2. Wir erhalten die Funktion

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z). \end{aligned}$$

Es seien $\varepsilon > 0$, n_0 wie in Schritt 1, $n \geq n_0$ und $z \in D$. Dann haben wir

$$|f(z) - u_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} M_k \leq \varepsilon.$$

Dies zeigt die gleichmäßige Konvergenz. \square

IV.6.4 Lemma. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen. Wenn die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **gleichmäßig** gegen die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f$$

für jeden stückweise glatten Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ in D .

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_0 \forall z \in D: |f(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Für $n \geq n_0$ erhalten wir die Ungleichung

$$\left| \int_{\gamma} f_n - \int_{\gamma} f \right| \leq \int_{\gamma} |f_n - f| \leq \varepsilon \cdot L(\gamma).$$

aus der Standardabschätzung IV.2.9. \square

IV.6.5 Definition. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen. Wir sagen, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **lokal gleichmäßig** gegen f konvergiert, wenn zu jedem Punkt $z \in U$ eine positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $B(z, \varepsilon)$ gleichmäßig gegen $f|_{B(z, \varepsilon)}$ konvergiert.

IV.6.6 Satz (Weierstraß). Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen. Wenn $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist, $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **lokal gleichmäßig** gegen f konvergiert, dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls holomorph. Weiter konvergiert die Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Ableitungen lokal gleichmäßig gegen die Ableitung f' .

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **gleichmäßig** gegen f konvergiert. Die Holomorphie der Grenzfunktion f weisen wir mit dem Satz von Morera IV.5.12 nach. Es seien $z_1, z_2, z_3 \in U$ drei nicht kollineare Punkte mit $\Delta_{z_1, z_2, z_3} \subset U$. Mit Lemma IV.6.4 berechnen wir

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f_n = 0.$$

Die zweite Gleichung ergibt sich durch Anwendung des Cauchy-Integralsatzes für Dreieckswege auf die holomorphe Funktion f_n , $n \in \mathbb{N}$.

Für die Aussage über die Ableitung benutzen wir die verallgemeinerte Cauchy-Integralformel IV.5.6 : Für $z_0 \in U$, $r > 0$ mit $\overline{B(z_0, r)} \subset U$ und $z \in B(z_0, r)$ haben wir

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Wir wählen $0 < \varrho < r$. Für einen Punkt $z \in B(z_0, \varrho)$ und $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta - z_0| = r$ gilt die Abschätzung

$$\left| \frac{f(z)}{(\zeta - z)^2} - \frac{f_n(z)}{(\zeta - z)^2} \right| \leq \frac{|f(z) - f_n(z)|}{|r - \varrho|^2}.$$

Jetzt geben wir eine positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ vor. Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 \forall z \in B(z_0, \varrho) : |f(z) - f_n(z)| < \varepsilon \cdot \frac{|r - \varrho|^2}{r}.$$

Die obigen Beobachtungen zusammen mit der Standardabschätzung IV.2.9 ergeben

$$\forall n \geq n_0 \forall z \in B(z_0, \varrho) \quad |f'(z) - f'_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \int_{\gamma(z_0, r)} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi \cdot r = \varepsilon.$$

Die Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert somit auf $B(z_0, \varrho)$ gleichmäßig gegen f' . □

IV.6.7 Beispiel (Die riemannsche ζ -Funktion). Für $n \geq 1$ ist

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto n^s = \exp(s \cdot \ln(n)) \end{aligned}$$

eine ganze Funktion. Schreibt man $s = \sigma + \tau \cdot i$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, dann findet man

$$|n^s| = \exp(\sigma \cdot \ln(n)) = n^\sigma.$$

Behauptung. Für $\delta > 0$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f_k}$$

auf der Menge

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1 + \delta\}$$

gleichmäßig.

In der Tat hat man

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^\sigma} < \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

für $s = \sigma + \tau \cdot i$ mit $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 1 + \delta$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n^{1+\delta}$ konvergiert ([13], Beispiel 5.6.10, i), so dass sich die Behauptung aus dem weierstraßschen Majorantentest IV.6.3 ergibt.

Die Funktion

$$\zeta: U := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$s \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ist daher holomorph.

Die Eigenschaften der riemannschen ζ -Funktion geben interessante Auskünfte über die Verteilung der Primzahlen. Eines der wichtigsten offenen Probleme der Mathematik ist die **riemannsche Vermutung**, die etwas über die Nullstellen der ζ -Funktion aussagt und tiefgreifende Anwendungen in der Zahlentheorie hat. Für genauere Angaben sei auf Kapitel 4 in [12] verwiesen.

Mit dem folgenden Satz erreichen wir die zu Beginn des Abschnitts formulierten Ziele. Die anschließende Folgerung enthält sehr präzise Informationen über das Konvergenzverhalten der Taylorreihe.

IV.6.8 Satz. *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Für einen Entwicklungspunkt $a \in U$, einen Radius $r > 0$ mit $\overline{B(a, r)} \subset U$ gilt*

$$\forall z \in B(a, r): \quad f(z) = T_{f,a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (z - a)^k.$$

Beweis. Wir benutzen die verallgemeinerte Cauchy-Integralformel IV.5.6

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall z \in B(z_0, r): \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Damit können wir für $z \in B(z_0, r)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot (z - z_0)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^k \quad (\text{IV.9}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(z_0, r)} \frac{f(\zeta) \cdot (z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) \end{aligned}$$

schreiben. Um fortzufahren, müssen wir die Summation und die Integration miteinander vertauschen. Dazu sei

$$C := \max \left\{ |f(\zeta)| \mid |\zeta - z_0| = r \right\}.$$

Dann

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall z \in B(z_0, r) \forall \zeta \in \mathbb{C}: \quad |\zeta - z_0| = r \implies \left| \frac{f(\zeta) \cdot (z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{C}{r} \cdot \underbrace{\left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n}_{=: q}.$$

Für festes $z \in B(z_0, r)$ zeigt diese Gleichung wegen $q < 1$, dass die Reihe auf $\operatorname{Spur}(\gamma)$ gleichmäßig konvergiert. Demnach können wir (IV.9) durch

$$\frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma(z_0, r)} \frac{f(\zeta) \cdot (z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k} \right) d\zeta \quad (\text{IV.10})$$

fortführen. Weiter gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z}.$$

In (IV.10) haben wir somit

$$\frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma(z_0, r)} \frac{f(\zeta) \cdot (z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z).$$

Mit (IV.9) ergibt sich die Behauptung. □

IV.6.9 Folgerung. *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Für $z \in U$ setze man*

$$R_z := \inf \{ |w - z| \mid w \in \mathbb{C} \setminus U \}.$$

Dann konvergiert die Taylorreihe $T_{f,a}(z)$ für jeden Punkt $a \in U$ auf der offenen Kreisscheibe $B(a, R_a)$. Für eine ganze Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert die Taylorreihe $T_{f,0}(z)$ auf ganz \mathbb{C} .

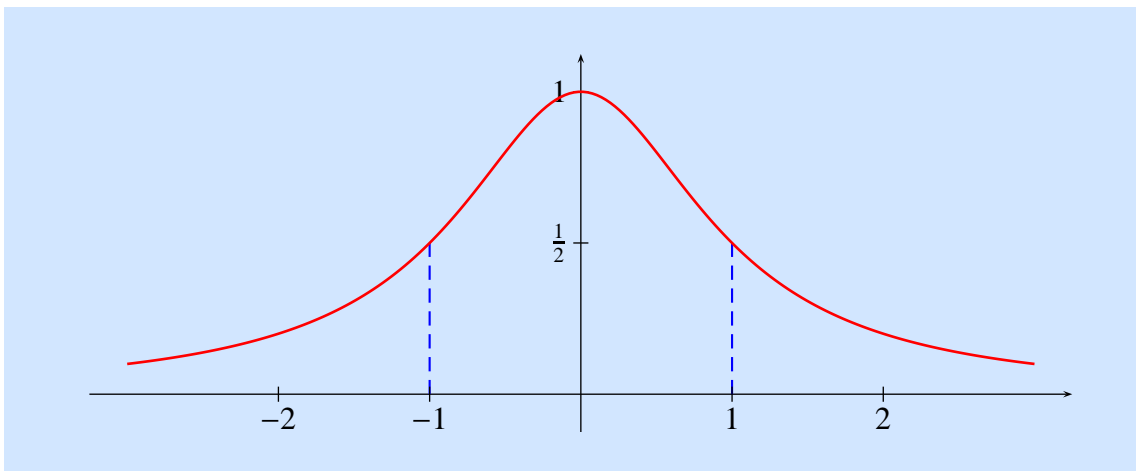
IV.6.10 Beispiele. i) Wir untersuchen die unendlich oft differenzierbare reelle Funktion

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

Die Taylorreihe dieser Funktion mit Entwicklungspunkt 0 ist

$$T_{\varphi,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^{2k}.$$

Mit den üblichen Methoden (vgl. Beispiel II.3.10) lässt sich überprüfen, dass $T_{\varphi,0}(x)$ genau für die Punkte $x \in (-1, 1)$ konvergiert. Allerdings lässt sich dieses Ergebnis — anders als etwa bei der Funktion $x \mapsto 1/(1 - x^2)$, $x \in (-1, 1)$ — nicht anschaulich mit dem Funktionsgraphen



begründen. Wir können die Funktion holomorph fortsetzen zu der Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \frac{1}{1+z^2}.$$

Die zugehörige Taylorreihe

$$T_{f,0}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{2k}$$

am Entwicklungspunkt 0 hat nach Folgerung IV.6.9 Konvergenzradius mindestens eins. Auf Grund der Polstellen bei $\pm i$ kann er nicht größer als eins sein. Die Existenz der Polstellen gibt uns also eine anschauliche Erklärung für den Wert des Konvergenzradius. Dieses Beispiel zeigt, wie die komplexe Analysis hilft, gewisse Phänome in der reellen Analysis besser zu verstehen.

ii) Für den Hauptzweig des Logarithmus (s. Folgerung III.3.17)

$$\text{Log}: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

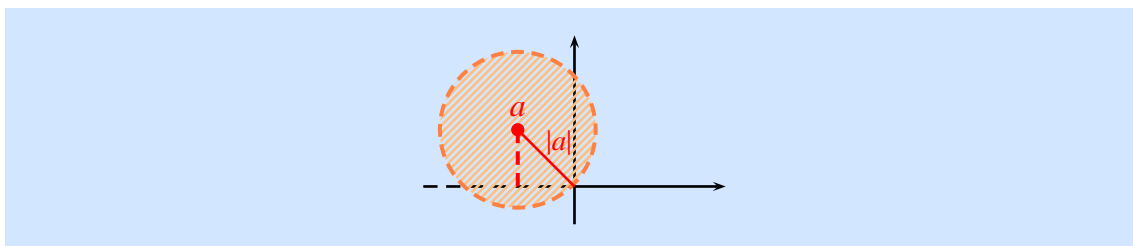
erhält man durch Taylorentwicklung am Punkt $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ die Reihe¹¹

$$\text{Log}(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot a^k} \cdot (z-a)^k.$$

Der Konvergenzradius ist $|a|$. Man beachte hier, dass für $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ mit $\text{Re}(a) < 0$

$$|a| > |\text{Im}(a)| = \inf\{|z-a| \mid z \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$$

gilt.



Dies ist folgendermaßen zu verstehen: Z.B. auf dem Gebiet

$$\mathbb{C}^+ := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$$

ist eine Logarithmusfunktion $\widetilde{\text{Log}}$ definiert, die auf der oberen Halbebene \mathbb{H} mit dem Hauptzweig des Logarithmus übereinstimmt, sich von diesem aber auf der negativen Halbebene $\mathbb{H}_- := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$ um $2\pi \cdot i$ unterscheidet. Die Taylorreihe $T_{f,a}(z)$ konvergiert auf der Kreisscheibe $B(a, |a|)$ gegen $\widetilde{\text{Log}}$.

¹¹Im Falle $a = 1$ führt dies auf die in Beispiel II.3.10, iii), betrachtete logarithmische Reihe $\text{Log}(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot z^k / k$.

IV.6.11 Aufgabe (Lokal gleichmäßige Konvergenz). Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f_k: U \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Zeigen Sie: Wenn die Folge von Funktionen $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert, dann konvergiert auch die Folge $(f_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ der n -ten Ableitungen lokal gleichmäßig gegen $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

IV.6.12 Aufgaben (Taylorreihen). i) Es sei

$$f(z) := \frac{1}{z^2 - 5z + 6}.$$

Auf welcher offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist f definiert? Geben Sie die Taylorreihe von f im Nullpunkt an und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

Hinweis. Schreiben Sie f in der Form

$$f(z) = \frac{1}{z - a} - \frac{1}{z - b}$$

für geeignete $a, b \in \mathbb{C}$.

ii) Sei $a \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $z \mapsto 1/(z - a)$ in einem beliebigen Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Benutzen Sie das Ergebnis, um die Taylorreihe der Funktion f aus i) in einem beliebigen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ zu ermitteln. Geben Sie auch den Konvergenzradius der entsprechenden Potenzreihe an.

IV.7 Der Identitätssatz

IV.7.1 Satz. Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Folgende Bedingungen an f sind äquivalent:

- i) Die Funktion f ist die Nullfunktion, d.h. $f(z) = 0$, $z \in G$.
- ii) Die Menge

$$N := \{z \in G \mid f(z) = 0\}$$

der Nullstellen von f hat einen Häufungspunkt in G .

- iii) Es gibt einen Punkt $a \in G$, so dass $f^{(n)}(a) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

IV.7.2 Bemerkung. In Bedingung ii) ist wesentlich, dass es einen Häufungspunkt **innerhalb** des Gebiets G gibt. So häufen sich z.B. die Nullstellen der Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

im Nullpunkt ([13], Beispiel 4.8.16, ii), der nicht im Gebiet \mathbb{C}^* enthalten ist, ohne dass es sich bei dieser Funktion um die Nullfunktion handelt.

Wir benötigen weitere Vorbereitungen für den Beweis von Satz IV.7.1.

IV.7.3 Definition. Es sei (X, \mathcal{T}) ein **topologischer Raum**.¹² Man nennt X **zusammenhängend**, wenn

$$\forall A \in \mathcal{T} : X \setminus A \in \mathcal{T} \implies (A \neq \emptyset \iff X \setminus A = \emptyset),$$

d.h. die einzigen Mengen, die in X sowohl offen als auch abgeschlossen sind, sind die leere Menge und der Raum X selber.

¹²[14], Definition 1.4.1, b)

IV.7.4 Satz. Für zwei reelle Zahlen $a < b$ ist das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ zusammenhängend.

Beweis. Es sei $A \subset [a, b]$ eine Teilmenge, die bzgl. der **Teilraumtopologie**¹³ sowohl abgeschlossen als auch offen ist. Wir nehmen an, dass A nichtleer ist, und wählen einen Punkt $c \in A$.

Wir zeigen zunächst

$$[c, b] \subset A.$$

Dabei dürfen wir voraussetzen, dass $c < b$, denn andernfalls ist die Aussage trivial. Dann existiert eine positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ mit

$$[c, c + \varepsilon) \subset A,$$

weil A offen ist. Es sei weiter

$$B := \{\varrho > 0 \mid [c, c + \varrho) \subset A\}.$$

Diese Menge ist nichtleer, sie enthält z.B. das Element ε , und durch $b - c$ nach oben beschränkt. Sie besitzt demnach ein Supremum ([13], Satz 1.7.6), welches wir r nennen. Wir bemerken

$$[c, c + r) \subset A.$$

Wäre $c + r' \notin A$ für ein $r' \in (0, r)$, so wäre B durch r' beschränkt und es folgte $r \leq r'$.

Da A auch abgeschlossen ist, folgt

$$[c, c + r] \subset A.$$

Wäre $c + r < b$, dann könnten wir auf Grund der Offenheit von A eine positive reelle Zahl $\delta > 0$ mit

$$[c + r, c + r + \delta) \subset A$$

finden. Die sich ergebende Folgerung

$$[c, c + r + \delta) \subset A$$

steht im Widerspruch zur Definition von r .

Mit entsprechenden Argumenten zeigt man

$$[a, c] \subset A$$

und damit $A = [a, b]$. □

IV.7.5 Folgerung. Jede wegzusammenhängende Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ ist zusammenhängend. Insbesondere ist jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend.

Beweis. Es seien $A \subset D$ eine Teilmenge, die bzgl. der Teilraumtopologie sowohl offen als auch abgeschlossen ist, und $B := D \setminus A$ ihr Komplement. Wir nehmen an, dass A nichtleer

¹³[14], Beispiel 1.4.2, iv)

ist und wählen einen Punkt $c \in A$. Für jeden Punkt $z \in D$ können wir nach Definition III.3.18, iv), einen Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ in D mit

$$\gamma(a) = c \quad \text{und} \quad \gamma(b) = z$$

wählen. Die Stetigkeit von γ impliziert, dass $U := \gamma^{-1}(A)$ und $V := \gamma^{-1}(B)$ offen sind ([14], Aufgabe A.4.1). Weiter gilt

$$[a, b] \setminus U = V \quad \text{wegen} \quad D \setminus A = B$$

und $U \neq \emptyset$ wegen $a \in U$. Satz IV.7.4 zeigt somit $U = [a, b]$. Es folgt

$$z = \gamma(b) \in A.$$

Wir haben also $A = D$ gezeigt. □

IV.7.6 Aufgabe. Ein topologischer Raum X ist *lokal wegzusammenhängend*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Teilmenge $U \subset X$ gibt, die x enthält und wegzusammenhängend ist. Beweisen Sie, dass ein topologischer Raum, der zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, auch wegzusammenhängend ist. Folgern Sie, dass für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ die Eigenschaften „zusammenhängend“ und „wegzusammenhängend“ äquivalent sind.

Beweis von Satz IV.7.1. Die Implikation „i) \implies ii)“ ist trivial. Für die umgekehrte Implikation „ii) \implies iii)“ wählen wir einen Häufungspunkt $a \in G$ von N und behaupten

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad f^{(n)}(a) = 0.$$

Es sei $(a_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$a_l \in N \setminus \{a\} \quad \text{und} \quad \lim_{l \rightarrow \infty} a_l = a.$$

Die Behauptung beweisen wir nun durch Induktion über n .

$n = 0$. Da f im Punkt a stetig ist (Lemma III.3.7), gilt

$$f(a) = \lim_{l \rightarrow \infty} f(a_l) \stackrel{a_l \in N, l \in \mathbb{N}}{=} 0.$$

$n \rightarrow n + 1$. Es sei

$$T_{f,a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot (z - a)^k, \quad \alpha_k := \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren

$$g: G \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}, & \text{falls } z \neq a \\ \alpha_{n+1}, & \text{falls } z = a \end{cases}.$$

Die Funktion g ist offenbar auf $G \setminus \{a\}$ holomorph. Es sei ϱ der Konvergenzradius der Taylorreihe $T_{f,a}(z)$. Auf $B(a, \varrho)$ ist g durch die Zuordnung

$$z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n+1+k} \cdot (z-a)^k$$

gegeben. Deshalb ist g auch in a holomorph.

Man beachte

$$\forall z \in G : f(z) = (z-a)^{n+1} \cdot g(z).$$

Aus $a_l \neq a, l \in \mathbb{N}$, ergibt sich

$$\forall l \in \mathbb{N} : g(a_l) = 0.$$

Wie beim Induktionsanfang liefert die Stetigkeit von g in a

$$\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} = \alpha_{n+1} = g(a) = \lim_{l \rightarrow \infty} g(a_l) = 0.$$

„iii) \implies i)“. Wir führen die Menge

$$A := \{w \in G \mid \forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(w) = 0\}$$

ein und werden zeigen, dass sie sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Da weiter $a \in A$, zeigt Folgerung IV.7.5 $A = G$. Damit ist f die Nullfunktion.

Die Menge A ist genau dann abgeschlossen, wenn das Komplement $B := G \setminus A$ offen ist. Es gilt

$$B = \{w \in G \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} : f^{(n_0)}(w) \neq 0\}.$$

Es seien $b \in B$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $f^{(n_0)}(b) \neq 0$. Die Funktion $f^{(n_0)}$ ist holomorph und damit insbesondere stetig. Es gibt daher eine offene Umgebung $U \subset G$ von b mit

$$\forall z \in U : f^{(n_0)}(z) \neq 0.$$

Damit gilt offenbar

$$U \subset B.$$

Jetzt weisen wir nach, dass A offen ist. Wir wählen dazu $c \in A$ und betrachten die Taylorreihe $T_{f,c}(z)$ von f mit Entwicklungspunkt c . Nach Satz IV.6.8 existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $T_{f,c}(z)$ auf der offenen Kreisscheibe $B(c, \varepsilon)$ gegen f konvergiert. Aus $c \in A$ folgt, dass $T_{f,c}(z)$ die Nullreihe ist. Wir erkennen

$$\forall z \in B(c, \varepsilon) : f(z) = 0 \quad \text{und} \quad B(c, \varepsilon) \subset A.$$

Der Satz ist nun vollständig bewiesen. □

IV.7.7 Folgerung (Der Identitätssatz). *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- i) Die Funktionen f und g sind gleich: $\forall z \in G : f(z) = g(z)$.
- ii) Die Menge

$$K := \{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$$

hat einen Häufungspunkt in G .

- iii) Es gibt einen Punkt $a \in G$ mit der Eigenschaft:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a).$$

Beweis. Man wendet Satz IV.7.1 auf die Funktion $f - g$ an. □

IV.7.8 Bemerkungen (Holomorphe Fortsetzungen reeller Funktionen). i) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein (offenes, halboffenes oder abgeschlossenes) Intervall positiver Länge, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, welches I enthält. Dann gibt es höchstens eine holomorphe Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, so dass

$$\forall x \in I: f(x) = \varphi(x).$$

Das ist eine Folgerung aus dem Identitätssatz, weil I einen Häufungspunkt in I hat.

ii) Mit der komplexen Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ haben wir eine Fortsetzung der reellen Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gefunden. Nach i) ist sie die einzig mögliche. Die Funktionalgleichung der komplexen Exponentialfunktion können wir nun mit Hilfe des Identitätssatzes aus derjenigen für die reelle Funktion ableiten. Dazu fixieren wir eine komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ und bilden die ganzen Funktionen

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \exp(w + z), \\ g: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \exp(w) \cdot \exp(z). \end{aligned}$$

Wir nehmen zunächst $w \in \mathbb{R}$ an. Die Funktionalgleichung der reellen Exponentialfunktion ([13], Satz 3.8.12) bedeutet, dass f und g auf der reellen Achse übereinstimmen und damit nach dem Identitätssatz identisch sind. Die Funktionalgleichung für die reelle Exponentialfunktion gilt damit, sobald eine der beiden beteiligten Zahlen reell ist.

Jetzt sei $w \in \mathbb{C}$. Die vorangehende Diskussion zeigt, dass f und g auch in diesem Fall auf der reellen Achse und damit a posteriori überall übereinstimmen. Die Funktionalgleichung gilt somit für zwei beliebige komplexe Zahlen.¹⁴

iii) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall positiver Länge und $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gibt es genau dann ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $I \subset G$ und eine holomorphe Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $f(x) = \varphi(x)$, $x \in I$, wenn φ **reell analytisch** (s. Bemerkung II.3.4) ist.

Wenn eine holomorphe Fortsetzung existiert, konvergiert die Taylorreihe $T_{f,a}(z)$ ¹⁵ in einer geeigneten offenen Umgebung von x gegen f , so dass $T_{\varphi,a}(x)$ auf einem Teilintervall positiver Länge von I , welches a enthält, gegen φ konvergiert, $a \in I$. Folglich ist φ reell analytisch.

Wenn umgekehrt φ reell analytisch ist, dann existiert zu jedem Punkt $a \in I$ ein $\varepsilon(a) > 0$, so dass $(a - \varepsilon(a), a + \varepsilon(a)) \subset I$ und $T_{\varphi,a}(x)$ auf $(a - \varepsilon(a), a + \varepsilon(a))$ gegen φ konvergiert. Nach dem abelschen Konvergenzlemma II.3.7 konvergiert $T_{\varphi,a}(z)$ auf der gesamten Scheibe $B(a, \varepsilon)$ und definiert somit eine holomorphe Funktion $f_a: B(a, \varepsilon(a)) \rightarrow \mathbb{C}$. Man verifiziert leicht, dass

$$G := \bigcup_{a \in I} B(a, \varepsilon(a))$$

¹⁴Dieser Beweis ist keine echte Variation des im Anschluss an Satz II.4.3 gegebenen: In der reellen Analysis haben wir die Funktionalgleichung ebenfalls durch Vergleich der entsprechenden Potenzreihen bewiesen, und der Beweis des Identitätssatzes verwendet die Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen an entscheidender Stelle. Allerdings illustriert obige Diskussion die Stärke des Identitätssatzes.

¹⁵Die reelle Taylorreihe $T_{\varphi,a}(x)$ und die komplexe Taylorreihe $T_{f,a}(z)$ sind nach Aufgabe III.3.6, ii), gleich.

ein Gebiet ist. Es ist zu zeigen, dass für $a, b \in I$ die Funktionen f_a und f_b auf $B(a, \varepsilon(a)) \cap B(b, \varepsilon(b))$ übereinstimmen. Wenn diese Menge leer ist, ist nichts zu zeigen. Andernfalls handelt es sich um ein Gebiet. Es enthält ein Teilintervall von I positiver Länge. Dort stimmen f_a und f_b beide mit φ überein. Nach dem Identitätssatz (Folgerung IV.7.7) sind sie auf ganz $B(a, \varepsilon(a)) \cap B(b, \varepsilon(b))$ gleich.

Damit sind reell analytische Funktionen die besten Analoga für holomorphe Funktionen in der reellen Analysis.

IV.7.9 Aufgabe (Holomorphe Fortsetzung). Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

Besitzt f eine holomorphe Fortsetzung?

IV.7.10 Satz. Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion und $a \in G$. Es gelte $f(a) = 0$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte positive Zahl $n > 0$ und eine eindeutig bestimmte holomorphe Funktion $g: G \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(a) \neq 0$, so dass

$$\forall z \in G: f(z) = (z - a)^n \cdot g(z).$$

IV.7.11 Definition. Die Zahl n im Satz ist die *Vielfachheit* oder *Ordnung* der Nullstelle a .

Beweis von Satz IV.7.10. Wir kümmern uns zunächst um die Existenz. Dazu sei

$$n := \min\{l \in \mathbb{N} \mid f^{(l)}(a) \neq 0\}. \quad (\text{IV.11})$$

Satz IV.7.1 und die Voraussetzung, dass f nicht konstant ist, zeigen, dass n in der Tat existiert. Wegen $f^{(0)}(a) = f(a) = 0$ gilt $n > 0$. Es sei $r > 0$ eine positive reelle Zahl, so dass die Taylorreihe

$$T_{f,a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot (z - a)^k$$

auf $B(a, r)$ gegen f konvergiert. Wir behaupten, dass

$$g: G \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - a)^n}, & \text{falls } z \neq a \\ \alpha_n, & \text{falls } z = a \end{cases}$$

holomorph ist. In Punkten $w \neq a$ ist das sofort ersichtlich. Auf der anderen Seite ist g auf $B(a, r)$ durch die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+n} \cdot (z - a)^k$$

definiert und daher insbesondere holomorph in a . Schließlich gilt

$$g(a) = \alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0.$$

Die Eindeutigkeit von g ergibt sich unmittelbar aus der Eindeutigkeit von n . Wenn f in der angegebenen Form geschrieben werden kann, dann gilt

$$T_{f,a}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \beta_{k-n} \cdot (z-a)^k$$

für die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt a . Dabei sei

$$T_{g,a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cdot (z-a)^k$$

die Taylorreihe von g mit Entwicklungspunkt a . Die Voraussetzung $g(a) \neq 0$ impliziert $\beta_0 \neq 0$, so dass sofort folgt, dass n durch (IV.11) gegeben ist. \square

IV.7.12 Aufgaben (Der Identitätssatz). i) Gibt es eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, für die

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \geq 1,$$

gilt?

ii) Sei $G := \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| < 1\}$. Konstruieren Sie eine nicht konstante holomorphe Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit unendlich vielen Nullstellen.

IV.8 Gebietstreue und das Maximumprinzip

Mit dem obigen Satz können wir eine lokale Beschreibung holomorpher Funktionen herleiten. Dazu seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $a \in G$ und $b = f(a)$. Indem wir nötigenfalls f durch $z \mapsto f(z+a) - b$, $z \in G$, ersetzen, können wir $a = b = 0$ erreichen. Nach Satz IV.7.10 gibt es nun eine Zahl $n > 0$ und eine holomorphe Funktion $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(0) \neq 0$ und

$$\forall z \in G: \quad f(z) = z^n \cdot g(z).$$

Es seien $0 < \delta < |g(0)|$ und $\varepsilon > 0$ positive reelle Zahlen, so dass

$$g(B(0, \varepsilon)) \subset B(g(0), \delta).$$

Es gibt dann eine holomorphe Funktion (vgl. Aufgabe IV.4.11, ii)

$$h: B(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C},$$

so dass

$$\forall z \in B(0, \varepsilon): \quad h(z)^n = g(z).$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} f_0: B(0, \varepsilon) &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z \cdot h(z). \end{aligned}$$

Damit finden wir

$$\star \forall z \in B(0, \varepsilon): f_0(z)^n = f(z).$$

$$\star f'_0(0) = h(0) \neq 0. \text{ (Denn } g(0) \neq 0.)$$

Jetzt können wir den Umkehrsatz aus der reellen Analysis ([13], Satz 10.2.1 und 10.2.3) bemühen: Es gibt ein Gebiet $G_0 \subset B(0, \varepsilon) \subset G$, so dass $f_0|_{G_0}: G_0 \rightarrow f_0(G_0)$ ein Homöomorphismus und damit nach Satz III.3.16 eine biholomorphe Abbildung ist. Die Faktorisierung

$$f: G_0 \xrightarrow{f_0} f(G_0) \xrightarrow{z \mapsto z^n} \mathbb{C}$$

ist eine lokale Beschreibung der Funktion f . Als Anwendung dieser Beschreibung erhalten wir

IV.8.1 Satz (Gebietstreue holomorpher Funktionen). *Es seien G ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung. Dann ist f eine offene Abbildung. Insbesondere ist $f(G)$ ebenfalls ein Gebiet.*

IV.8.2 Bemerkung. Dieser Satz hat keine Entsprechung in der Theorie reell analytischer Funktionen: Die reell analytische Abbildung $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bildet die offene Menge \mathbb{R} auf das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$ ab.

1. Beweis von Satz IV.8.1. Nach den oben geleisteten Vorarbeiten folgt die Aussage aus der Tatsache, dass, für gegebenes $n > 0$, die Funktion $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^n$, für jede positive reelle Zahl $r > 0$ die offene Kreisscheibe $B(0, r)$ auf die offene Kreisscheibe $B(0, r^n)$ abbildet. □

Wir stellen noch einen zweiten Beweis von Satz IV.8.1 vor, der auf den zuvor entwickelten Integrationstechniken beruht.

IV.8.3 Hilfssatz. *Es seien G ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung, $a \in G$ ein Punkt und $r > 0$ eine positive reelle Zahl mit $\overline{B(a, r)} \subset G$, so dass*

$$f(a) < \min \left\{ |f(z)| \mid |z - a| = r \right\}. \tag{IV.12}$$

Dann hat f eine Nullstelle in der Kreisscheibe $B(a, r)$.

Beweis. Wir nehmen an, f habe keine Nullstelle in $B(a, r)$. Wegen (IV.12) hat f auch keine Nullstelle auf $\overline{B(a, r)}$. Es gibt somit eine reelle Zahl $r' > r$ mit $B(a, r') \subset G$, so dass f auch keine Nullstelle auf $B(a, r')$ hat. Folglich ist

$$g: B(a, r') \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{f(z)}$$

eine holomorphe Funktion. Die Cauchy-Integralformel IV.5.2

$$g(a) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(a, r')} \frac{g(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} g(a + r \cdot \exp(i \cdot \varphi)) d\varphi$$

für g an der Stelle a , auch **Mittelwertgleichung** genannt, und die Standardabschätzung IV.2.9 zeigen

$$\begin{aligned} \frac{1}{|f(a)|} = |g(a)| &\leq \max\left\{|g(z)| \mid |z - a| = r\right\} \\ &= \max\left\{\frac{1}{|f(z)|} \mid |z - a| = r\right\} \\ &= \frac{1}{\min\left\{|f(z)| \mid |z - a| = r\right\}}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung widerspricht offenbar der Voraussetzung (IV.12). □

2. *Beweis von Satz IV.8.1.* Es ist zu zeigen, dass $f(U) \subset \mathbb{C}$ für jede offene Teilmenge $U \subset G$ offen ist. Dabei darf U von der Form $B(z_0, \varepsilon)$, $z_0 \in G$, $\varepsilon > 0$, gewählt werden. Da $B(z_0, \varepsilon)$ ein Gebiet ist, reicht es zu beweisen, dass $f(G)$ offen ist. Sei also $a \in G$. Wir müssen die Existenz einer positiven reellen Zahl $\varepsilon > 0$ nachweisen, für die

$$B(f(a), \varepsilon) \subset f(G)$$

gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $f(a) = 0$ voraus. Da f nicht konstant ist, sind alle Nullstellen von f nach Satz IV.7.1 isoliert. Es gibt daher eine positive reelle Zahl $r > 0$, so dass $\overline{B(a, r)} \subset G$ und f auf $\overline{B(a, r)}$ nur die Nullstelle a hat. Wir führen

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \cdot \min\left\{|f(z)| \mid |z - a| = r\right\}$$

ein und wollen $B(f(a), \varepsilon) \subset f(G)$ zeigen. Sei also $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| < \varepsilon$. Wir finden

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z - a| = r \implies |f(z) - b| \geq |f(z)| - |b| > \varepsilon.$$

Es sei $h: G \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) - b$. Unsere Ausführungen ergeben

$$|h(a)| \stackrel{f(a)=0}{=} |b| < \min\left\{|h(z)| \mid |z - a| = r\right\}.$$

Aus Hilfssatz IV.8.3 folgt die Existenz eines Punkts $z_b \in B(a, r)$ mit

$$f(z_b) - b = h(z_b) = 0, \quad \text{d.h.} \quad f(z_b) = b.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

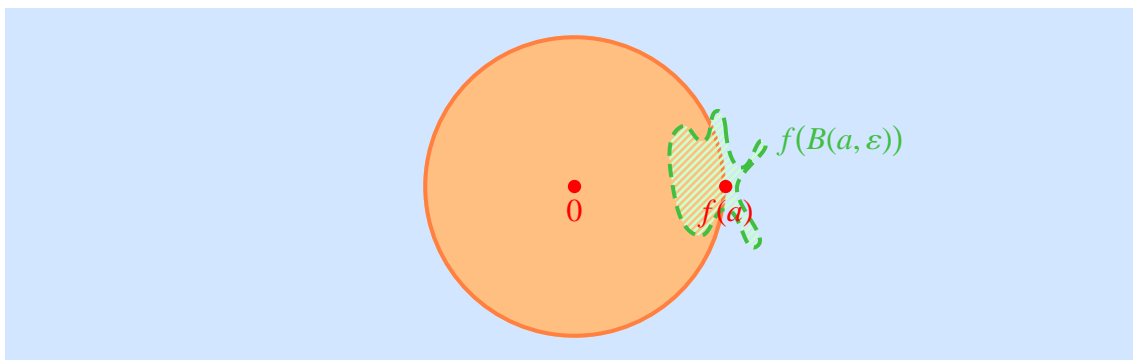
IV.8.4 Satz (Das Maximumprinzip). *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $a \in G$. Wenn die Funktion $|f|$ in a ein lokales Maximum annimmt, dann ist die Funktion f konstant.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ eine positive reelle Zahl, so dass

$$\forall z \in B(a, \varepsilon) : |f(z)| \leq |f(a)|.$$

Offenbar gilt

$$f(B(a, \varepsilon)) \subset \overline{B(0, |f(a)|)}.$$



Es gibt keine offene Umgebung U von $f(a)$, die im Bild von $B(a, \varepsilon)$ unter f enthalten ist. Satz IV.8.1 impliziert somit, dass f konstant ist. \square

IV.8.5 Bemerkung. Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $a \in G$ und $r > 0$, so dass $\overline{B(a, r)} \subset G$. Da die Funktion $|f|$ stetig ist, nimmt sie auf der kompakten Menge $\overline{B(a, r)}$ ein Maximum an. Wenn f nicht konstant ist, dann zeigt das Maximumprinzip, dass dieses Maximum auf dem Rand

$$\partial B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$$

angenommen wird.

IV.8.6 Aufgaben (Maxima). Bestimmen Sie das Maximum von $|f|$ auf der Menge $\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ in den folgenden Fällen:

- i) $f(z) = \exp(z^2)$, $z \in \mathbb{C}$.
- ii) $f(z) = (z + 3)/(z - 3)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$.
- iii) $f(z) = z^2 + z - 1$, $z \in \mathbb{C}$.

IV.8.7 Aufgabe (Maximumprinzip). Gegeben sei eine Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem beschränkten Gebiet G (d.h., es gibt ein $R > 0$, so dass $G \subset B(0, R)$). Für $z \in G$ ist der Abstand zum Rand durch

$$\text{dist}(z, \partial G) := \inf\{|z - w| \mid w \in \mathbb{C} \setminus G\}$$

gegeben.

Die Funktion f habe folgende Eigenschaft:

$$\forall C > 0 \exists \delta > 0 : (\forall z \in G : \text{dist}(z, \partial G) \leq \delta \implies |f(z)| \geq C).$$

(„Die Funktion f strebt bei Annäherung an den Rand gleichmäßig gegen unendlich.“) Beweisen Sie, dass f **nicht** holomorph ist.

IV.8.8 Aufgabe (Gebietstreue). Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Es gebe ein reelles Polynom $P(x, y) \neq 0$, so dass

$$\forall z \in G : P(\text{Re}(f(z)), \text{Im}(f(z))) = 0.$$

Weisen Sie nach, dass f eine konstante Funktion ist.

IV.8.9 Aufgabe (Eine Verallgemeinerung des Satzes von Liouville). Es seien $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, $m \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathbb{R}$, so dass

$$|f(z)| \leq M \cdot |z|^m, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass f eine polynomiale Funktion vom Grad höchstens m ist.

IV.9 Automorphismen der Einheitskreisscheibe und der oberen Halbebene

Das Maximumprinzip gestattet uns, die Ergebnisse zu den Automorphismen der Einheitskreisscheibe \mathbb{D} und der oberen Halbebene \mathbb{H} zu vervollständigen. Die Diskussion veranschaulicht, wie man aus den allgemeinen Sätzen präzise Aussagen über holomorphe Abbildungen gewinnen kann.

IV.9.1 Satz (Das Lemma von Schwarz). *Es sei $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$.*

i) *Für jeden Punkt $z \in \mathbb{D}$ gilt $|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$.*

ii) *Wenn es einen Punkt $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $|f(a)| = |a|$ gibt oder $|f'(0)| = 1$ erfüllt ist, dann gibt es eine komplexe Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ und*

$$\forall z \in \mathbb{D} : f(z) = \zeta \cdot z.$$

Beweis. i) Auf Grund der Voraussetzung $f(0) = 0$ ist die Funktion

$$g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \\ z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{falls } z \neq 0 \\ f'(0), & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

holomorph. Offensichtlich gilt

$$\forall 0 < r < 1 \forall z \in \mathbb{C} : |z| = r \implies |g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Das Maximumprinzip IV.8.4 impliziert

$$\forall 0 < r < 1 \forall z \in B(0, r) : |g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Die Abschätzung wird mit wachsendem r immer schwächer, so dass

$$\forall 0 < r < 1 \forall z \in B(0, 1) : |g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Damit erkennen wir

$$\forall z \in B(0, 1) : |g(z)| \leq 1.$$

Für $z \neq 0$ bedeutet dies $|f(z)| \leq |z|$. (Das gilt natürlich auch für $z = 0$.) An der Stelle 0 heißt dies $|f'(0)| \leq 1$.

ii) Die angegebene Bedingung bedeutet, dass $|g|$ in a bzw. in 0 ein Maximum annimmt. Nach dem Maximumprinzip ist g konstant. Es sei ζ der Funktionswert von g . Er hat unter den genannten Bedingungen den Betrag eins. Somit

$$\forall z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} : \frac{f(z)}{z} = g(z) = \zeta, \quad \text{d.h.} \quad f(z) = \zeta \cdot z.$$

Dieselbe Formel gilt nach Voraussetzung auch für $z = 0$. □

IV.9.2 Bemerkung. Eine komplexe Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ ist von der Form $\exp(i \cdot \varphi)$ für einen geeigneten Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$. Die Multiplikation $z \mapsto \zeta \cdot z$, $z \in \mathbb{D}$, mit ζ ist die Drehung um den Winkel φ .

IV.9.3 Folgerung. *Es sei $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ein Automorphismus mit $f(0) = 0$. Dann ist f die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ vom Betrag eins.*

Beweis. Es ist $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$. Die Umkehrabbildung $f^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ hat ebenfalls diese Eigenschaften. Aus dem Lemma von Schwarz leiten wir ab:

$$\star \forall z \in \mathbb{D}: |f(z)| \leq |z|.$$

$$\star \forall z \in \mathbb{D}: |z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|.$$

Damit gilt $|f(z)| = |z|$ für jeden Punkt $z \in \mathbb{D}$ der Einheitskreisscheibe. Der zweite Teil des Lemmas von Schwarz zeigt die Behauptung. \square

Automorphismengruppen

Es seien G ein Gebiet und $a \in G$. Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(G)$ wurde in Definition III.6.14 erklärt. Zusätzlich ist die *Standgruppe* von a die Untergruppe (vgl. [16], Definitionen, II.6.4, ii)

$$\text{Aut}_a(G) := \{ f \in \text{Aut}(G) \mid f(a) = a \}.$$

Das folgende Ergebnis hilft bei der Bestimmung der vollen Automorphismengruppe eines Gebiets.

IV.9.4 Lemma. *Es seien G ein Gebiet und $H \subset \text{Aut}(G)$ eine Untergruppe mit folgenden Eigenschaften:*

\star *Die Gruppe H wirkt transitiv auf G , d.h. zu $u, v \in G$ existiert ein Gruppenelement $h \in H$ mit $h(u) = v$.*

\star *Es gibt einen Punkt $a \in G$, so dass $\text{Aut}_a(G) \subset H$.*

Dann folgt

$$\text{Aut}(G) = H.$$

Beweis. Es sei $f \in \text{Aut}(G)$ ein Automorphismus. Da H transitiv wirkt, gibt es ein Gruppenelement $h \in H$ mit

$$h(f(a)) = a.$$

Damit gilt $h \circ f \in \text{Aut}_a(G) \subset H$. Die Beschreibung

$$f = h^{-1} \circ (h \circ f)$$

zeigt, dass f ein Element von H ist. \square

IV.9.5 Satz. *Es sei*

$$M := \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{array} \right) \mid a, b \in \mathbb{C} : |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}.$$

Der Homomorphismus (s. Folgerung III.6.19)

$$\begin{aligned} \Phi: M &\longrightarrow \text{Aut}\mathbb{D} \\ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{array} \right) &\longmapsto \left(z \longmapsto \frac{a \cdot z + b}{\bar{b} \cdot z + \bar{a}} \right) \end{aligned}$$

ist surjektiv. Es folgt

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = M/\{\pm E_2\}.$$

Beweis. Es sei $H := \Phi(M)$. Im Beweis von Satz III.6.21 haben wir nachgewiesen, dass H transitiv auf der Einheitskreisscheibe wirkt. Ferner enthält H für jeden Winkel $\psi \in [0, 2\pi)$ und jede Zahl $w \in \mathbb{D}$ den Automorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \exp(i \cdot \psi) \cdot \frac{z - w}{\bar{w} \cdot z - 1}. \end{aligned}$$

Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl vom Betrag eins. Wir schreiben $\zeta = \exp(i \cdot \varphi)$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$. Indem wir $\psi = \pi + \varphi$ und $w = 0$ wählen, erkennen wir, dass die Multiplikation mit ζ in H enthalten ist. In Folgerung IV.9.3 haben wir $\text{Aut}_0(\mathbb{D}) \subset H$ bewiesen. Lemma IV.9.4 liefert nun die Behauptung $H = \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Bereits in Folgerung III.6.19 haben wir festgehalten, dass der Kern von Φ die Gruppe $\{\pm E_2\}$ ist. Der erste Isomorphiesatz ([16], Satz II.10.1) gibt den behaupteten Isomorphismus. \square

Mittels Satz III.6.10 können wir das obige Ergebnis auf die obere Halbebene übertragen:

IV.9.6 Folgerung. *Der Homomorphismus (s. Folgerung III.6.16)*

$$\begin{aligned} \Psi: \text{SL}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}) \\ \left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right) &\longmapsto \left(z \longmapsto \frac{\alpha \cdot z + \beta}{\gamma \cdot z + \delta} \right) \end{aligned}$$

ist surjektiv. Es folgt

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{PSL}_2(\mathbb{R}) := \text{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm E_2\}.$$

IV.9.7 Bemerkungen. i) Da \mathbb{D} und \mathbb{H} biholomorph äquivalent sind, sind auch ihre Automorphismengruppen isomorph, so dass

$$M/\{\pm E_2\} \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

In Satz III.6.18 haben wir bereits einen Isomorphismus $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M$ angegeben.

ii) Die obigen Ergebnisse sind sehr explizit. Die Automorphismengruppen sind dabei endlichdimensional (als Mannigfaltigkeiten; vgl. [14], Abschnitt 11.3 und Anhang). Sie illustrieren somit ein weiteres Mal die Starrheit holomorpher Abbildungen im Vergleich zu unendlich oft differenzierbaren. Die Gruppe der \mathcal{C}^∞ -Automorphismen der obigen Gebiete sind unendlichdimensional (vgl. [4]).

V

Meromorphe Funktionen

In diesem Kapitel untersuchen wir holomorphe Funktionen in der Nähe ihrer Definitionslücken. Es seien z.B. $a \in \mathbb{C}$ ein Punkt in der komplexen Ebene, $r > 0$ ein positiver reeller Radius und $f: B(a, r) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gibt es drei Möglichkeiten: Die Funktion f lässt sich in den Punkt a hinein holomorph fortsetzen, oder sie hat in a eine **Polstelle** und $z \mapsto |f(z)|$ strebt bei Annäherung an a gegen unendlich, oder es liegt eine **wesentliche Singularität** vor. In diesem Fall wird das Werteverhalten durch den Satz von Casorati–Weierstraß beschrieben. Es gibt für f auch eine Reihenentwicklung, die sogenannte **Laurentreihe**, die je nach Typ der Singularität endlich oder unendlich viele negative Glieder der Form $a_{-k}/(z - a)^k$, $k > 0$, aufweist. Indem wir isolierte Polstellen zulassen, erweitern wir unsern Vorrat an interessanten Funktionen zu den sogenannten **meromorphen** Funktionen. Eine Besonderheit der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen ist, dass wir einer meromorphen Funktion f auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ an ihren Polstellen den Wert ∞ zuweisen und sie somit als Abbildung $f: U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, auffassen können. Dabei trägt $\overline{\mathbb{C}}$ eine natürliche Topologie, bzgl. derer die Abbildung f stetig ist. Man stellt leicht einen **Homöomorphismus**, d.h. einen topologischen Isomorphismus, $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ her. Deshalb nennt man $\overline{\mathbb{C}}$ auch die **riemannsche Zahlenkugel**. Jetzt kann man auch auf $\overline{\mathbb{C}}$ komplexwertige Funktionen betrachten und Funktionentheorie betreiben. Damit wird $\overline{\mathbb{C}}$ ein erstes Beispiel einer **kompakten komplexen Mannigfaltigkeit**. Die Kompaktheit hat starke Konsequenzen: Jede holomorphe Funktion auf $\overline{\mathbb{C}}$ ist konstant, eine Variante des **Satzes von Liouville**, und jede meromorphe Funktion auf $\overline{\mathbb{C}}$ lässt sich als Quotient zweier polynomialer Funktionen darstellen, ist also ein algebraisches Objekt. Diese Beobachtungen haben tiefliegende Verallgemeinerungen, die weitreichende Verbindungen zwischen der komplex analytischen und algebraischen Geometrie schaffen, die hier aber nicht besprochen werden können.

V.1 Isolierte Singularitäten holomorpher Funktionen

V.1.1 Definition. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $a \in \mathbb{C}$. Der Punkt a ist eine *isolierte Singularität* oder *Definitionslücke* von

f , wenn gilt:

★ $a \notin U$.

★ Es gibt eine positive reelle Zahl $r > 0$ mit $B(a, r)^* := B(a, r) \setminus \{a\} \subset U$.

V.1.2 Bemerkung. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f und $r > 0$, so dass $B(a, r)^* \subset U$. Dann ist

$$U \cup \{a\} = U \cup B(a, r)$$

wieder eine offene Teilmenge von \mathbb{C} .

Im Folgenden werden wir verschiedene Typen von Singularitäten besprechen.

Hebbare Singularitäten

V.1.3 Definition. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f . Sie ist *hebbbar*, wenn eine holomorphe Funktion

$$\tilde{f}: U \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$\forall z \in U: \tilde{f}(z) = f(z)$$

existiert.

V.1.4 Bemerkung. Nach Bemerkung V.1.2 ist a ein Häufungspunkt von $U \cup \{a\}$. Die Funktion \tilde{f} ist als holomorphe Funktion stetig. Daher ist $\tilde{f}(a)$ und damit \tilde{f} durch f eindeutig festgelegt.

V.1.5 Satz (Der riemannsche Hebbarkeitssatz). *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f . Dann ist die Singularität a genau dann hebbbar, wenn es einen Radius $r > 0$ mit $B(a, r)^* \subset U$ gibt, so dass f auf $B(a, r)^*$ beschränkt ist.*

Beweis. Die Singularität a sei hebbbar, und $\tilde{f}: U \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ sei die holomorphe Fortsetzung. Wir können annehmen, dass $\overline{B(a, r)} \subset U \cup \{a\}$. Da $\overline{B(a, r)}$ kompakt und \tilde{f} stetig ist, ist \tilde{f} auf $\overline{B(a, r)}$ beschränkt.

Jetzt sei $r > 0$ ein Radius, so dass $B(a, r)^*$ in U enthalten und f auf $B(a, r)^*$ beschränkt ist. Wir setzen

$$\begin{aligned} \tilde{h}: U \cup \{a\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \begin{cases} (z-a)^2 \cdot f(z), & \text{falls } z \neq a \\ 0, & \text{falls } z = a \end{cases} \end{aligned}$$

und zeigen zunächst, dass es sich bei \tilde{h} um eine holomorphe Funktion handelt. In den Punkten aus U ist das klar. Weiter berechnen wir

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{\tilde{h}(z) - \tilde{h}(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} f(z) \cdot (z - a) = 0.$$

Die zweite Gleichung ist eine Folgerung aus der Beschränktheit von f . Es sei

$$T_{\tilde{h},a}^-(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot (z-a)^k$$

die Taylorreihe von \tilde{h} mit Entwicklungspunkt a . Wegen $\tilde{h}(a) = 0 = \tilde{h}'(a)$ gilt

$$b_0 = 0 = b_1.$$

Da die Taylorreihe $T_{\tilde{h},a}^-(z)$ auf $B(a, r)$ konvergiert (Folgerung IV.6.9), ist durch

$$\begin{aligned} g: B(a, r) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2} \cdot (z-a)^k \end{aligned}$$

eine holomorphe Funktion gegeben. Damit ist

$$\begin{aligned} \tilde{f}: U \cup \{a\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \begin{cases} f(z) = \frac{\tilde{h}(z)}{(z-a)^2}, & \text{falls } z \neq a \\ b_2, & \text{falls } z = a \end{cases} \end{aligned}$$

eine holomorphe Fortsetzung von f . □

V.1.6 Aufgabe (Holomorphe Fortsetzung). Es sei

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Besitzt f eine holomorphe Fortsetzung?

Polstellen

V.1.7 Definition. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f . Sie ist *außerwesentlich*, wenn es eine ganze Zahl l gibt, so dass die Funktion

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (z-a)^l \cdot f(z) \end{aligned}$$

eine holomorphe Fortsetzung zu einer Funktion $g: U \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt.

V.1.8 Lemma. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $a \in \mathbb{C}$ eine außerwesentliche Singularität von f . Dann gibt es genau eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ und genau eine holomorphe Funktion $g: U \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(a) \neq 0$, die $z \mapsto (z-a)^k \cdot f(z)$, $z \in U$, fortsetzt.

Beweis. Schritt 1. Es seien $k_1 < k_2$ ganze Zahlen und $g_1: U \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. $g_2: U \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die $z \mapsto (z-a)^{k_1} \cdot f(z)$ bzw. $z \mapsto (z-a)^{k_2} \cdot f(z)$, $z \in U$, fortsetzt. Dann setzt

$$\begin{aligned} U \cup \{a\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (z-a)^{k_2-k_1} \cdot g_1(z) \end{aligned}$$

ebenfalls die Funktion $z \mapsto (z-a)^{k_2} \cdot f(z)$, $z \in U$, fort. Nach Bemerkung V.1.4 stimmt sie mit g_2 überein. Wegen $k_2 - k_1 > 0$ hat g_2 eine Nullstelle in a . Diese Überlegung zeigt die Eindeutigkeit von k . Aus Bemerkung V.1.4 ergibt sich wieder die Eindeutigkeit von g .

Schritt 2. Es seien nun $l \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl, so dass sich die Funktion $z \mapsto (z-a)^l \cdot f(z)$, $z \in U$, zu einer holomorphen Funktion $h: U \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ fortsetzen lässt. Wenn $h(a) = 0$, so sei l' die Vielfachheit der Nullstelle a (Definition IV.7.11). Es gibt dann eine holomorphe Funktion $g: U \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(a) \neq 0$, so dass

$$\forall z \in U \cup \{a\}: \quad h(z) = (z-a)^{l'} \cdot g(z).$$

Damit setzt $g: U \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktion

$$\begin{aligned} U \cup \{a\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (z-a)^k \cdot f(z), \quad k := l - l', \end{aligned}$$

holomorph fort. Damit ist die Existenz von k und g nachgewiesen. \square

V.1.9 Definitionen. i) In der Situation von Lemma V.1.8 sei $k \in \mathbb{Z}$ die eindeutig bestimmte ganze Zahl, so dass $z \mapsto (z-a)^k \cdot f(z)$, $z \in U$, eine holomorphe Fortsetzung besitzt, die in a keine Nullstelle aufweist. Die Zahl

$$\text{Ord}(f, a) := -k$$

heißt die *Ordnung* von f in a .

ii) Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $a \in \mathbb{C}$ eine außerwesentliche Singularität. Falls $n := \text{Ord}(f, a) > 0$, dann sagen wir, dass f in a eine *Nullstelle der Ordnung* oder *Vielfachheit* n hat. Gilt $n := -\text{Ord}(f, a) > 0$, dann hat f in a eine *Polstelle der Ordnung* n .

Wesentliche Singularitäten

V.1.10 Definition. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität. Sie ist *wesentlich*, wenn sie nicht außerwesentlich ist.

Die wesentlichen Singularitäten zeichnen sich durch ihr besonderes Werteverhalten in der Nähe der Singularität aus. Allgemein betrachten wir eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$, eine holomorphe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ und eine isolierte Singularität $a \in \mathbb{C}$. Wenn die Singularität hebbar ist, dann ist f für jede positive reelle Zahl r mit $\overline{B(a, r)} \setminus \{a\} \subset U$ auf $B(a, r)^*$ beschränkt. Handelt es sich um eine Polstelle, dann gilt

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty,$$

d.h. für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in¹ U mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ und jede positive reelle Zahl $R > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_0 : |f(z_n)| > R.$$

Das Werteverhalten bei einer wesentlichen Singularität beschreibt das folgende Ergebnis.

V.1.11 Satz (Casorati²–Weierstraß). *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $a \in \mathbb{C}$ eine **wesentliche** Singularität von f , $r > 0$ eine positive reelle Zahl und*

$$V := B(a, r) \cap U.$$

*Die Menge $f(V)$ liegt **dicht** in \mathbb{C} , d.h. für ihren Abschluss gilt*

$$\overline{f(V)} = \mathbb{C}.$$

Beweis. Es sei $B := \mathbb{C} \setminus \overline{f(V)}$ das Komplement des Abschlusses von $f(V)$. Dies ist eine offene Teilmenge von \mathbb{C} , und wir müssen zeigen, dass sie leer ist. Wir nehmen das Gegenteil an und wählen einen Punkt $b \in B$ sowie eine positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ mit

$$B(b, \varepsilon) \subset B.$$

Das bedeutet

$$\forall z \in V : |f(z) - b| \geq \varepsilon. \tag{V.1}$$

Damit ist

$$g: V \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{f(z) - b}$$

eine holomorphe Funktion. Nach (V.1) ist $|g|$ durch $1/\varepsilon$ beschränkt. Der riemannsche Hebbarkeitssatz V.1.5 garantiert die Existenz einer holomorphen Fortsetzung

$$\tilde{g}: V \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$$

von g . Es gibt eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $\tilde{h}: V \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{h}(a) \neq 0$, so dass

$$\forall z \in V \cup \{a\} : \tilde{g}(z) = (z - a)^n \cdot \tilde{h}(z).$$

Die Beschreibung

$$\forall z \in V : f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$$

zeigt, dass die Singularität von f in a hebbar ist, wenn $n = 0$, bzw. eine Polstelle der Ordnung n hat, wenn $n > 0$. In jedem Fall handelt es sich um eine außerwesentliche Singularität, im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

¹Das bedeutet insbesondere $z_n \neq a, n \in \mathbb{N}$.

²Felice Casorati (1835 - 1890), italienischer Mathematiker.

V.1.12 Aufgaben (Singularitäten). Bestimmen Sie den Typ der Singularität der durch den jeweiligen Ausdruck definierten Funktion f an der angegebenen Stelle a . Falls es sich um eine hebbare Singularität handelt, geben Sie den Grenzwert $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ an.

- i) $f(z) := \frac{z^3 + 3z + 2i}{z^2 + 1}$, $a = -i$, ii) $f(z) := \frac{\exp(z) - 1 - z}{z}$, $a = 0$,
 iii) $f(z) := \frac{1}{\exp(z) - 1}$, $a = 0$,
 iv) $f(z) := \frac{\cos(z) - 1}{z^4}$, $a = 0$, e) $f(z) := z \cdot \cos\left(\frac{1}{z-1}\right)$, $a = 1$.

V.2 Laurentzerlegungen

Wir betrachten holomorphe Funktionen auf Kreisringen (s. Abbildung IV.1). Es seien $0 \leq r < R \leq \infty$ und

$$G := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}.$$

Das Muster für holomorphe Funktionen auf G sind Funktionen folgender Bauart: Es seien

$$\begin{aligned} g: B(0, R) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ h: B\left(0, \frac{1}{r}\right) &\longrightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

holomorphe Funktionen. Dann ist

$$\begin{aligned} f: G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

eine holomorphe Funktion. Der folgende Satz zeigt, dass jede holomorphe Funktion von dieser Gestalt ist.

V.2.1 Satz (Laurentzerlegung³). *Es sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann existieren holomorphe Funktionen*

$$\begin{aligned} g: B(0, R) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ h: B\left(0, \frac{1}{r}\right) &\longrightarrow \mathbb{C}, \end{aligned}$$

so dass

$$\forall z \in G: \quad f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right). \tag{V.2}$$

Wenn

$$\begin{aligned} \tilde{g}: B(0, R) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ \tilde{h}: B\left(0, \frac{1}{r}\right) &\longrightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

³Pierre Alphonse Laurent (1813 - 1854), französischer Mathematiker.

weitere holomorphe Funktionen sind, so dass

$$\forall z \in G : f(z) = \tilde{g}(z) + \tilde{h}\left(\frac{1}{z}\right),$$

dann gibt es eine komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ mit

$$\forall z \in B(0, R) : \tilde{g}(z) = g(z) + c, \quad \forall z \in B\left(0, \frac{1}{r}\right) : \tilde{h}(z) = h(z) - c.$$

Insbesondere sind g und h eindeutig bestimmt, wenn man $h(0) = 0$ fordert.

V.2.2 Definition. Die Zerlegung (V.2) von f mit $h(0) = 0$ heißt die *Laurentzerlegung* von f . Man nennt h den *Hauptteil* von f und g den *Nebenteil*.

Beweis von Satz V.2.1. Eindeutigkeit. Es seien

$$\begin{aligned} g, \tilde{g} : B(0, R) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ h, \tilde{h} : B\left(0, \frac{1}{r}\right) &\longrightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

Funktionen mit

$$\forall z \in G : g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) = \tilde{g}(z) + \tilde{h}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Wir setzen

$$\widehat{g} := g - \tilde{g} \quad \text{und} \quad \widehat{h} := h - \tilde{h}$$

und erhalten

$$\forall z \in G : \widehat{g}(z) + \widehat{h}\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} H : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \begin{cases} \widehat{g}(z), & \text{falls } |z| < R \\ -\widehat{h}\left(\frac{1}{z}\right), & \text{falls } |z| > r \end{cases} \end{aligned}$$

eine ganze Funktion ist. Wir behaupten, dass H beschränkt ist. Dazu wählen wir

$$0 < r < r' < R' < R.$$

Unsere Behauptung folgt, weil \widehat{g} auf $\overline{B(0, R')} \subset B(0, R)$ und \widehat{h} auf $\overline{B(0, 1/r')} \subset B(0, 1/r)$ beschränkt sind. Der Satz von Liouville impliziert, dass H konstant ist. Damit und mit dem Identitätssatz (Folgerung IV.7.7) ergibt sich die Eindeutigkeit der Laurentzerlegung.

Existenz. Wir stellen dem Beweis das folgende Ergebnis voran.

Hilfssatz. Es seien $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $r < t < T < R$ reelle Zahlen. Dann gilt

$$\int_{\gamma(0,t)} \varphi(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma(0,T)} \varphi(\zeta) d\zeta.$$

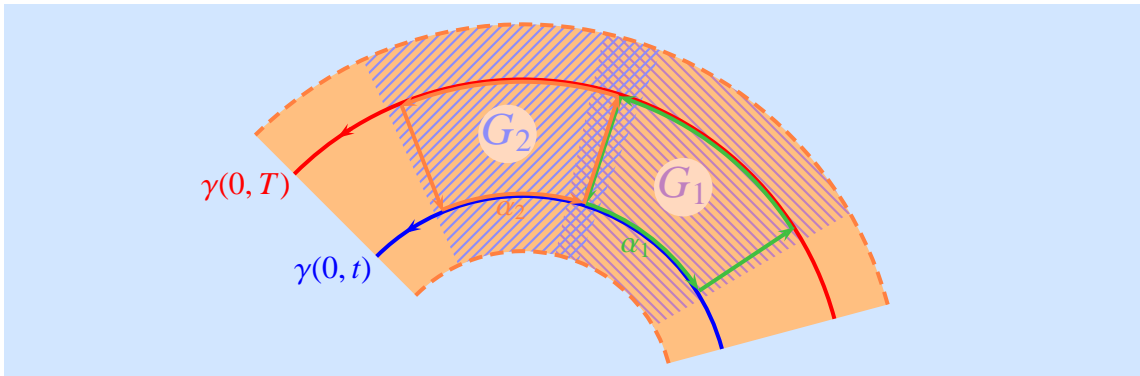


Abbildung V.1: Zerlegung eines Kreisrings in sternförmige Gebiete

Zum Beweis überdecken wir den Kreisring wie in Abbildung V.1 skizziert mit **sternförmigen** Kreisringsegmenten G_1, \dots, G_n .⁴ Weiter definieren wir wie im Bild skizziert Wege $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, so dass α_i in G_i verläuft, $i = 1, \dots, n$, und

$$\gamma(0, T) - \gamma(0, t) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Der Cauchy-Integralsatz IV.4.6 für das sternförmige Gebiet G_i zeigt

$$\int_{\alpha_i} \varphi(\zeta) d\zeta = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Mit Eigenschaft IV.2.12, i), finden wir nun wie behauptet

$$\int_{\gamma(0, T)} \varphi(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma(0, t)} \varphi(\zeta) d\zeta = \int_{\alpha_1} \varphi(\zeta) d\zeta + \dots + \int_{\alpha_n} \varphi(\zeta) d\zeta = 0$$

und haben den Hilfssatz gezeigt. ✓

Für festes $z \in G$ definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi: G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\longmapsto \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{falls } \zeta \neq z \\ f'(\zeta), & \text{falls } \zeta = z \end{cases} \end{aligned}$$

Sie ist holomorph. Für Punkte $\zeta \neq z$ ist das offensichtlich. Wenn

$$T_{f,z}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (\zeta - z)^k$$

die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt z ist, dann ist

$$T_{\varphi,z}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \cdot (\zeta - z)^k$$

⁴Der Leser bzw. die Leserin möge sich selbstständig davon überzeugen, dass und wie das möglich ist (Aufgabe IV.4.10, i).

die Taylorreihe von φ mit Entwicklungspunkt z . Nach dem Hilfssatz gilt für $r < t < T < R$ mit $|z| \neq t, T$, dass

$$\int_{\gamma(0,T)} \varphi(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma(0,t)} \varphi(\zeta) d\zeta,$$

d.h.

$$\int_{\gamma(0,T)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot \int_{\gamma(0,T)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma(0,t)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot \int_{\gamma(0,t)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta. \quad (\text{V.3})$$

Wählen wir t, T mit $r < t < |z| < T < R$, dann haben wir auch

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(0,t)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta &= 0, \\ \int_{\gamma(0,T)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta &= 2\pi \cdot i. \end{aligned}$$

Aus (V.3) folgt

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(0,T)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{=:g(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(0,t)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{=:h(\frac{1}{z})}.$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} g: B(0, T) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(0,T)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \\ h: B\left(0, \frac{1}{t}\right) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(0,t)} \frac{z \cdot f(\zeta)}{1 - \zeta \cdot z} d\zeta. \end{aligned}$$

Die Funktion g ist nach Satz IV.5.4 holomorph. Die Funktion h ist auf $B(0, 1/t)^*$ die Verknüpfung der holomorphen Funktion

$$\begin{aligned} B\left(0, \frac{1}{t}\right)^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

mit der Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus B(0, t) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(0,t)} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta, \end{aligned}$$

die nach Satz IV.5.4 ebenfalls holomorph ist. Um zu erkennen, dass h in 0 auch holomorph ist, reicht es nach dem riemannschen Hebbarkeitssatz V.1.5 nachzuprüfen, dass h in der

Nähe von 0 beschränkt ist. Mit der Standardabschätzung IV.2.9 ergibt sich das aus der Tatsache, dass der Integrand auf $B(0, 1/(2t))$ betragsmäßig durch

$$t \cdot \max\{|f(\zeta)| \mid |\zeta| = t\}$$

beschränkt ist. Man beachte schließlich noch, dass $h(0) = 0$.

Wir präzisieren die Notation und bezeichnen die gerade entdeckten Funktionen mit $g_{t,T}$ und $h_{t,T}$. Für Zahlen $r < t' < t < T < T' < R$ bekommen wir $g_{t',T'}: B(0, T') \rightarrow \mathbb{C}$ und $h_{t',T'}: B(0, 1/t') \rightarrow \mathbb{C}$. Wir haben

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad t' < |z| < T' \quad \implies \quad f(z) = g_{t',T'}(z) + h_{t',T'}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Da ferner $h_{t',T'}(0) = 0$, impliziert die bereits bewiesene Eindeutigkeitsaussage für das Kreisringgebiet

$$G_{t,T} := \{z \in \mathbb{C} \mid t < |z| < T\},$$

dass

$$g_{t',T'}|_{B(0,T)} = g_{t,T} \quad \text{und} \quad h_{t',T'}|_{B(0,1/t)} = h_{t,T}.$$

Lassen wir t gegen r und T gegen R laufen, dann erhalten wir g auf $B(0, R)$ und h auf $B(0, 1/r)$. □

In der obigen Situation sind die Funktionen g und h durch Potenzreihen gegeben

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k, \quad z \in B(0, R),$$

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot z^k, \quad z \in B\left(0, \frac{1}{r}\right).$$

Indem wir

$$a_k := b_{-k}, \quad k \leq -1$$

setzen, können wir gemäß Satz V.2.1

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot z^k \tag{V.4}$$

schreiben.

V.2.3 Definitionen. i) Es sei

$$a: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine Abbildung. Mit

$$a_k := a(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

definieren wir die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}.$$

Das Paar $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k})$ schreiben wir als

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k.$$

Die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn sowohl die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ als auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}$ konvergiert. Der Wert der Reihe ist dann die Summe der Werte der beiden anderen Reihen:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}.$$

Diese Begriffe lassen sich auf offensichtliche Weise auf Potenzreihen (vgl. Abschnitt II.3) übertragen.

ii) Die Darstellung in (V.4) ist die *Laurentreihe* oder *Laurententwicklung* von f .

V.2.4 Bemerkung. Wenn die unendliche Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k$ konvergiert, so gilt nach Satz II.1.3, i), für den Wert der Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n a_k.$$

Die Ergebnisse aus Satz V.2.1 lassen sich ohne Mühe auf beliebige Entwicklungspunkte ausdehnen. Wir fassen die Überlegungen zusammen in:

V.2.5 Folgerung (Laurententwicklung). *Es seien $a \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < R \leq \infty$,*

$$G := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$$

und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann konvergiert die Laurentreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k$$

in jedem Punkt $z \in G$ gegen den Funktionswert $f(z)$.

Für $r < \varrho < R$ werden die Koeffizienten der Laurentreihe durch die Integralformel

$$a_n = \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(a, \varrho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{V.5}$$

berechnet.

Beweis. Es ist nur noch die Integralformel zu begründen. Dazu müssen wir rechtfertigen, dass wir Integration mit den Summationen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - a)^k}$$

vertauschen können. Im ersten Fall folgt dies aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz von Potenzreihen II.3.7 und Lemma IV.6.4. Im zweiten Fall aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz von Potenzreihen, der Biholomorphie der Abbildung $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto 1/z$, und Lemma IV.6.4. □

V.2.6 *Bemerkung.* Für die Laurentkoeffizienten ergibt sich aus (V.5) und der Standardabschätzung die **Cauchyabschätzung**

$$|a_n| \leq \frac{M_\varrho(f)}{\varrho^n}, \quad M_\varrho(f) := \sup\{|f(z)| \mid |z-a| = \varrho\}, \quad r < \varrho < R, \quad n \in \mathbb{N}.$$

V.2.7 *Beispiel.* Wir betrachten die polynomiale Funktion

$$z \mapsto z^2 - 4z + 3 = (z-1) \cdot (z-3), \quad z \in \mathbb{C},$$

und definieren damit die holomorphe Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{1, 3\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{2}{(z-1) \cdot (z-3)}.$$

Wir können sie auf den Kreisingebieten

$$G_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}, \\ G_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}, \\ \text{und } G_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z| < \infty\}$$

untersuchen. Dabei verwenden wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{2}{(z-1) \cdot (z-3)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-3}, \quad \mathbb{C} \setminus \{1, 3\}.$$

Auf G_1 . Hier haben wir wegen $0 < |z| < 1$ die Reihenentwicklungen

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

und

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k.$$

Daraus ergibt sich die Laurententwicklung

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{3-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3^{k+1}}\right) \cdot z^k, \quad z \in G_1.$$

Dies ist gleichzeitig die Taylorreihe $T_{f,0}(z)$.

Auf G_2 . Wegen $|z| > 1$ gilt $0 < 1/|z| < 1$, so dass

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}}.$$

Weiter gilt $|z| < 3$, also $|z/3| < 1$, und damit

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k.$$

Die Laurententwicklung lautet nun

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{3^{k+1}} \cdot z^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{z^k}}_{=h(\frac{1}{z})} + \underbrace{-\frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{3^{k+1}} \cdot z^k}_{=g(z)}, \quad z \in G_2.$$

Auf G_3 . Da $|z| > 3$ haben wir $3/|z| < 1$ und daher

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{z^{k+1}}, \quad z \in G_3.$$

V.2.8 Bemerkung. Man beachte, dass die Laurententwicklungen auf G_2 und G_3 unendlich viele negative Glieder haben, obwohl die Funktion f nur außerwesentliche Singularitäten besitzt.

Laurententwicklungen und isolierte Singularitäten

In diesem Abschnitt untersuchen wir folgende Situation: Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z-a)^k$$

die Laurententwicklung im Punkt a .

V.2.9 Lemma. Die Singularität a ist genau dann hebbar, wenn die Laurentreihe keine negativen Glieder hat:

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \quad k < 0 \quad \implies \quad a_k = 0.$$

Beweis. Die Singularität sei hebbar, und $\tilde{f}: U \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ sei die holomorphe Fortsetzung. Die Eindeutigkeit der Laurentzerlegung in Satz V.2.1 impliziert

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z-a)^k = T_{\tilde{f},a}(z).$$

Demnach hat die Laurentreihe keine negativen Glieder.

Es sei $r > 0$ eine positive reelle Zahl, so dass $B(a, r)^* \subset U$. Die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z-a)^k$$

konvergiert auf $B(a, r)$. Daher ist

$$\begin{aligned} \tilde{f}: U \cup \{a\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \begin{cases} f(z), & \text{falls } z \neq a \\ a_0, & \text{falls } z = a \end{cases} \end{aligned}$$

eine holomorphe Funktion, die f fortsetzt. □

V.2.10 *Beispiel.* Die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{\sin(z)}{z} \end{aligned}$$

hat in 0 eine hebbare Singularität. Nach Definition II.5.2, i), gilt

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad \sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots$$

Es folgt

$$\forall z \in \mathbb{C}^* : \quad \frac{\sin(z)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} \pm \dots$$

V.2.11 Lemma. Die Singularität in a ist genau dann außerwesentlich, wenn die Laurentreihe nur endlich viele negative Glieder hat:

$$\exists l \in \mathbb{Z} \forall k < l : \quad a_k = 0.$$

Beweis. Die Singularität sei außerwesentlich. Es sei $l \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl, so dass die Funktion $h: U \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto (z-a)^l \cdot f(z)$, eine holomorphe Fortsetzung \tilde{h} besitzt. Die Eindeutigkeit der Laurentzerlegung in Satz V.2.1 impliziert

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z-a)^k = \frac{1}{(z-a)^l} \cdot T_{\tilde{h},a}(z).$$

Es folgt

$$\forall k < -l : \quad a_k = 0.$$

Sei umgekehrt $l \in \mathbb{Z}$ mit $a_k = 0, k < l$. Dann ist

$$(z-a)^{-l} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+l} \cdot (z-a)^k$$

die Laurentreihe der Funktion $h: U \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto (z-a)^{-l} \cdot f(z)$. Nach Lemma V.2.9 ist die Singularität von h hebbar. \square

V.2.12 *Bemerkung.* Man beachte, dass

$$\text{Ord}(f, a) = \max\{l \in \mathbb{Z} \mid \forall k < l : a_k = 0\}.$$

V.2.13 *Beispiel.* Die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{\exp(z)}{z^3} \end{aligned}$$

weist im Nullpunkt eine Polstelle der Ordnung 3 auf. Ihre Laurentreihe ist

$$\underbrace{\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2 \cdot z}}_{=h(\frac{1}{z})} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{5!} + \dots$$

Aus Lemma V.2.9 und Lemma V.2.11 ergibt sich:

V.2.14 Lemma. Die Singularität a ist genau dann eine wesentliche, wenn die Laurentreihe unendlich viele negative Glieder hat:

$$\#\{k \geq 1 \mid a_{-k} \neq 0\} = \infty.$$

V.2.15 Beispiel. Die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) \end{aligned}$$

hat in 0 eine wesentliche Singularität. Sie hat die Laurentreihe

$$1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2! \cdot z^4} - \frac{1}{3! \cdot z^6} + \frac{1}{4! \cdot z^8} \pm \dots$$

$=h\left(\frac{1}{z}\right)$

im Entwicklungspunkt 0.

V.2.16 Aufgaben (Laurententwicklung). i) Es sei

$$\begin{aligned} f: G := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - i| < 2\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{z}{z^2 + 1}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Laurentreihe von f und den Typ der Singularität von f in i .

ii) Es seien

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z \cdot (z - 1) \cdot (z - 2)} \end{aligned}$$

und

$$G := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}, \quad 0 \leq r < R.$$

Bestimmen Sie die Laurentreihe von f für a) $r = 0$ und $R = 1$, b) $r = 1$ und $R = 2$ und c) $r = 2$ und $R = \infty$ mittels Partialbruchzerlegung.

V.3 Meromorphe Funktionen

V.3.1 Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine Teilmenge $M \subset U$ liegt diskret in U , wenn U keinen Häufungspunkt von M enthält.

V.3.2 Beispiel. Es sei

$$M := \left\{ \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \right\} \subset \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}.$$

Der einzige Häufungspunkt von M in \mathbb{C} ist 0. Er ist nicht in \mathbb{C}^* enthalten. Deshalb liegt M diskret in \mathbb{C}^* und nicht diskret in \mathbb{C} . Der Begriff des „Diskret-Liegens“ ist somit ein **relativer**.

V.3.3 Bemerkungen. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $M \subset U$.

i) Die Menge M liegt genau dann diskret in U , wenn es zu jedem Punkt $z \in U$ eine positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ mit

$$B(z, \varepsilon)^* \cap M = \emptyset$$

gibt. Man beachte, dass die Offenheit von U impliziert, dass ε so gewählt werden kann, dass $B(z, \varepsilon) \subset U$.

ii) Wenn $M \subset U$ diskret liegt, dann ist M als Teilmenge von U abgeschlossen. Das folgt aus i). Beispiel V.3.2 zeigt, dass M als Teilmenge von \mathbb{C} nicht abgeschlossen zu sein braucht.

V.3.4 Eigenschaften. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $M, N \subset U$ diskrete Teilmengen.

i) Die Menge M enthält höchstens abzählbar unendlich viele Elemente.

ii) Die Menge $M \cup N$ liegt ebenfalls diskret in U .

Beweis. i) Die Menge $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \cdot i$ liegt dicht in \mathbb{C} , und die Menge $\mathbb{Q}_{>0}$ liegt dicht in $\mathbb{R}_{>0}$. Deshalb gibt es eine Teilmenge $I \subset (\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \cdot i) \times \mathbb{Q}_{>0}$, so dass

$$U = \bigcup_{(a,r) \in I} \overline{B(a, r)}.$$

Da I abzählbar ist, genügt es zu zeigen, dass jede abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B(a, r)}$ nur endlich viele Punkte von M enthält. Bemerkung V.3.3, i), zeigt, dass es eine Familie $(B(a_j, \varepsilon_j))_{j \in J}$ von offenen Kreisscheiben gibt, so dass

$$\star \quad \forall j \in J: \#(B(a_j, \varepsilon_j) \cap M) \leq 1.$$

$$\star \quad U = \bigcup_{j \in J} B(a_j, \varepsilon_j).$$

Da $\overline{B(a, r)}$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $J' \subset J$ mit

$$\overline{B(a, r)} \subset \bigcup_{j \in J'} B(a_j, \varepsilon_j).$$

Offenbar haben wir

$$\#(\overline{B(a, r)} \cap M) \leq \#J'.$$

ii) Es sei $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von $M \cup N$. Wenn a kein Häufungspunkt von M ist, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B(a, \varepsilon)^*$ kein Element von M enthält. Für jede positive reelle Zahl $0 < \delta < \varepsilon$ muss $B(a, \delta)^*$ unendlich viele Elemente von N enthalten, und deshalb ist a ein Häufungspunkt von N . Damit liegt a nicht in U . \square

V.3.5 Satz. Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $M \subset G$ eine diskrete Teilmenge. Dann ist auch $G \setminus M$ ein Gebiet.

Beweis. Aus Bemerkung V.3.3, ii), folgt, dass $G \setminus M$ eine offene Teilmenge von \mathbb{C} ist. Es bleibt nachzuweisen, dass $G \setminus M$ wegzusammenhängend ist. Dazu seien $u, v \in G \setminus M$. Es gibt einen Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ in G mit $\gamma(a) = u$ und $\gamma(b) = v$. Da $\text{Spur}(\gamma)$ kompakt ist, können wir Parameter

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

und positive reelle Zahlen $\varepsilon_i > 0$, $i = 0, \dots, n$, finden, so dass

$$\text{Spur}(\gamma) \subset \bigcup_{i=0}^n B(\gamma(t_i), \varepsilon_i) \quad \text{und} \quad \overline{B(\gamma(t_i), \varepsilon_i)} \subset G, \quad i = 0, \dots, n.$$

Wie im Beweis von Eigenschaft V.3.4, i), zeigt man, dass die kompakte Menge

$$\bigcup_{i=0}^n \overline{B(\gamma(t_i), \varepsilon_i)}$$

nur endlich viele Punkte von M enthält. Es ist nun leicht, einen Weg $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ in

$$\left(\bigcup_{i=0}^n B(\gamma(t_i), \varepsilon_i) \right) \setminus M$$

mit $\sigma(c) = u$ und $\sigma(d) = v$ zu konstruieren. Dies überlassen wir der Leserin bzw. dem Leser als Übung. \square

V.3.6 Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine *meromorphe Funktion* auf U ist ein Paar (M, f) , das aus

- ★ einer diskreten Teilmenge $M \subset U$ und
- ★ einer holomorphen Funktion $f: U \setminus M \rightarrow \mathbb{C}$

besteht,⁵ so dass f in jedem Punkt $a \in M$ eine (nicht hebbare) Polstelle besitzt.

V.3.7 Beispiele. i) Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist (\emptyset, f) eine meromorphe Funktion. Wir werden sie auch künftig mit f bezeichnen.

ii) Es seien G ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $f \not\equiv 0$. Nach Satz IV.7.1 ist

$$N := \{z \in G \mid f(z) = 0\}$$

eine diskrete Teilmenge von G , so dass

$$\left(N, \frac{1}{f} \right)$$

eine meromorphe Funktion ist.

iii) Die meromorphe Funktion

$$\left(\pi \cdot \mathbb{Z}, \frac{\cos}{\sin} \right)$$

hat auf \mathbb{C} unendlich viele Null- und Polstellen.

V.3.8 Lemma. *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und (M, f) eine meromorphe Funktion auf U .*

i) *Wenn M endlich ist, dann gibt es holomorphe Funktionen $g, h: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit*

⁵Man beachte, dass nach Bemerkung V.3.3, i), jeder Punkt $a \in M$ eine isolierte Singularität von f ist.

$$\star M = \{z \in U \mid h(z) = 0\}.$$

$$\star \forall z \in U \setminus M: f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}.$$

ii) Jeder Punkt $z \in U$ besitzt eine offene Umgebung $z \in V \subset U$, so dass es holomorphe Funktionen $g, h: V \rightarrow \mathbb{C}$, $h \neq 0$, gibt, für die

$$\forall z \in V \setminus M: f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

gilt.

Beweis. i) Wir beweisen die Aussage vermöge vollständiger Induktion über $n := \#M$.

$n = 0$. Hier können wir $g = f$ und $h = 1$ nehmen.

$n \rightarrow n + 1$. Es sei $a \in M$. Nach Lemma V.1.8 gibt es eine holomorphe Funktion $f_0: (U \setminus M) \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f_0(z) \neq 0$, so dass

$$\forall z \in U \setminus \{a\}: f(z) = \frac{f_0(z)}{(z-a)^k}, \quad k := -\text{Ord}(f, a).$$

Nun ist $(M \setminus \{a\}, f_0)$ eine meromorphe Funktion, zu der es nach Induktionsvoraussetzung holomorphe Funktionen $g, h_0: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\star M \setminus \{a\} = \{z \in U \mid h_0(z) = 0\}$$

$$\star \forall z \in U \setminus M: f_0(z) = \frac{g(z)}{h_0(z)}$$

gibt. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} h: U &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto (z-a)^k \cdot h_0(z). \end{aligned}$$

ii) Jeder Punkt $z \in U$ besitzt eine offene Umgebung $z \in V \subset U$, so dass $\#(V \cap M) \leq 1$ (s. Bemerkung V.3.3, i). Damit können wir i) auf die meromorphe Funktion $(V \cap M, f|_{(V \setminus M)})$ auf V anwenden. \square

Der Körper der meromorphen Funktionen auf einem Gebiet

Die bisher besprochenen Beispiele und Aussagen illustrieren bereits die algebraischen Eigenschaften meromorpher Funktionen und erläutern ihr Auftreten, z.B. als Kehrwerte holomorpher Funktionen (Beispiel V.3.7, ii). Jetzt wollen wir die algebraische Struktur der Menge der meromorphen Funktionen auf einem **Gebiet** G genau erklären.

Addition meromorpher Funktionen

Es seien (M, f) und (N, g) meromorphe Funktionen auf G . Die Menge $M \cup N$ ist nach Eigenschaft V.3.4, ii), diskret, und wir können

$$\begin{aligned} h: G \setminus (M \cup N) &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) + g(z) \end{aligned}$$

betrachten. Diese Funktion hat eventuell hebbare Singularitäten in Punkten von $M \cup N$. Deshalb definieren wir

$$H := \{a \in M \cup N \mid a \text{ ist hebbare Singularität von } h\}, \quad P := (M \cup N) \setminus H$$

und

$$\tilde{h}: G \setminus P = (G \setminus (M \cup N)) \cup H \longrightarrow \mathbb{C}$$

als holomorphe Fortsetzung von h . Schließlich sei

$$(M, f) + (N, g) := (P, \tilde{h}).$$

V.3.9 Beispiele. i) Es gilt z.B.

$$\left(\{0\}, \frac{1}{z}\right) + \left(\{0, 1\}, -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right) = \left(\{1\}, \frac{1}{z-1}\right).$$

ii) Für jede meromorphe Funktion (M, f) auf G gilt

$$(M, f) + (\emptyset, 0) = (M, f)$$

und

$$(M, f) + (M, -f) = (\emptyset, 0).$$

Multiplikation meromorpher Funktionen

Es seien (M, f) und (N, g) meromorphe Funktionen auf G . Analog zur Definition der Summe der beiden Funktionen lässt sich das Produkt

$$(M, f) \cdot (N, g)$$

einführen.

V.3.10 Beispiele. i) Es gilt z.B.

$$(\emptyset, (z-1) \cdot (z-2)) \cdot \left(\{0, 1\}, \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right) = \left(\{0\}, 2 \cdot z - 5 + \frac{2}{z}\right).$$

ii) Für jede meromorphe Funktion (M, f) auf G gilt

$$(M, f) \cdot (\emptyset, 1) = (M, f).$$

iii) Es sei $(M, f) \neq (\emptyset, 0)$ eine nichttriviale meromorphe Funktion auf G . Nach Satz V.3.5 ist $G \setminus M$ ein Gebiet, und nach Satz IV.7.1 ist

$$N := \{z \in G \setminus M \mid f(z) = 0\}$$

diskret in $G \setminus M$. Zu jedem $a \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(a, \varepsilon)^* \subset G$ und eine holomorphe Funktion $f_0: B(a, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f_0(a) \neq 0$ und $f(z) = f_0(z)/(z-a)^k$, $z \in B(a, \varepsilon)^*$, $k := -\text{Ord}(f, a)$. Nach Verkleinerung von ε können wir $f_0(z) \neq 0$ für alle $z \in B(a, \varepsilon)$ annehmen.

Damit ist kein Punkt aus M ein Häufungspunkt für N , d.h. N und damit auch $M \cup N$ (s. Eigenschaft V.3.4, ii) liegen diskret in G . Wir betrachten

$$\begin{aligned} h: G \setminus (M \cup N) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{f(z)}. \end{aligned}$$

Jeder Punkt aus M ist eine hebbare Singularität von h , und die holomorphe Fortsetzung

$$\tilde{h}: G \setminus N \longrightarrow \mathbb{C}$$

hat Nullstellen in den Punkten von M . Wir erklären

$$(M, f)^{-1} := (N, \tilde{h}).$$

Man beachte

$$(M, f) \cdot (M, f)^{-1} = (\emptyset, 1).$$

V.3.11 Satz. Die Menge

$$\mathcal{M}(G) := \{ (M, f) \text{ meromorph auf } G \}$$

ist zusammen mit der obigen Addition und Multiplikation ein Körper.

Beweis. Es sind nur noch die Kommutativ-, Assoziativgesetze und das Distributivgesetz zu überprüfen (vgl. [13], Definition 1.6.1; [16], Definition III.1.1, ii). Betrachten wir z.B. drei meromorphe Funktionen (M, f) , (N, g) und (P, h) . Dann sind

$$((M, f) \cdot (N, g)) \cdot (P, h) \quad \text{und} \quad (M, f) \cdot ((N, g) \cdot (P, h))$$

auf der offenen Menge $G \setminus (M \cup N \cup P)$ durch die Vorschrift

$$z \longmapsto (f(z) \cdot g(z)) \cdot h(z) = f(z) \cdot (g(z) \cdot h(z))$$

gegeben. Daraus folgt leicht, dass sie als meromorphe Funktionen gleich sind. Alle anderen Gleichungen verifiziert man analog. \square

V.4 Die riemannsche Zahlenkugel

V.4.1 Definitionen. i) Es sei

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

ii) Eine Teilmenge $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ ist *offen*, wenn gilt

★ $U \cap \mathbb{C}$ ist eine offene Teilmenge von \mathbb{C} .

★ Falls $\infty \in U$, dann existiert eine positive reelle Zahl $R > 0$, so dass

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > R \} \subset U.$$

V.4.2 Aufgabe. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{T} := \{ U \subset \overline{\mathbb{C}} \mid U \text{ ist im Sinne von Definition V.4.1, ii), offen} \}$$

eine Topologie (s. [14], Definition 1.4.1, a) auf $\overline{\mathbb{C}}$ ist.

V.4.3 Satz. *Im topologischen Raum $(\overline{\mathbb{C}}, \mathcal{T})$ gilt das Hausdorffaxiom ([14], Definition 1.5.1), und $(\overline{\mathbb{C}}, \mathcal{T})$ ist kompakt.*

Beweis. Das Hausdorffaxiom verlangt, dass es zu zwei verschiedenen Punkten $z_1 \neq z_2$ aus $\overline{\mathbb{C}}$ offene Mengen $U_1, U_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ mit $z_1 \in U_1, z_2 \in U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ gibt. Falls $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, dann ist die Aussage bekannt (vgl. [14], Beispiel 1.5.2). Für $z \in \mathbb{C}$ wähle man $\varepsilon > 0, R > |z| + \varepsilon$,

$$U_1 := B(z, \varepsilon) \quad \text{und} \quad U_2 := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > R \} \cup \{\infty\}.$$

Dann gilt $z \in U_1, \infty \in U_2, U_1$ und U_2 sind offen im Sinne von Definition V.4.1, ii), und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Jetzt ist noch die Überdeckungseigenschaft [14], Definition 2.2.1, b), nachzuweisen. Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $\overline{\mathbb{C}}$. Wir wählen einen Index $i_0 \in I$ mit $\infty \in U_{i_0}$ und eine positive reelle Zahl $R > 0$ mit

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > R \} \subset U_{i_0}.$$

Die Mengen $(U_i \cap \mathbb{C})_{i \in I}$ überdecken $\overline{B(0, R)}$. Nach [14], Satz 2.2.12, ist $\overline{B(0, R)}$ kompakt. Deshalb existiert eine endliche Teilmenge $I' \subset I$, so dass

$$\overline{B(0, R)} \subset \bigcup_{i \in I'} (U_i \cap \mathbb{C}) \subset \bigcup_{i \in I'} U_i.$$

Es sei $I'' = I' \cup \{i_0\}$. Aus der Konstruktion folgt

$$\overline{\mathbb{C}} = \bigcup_{i \in I''} U_i.$$

Wir haben zu der gegebenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung gefunden. \square

Die folgenden Erläuterungen helfen, eine nützliche Anschauung für $\overline{\mathbb{C}}$ zu gewinnen. Wir betrachten die \mathbb{R} -lineare Einbettung

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x + y \cdot i &\longmapsto (x, y, 0). \end{aligned}$$

Die *zweidimensionale Sphäre* ist

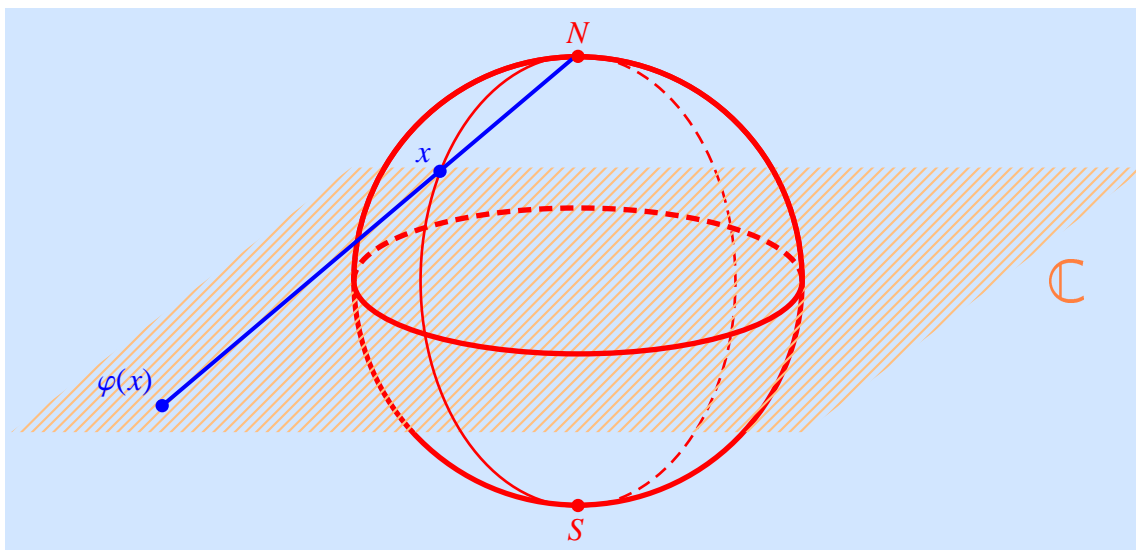
$$S^2 := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}.$$

Ihr *Nord-* bzw. *Südpol* ist

$$N := (0, 0, 1) \quad \text{bzw.} \quad S := (0, 0, -1).$$

Die *stereographische Projektion* von N aus ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: S^2 \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \frac{x_1 + x_2 \cdot i}{1 - x_3}. \end{aligned}$$



Sie ordnet einem Punkt $x \in S^2 \setminus \{N\}$ den Schnittpunkt der Gerade durch N und x mit der Ebene $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^3$ zu. Offenbar ist φ stetig. Ihre Umkehrabbildung ist

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}: \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 \setminus \{N\} \\ z = x + y \cdot i &\longmapsto \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdot (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1). \end{aligned}$$

Sie ist ebenfalls stetig. Daher ist φ ein **Homöomorphismus**.

V.4.4 Aufgaben. i) Definieren Sie einen entsprechenden Homöomorphismus

$$\psi: S^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

ii) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}: S^2 &\longrightarrow \bar{\mathbb{C}} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \varphi(x), & \text{falls } x \neq N \\ \infty, & \text{falls } x = N \end{cases} \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus ist.

iii) Skizzieren Sie für eine reelle Zahl $R > 1$ die Menge

$$\varphi^{-1}\left(\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\right\}\right) \subset S^2.$$

V.4.5 Bemerkung. Zu der oben definierten Topologie gehört ein Konvergenzbegriff: Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\bar{\mathbb{C}}$ konvergiert gegen ∞ , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : z_n = \infty \vee |z_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

gibt. Man vergleiche [13], Definition 2.4.1.

V.4.6 Aufgabe. Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und (M, f) eine meromorphe Funktion. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{f}: U &\longrightarrow \bar{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto \begin{cases} f(z), & \text{falls } z \notin M \\ \infty, & \text{falls } z \in M \end{cases} \end{aligned}$$

stetig ist.⁶

V.4.7 Rechenregeln für ∞ . Wir führen folgende Rechenregeln auf $\bar{\mathbb{C}}$ ein:

$$\frac{1}{0} = \infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{\infty} = 0.$$

Mit diesen Rechenregeln können wir den Begriff der meromorphen Funktion auf offene Teilmengen von $\bar{\mathbb{C}}$ ausdehnen.

V.4.8 Definitionen. Es sei $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ eine offene Teilmenge.

i) Eine Abbildung $f: U \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ wird als *holomorphe Abbildung* oder *meromorphe Funktion* bezeichnet, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

★ Durch (M, f_0) mit $M := \mathbb{C} \cap f^{-1}(\infty)$ und $f_0 := f|_{(U \cap \mathbb{C}) \setminus f^{-1}(\infty)}$ ist eine meromorphe Funktion auf $U \cap \mathbb{C}$ gegeben.

★ Es seien⁷

$$\widehat{U} := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{z} \in U \right\}, \quad N := \left\{ z \in \widehat{U} \mid f\left(\frac{1}{z}\right) = \infty \right\}$$

und

$$\begin{aligned} \widehat{f}: \widehat{U} &\longrightarrow \bar{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto f\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Das Paar $(N, \widehat{f}|_{\widehat{U} \setminus N})$ ist eine meromorphe Funktion auf \widehat{U} .

ii) Eine Funktion $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ ist *holomorph*, wenn sie als Abbildung nach $\bar{\mathbb{C}}$ holomorph im Sinn von Teil i) der Definition ist, d.h., wenn die Funktionen $f|_{U \cap \mathbb{C}}: U \cap \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\widehat{f}: \widehat{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph sind.

iii) Für eine holomorphe Funktion $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ werden die Begriffe *isolierte, hebbare, außerwesentliche* und *wesentliche Singularität, Polstelle, Ordnung* usw. auf die offensichtliche Weise erklärt.

V.4.9 Bemerkung. Es sei $f: \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ eine holomorphe Abbildung. Dann ist $f^{-1}(\infty)$ eine diskrete Teilmenge. Da $\bar{\mathbb{C}}$ kompakt ist (Satz V.4.3), ist diese Teilmenge endlich (vgl. Beweis von Eigenschaft V.3.4, i).

⁶Auf diese Weise können wir meromorphe Funktionen als auf ganz U definierte Abbildungen auffassen. Als Warnhinweis sei vermerkt, dass diese Konstruktion auf meromorphe Funktionen in einer komplexen Veränderlichen beschränkt ist. Das Analogon für meromorphe Funktionen in $n \geq 2$ Variablen ist etwas komplizierter.

⁷Man beachte die Rechenregel $1/0 = \infty$.

V.4.10 Aufgaben. i) Eine Teilmenge $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ ist ein *Gebiet*, wenn sie offen und wegzusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass eine offene Teilmenge $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ genau dann ein Gebiet ist, wenn der Durchschnitt $U \cap \mathbb{C}$ ein Gebiet ist.

ii) Es seien $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet und

$$\mathcal{M}(G) := \{ f: G \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \mid f \text{ ist holomorph} \}.$$

Überprüfen Sie, dass Addition und Multiplikation von Funktionen auf $\mathcal{M}(G)$ die Struktur eines Körpers induzieren.

V.4.11 Beispiele. i) Es seien $n \geq 1, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $a_n \neq 0$ und

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_n \cdot z^n \end{aligned}$$

die zugehörige polynomiale Funktion. Sie hat in ∞ eine isolierte Singularität. Um den Typ dieser Singularität zu bestimmen, müssen wir den Typ der Singularität 0 der Funktion

$$\begin{aligned} \widehat{f}: \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \end{aligned}$$

ermitteln. Es ist jetzt ersichtlich, dass es sich um eine Polstelle der Ordnung n handelt.

ii) Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ hat ebenfalls eine isolierte Singularität in ∞ . Die Funktion

$$\begin{aligned} g: \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot z^k} \end{aligned}$$

hat in 0 eine wesentliche Singularität, so dass \exp in ∞ eine wesentliche Singularität aufweist.

iii) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen, $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $a_m, b_n \neq 0$ und

$$\begin{aligned} p: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_m \cdot z^m, \\ q: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto b_0 + b_1 \cdot z + \dots + b_n \cdot z^n \end{aligned}$$

die entsprechenden polynomialen Funktionen. Wir nehmen an, dass p und q keine gemeinsamen Nullstellen haben,⁸ und definieren die holomorphe Abbildung

$$\begin{aligned} f_0: \mathbb{C} &\rightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{p(z)}{q(z)}. \end{aligned}$$

⁸Dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit. Warum nicht?

Sie hat in ∞ eine außerwesentliche Singularität, so dass wir sie zu einer holomorphen Abbildung

$$f: \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

fortsetzen können. Es gilt

$$f(\infty) = \begin{cases} 0, & \text{falls } m < n \\ \infty, & \text{falls } m > n \\ \frac{a_n}{b_n}, & \text{falls } m = n \end{cases}.$$

V.4.12 Definitionen. i) Es sei $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Sie ist *ganzrational*, wenn sie im Punkt ∞ eine außerwesentliche Singularität hat, und *transzendent*, wenn der Punkt ∞ eine wesentliche Singularität ist.

ii) Eine holomorphe Abbildung $f: \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ist *rational*, wenn es natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, komplexe Zahlen $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ mit $a_m, b_n \neq 0$ und

$$\forall z \in \overline{\mathbb{C}}: \quad f(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_m \cdot z^m}{b_0 + b_1 \cdot z + \dots + b_n \cdot z^n}$$

gibt.

V.4.13 Bemerkung. Es sei $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Nach Folgerung IV.6.9 ist sie überall durch ihre Taylorreihe $T_{f,0}(z)$ gegeben. Daraus folgt, dass die Funktion f genau dann ganzrational ist, wenn sie polynomial ist.

V.4.14 Satz. *Jede holomorphe Abbildung $f: \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ist rational.*

Beweis. Nach Bemerkung V.4.9 ist die Menge $M := f^{-1}(\infty)$ endlich. Es sei

$$M \cap \mathbb{C} = \{a_1, \dots, a_s\}.$$

Die Funktion

$$f|_{\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_s\}}: \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_s\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist holomorph und hat in a_1, \dots, a_s Polstellen. Es sei

$$h_i(z) = \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{ij}}{(z - a_i)^j}$$

der Hauptteil in $a_i, i = 1, \dots, s$. Die Singularitäten der Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_s\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) - \sum_{i=1}^s h_i(z) \end{aligned}$$

sind hebbar. Es sei $g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ die holomorphe Fortsetzung dieser Funktion. Sie hat in ∞ eine außerwesentliche Singularität. Nach Bemerkung V.4.13 ist g eine polynomiale Funktion. Wir erkennen, dass

$$f = g + \sum_{i=1}^s h_i$$

eine rationale Funktion ist. □

Die Kompaktheit der „komplexen Mannigfaltigkeit“ $\overline{\mathbb{C}}$ erzwingt, dass die holomorphen Abbildungen $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ **algebraischer** Natur sind. Der Beweis von Satz V.4.14 zeigt weiter:

V.4.15 Folgerung (Partialbruchzerlegung). *Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen, $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $a_m, b_n \neq 0$ und*

$$\begin{aligned} p: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_m \cdot z^m, \\ q: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto b_0 + b_1 \cdot z + \dots + b_n \cdot z^n \end{aligned}$$

die zugeordneten polynomialen Funktionen. Dabei haben p und q keine gemeinsame Nullstelle. Es seien weiter

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) = 0\} = \{c_1, \dots, c_s\}$$

und

$$k_i := \text{Ord}(q, c_i), \quad i = 1, \dots, s.$$

Dann gibt es eine polynomiale Funktion $r: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und komplexe Zahlen $d_{ij} \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, k_i$, $i = 1, \dots, s$, so dass

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{c_1, \dots, c_s\}: \quad \frac{p(z)}{q(z)} = r(z) + \sum_{i=1}^s \left(\frac{d_{i1}}{z - c_i} + \dots + \frac{d_{ik_i}}{(z - c_i)^{k_i}} \right).$$

V.4.16 Folgerung (Satz von Liouville). *Jede holomorphe Funktion $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ ist konstant.*

Beweis. Die Funktion $f|_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph. Sie hat in ∞ eine hebbare Singularität. Nach Bemerkung V.4.13 und Beispiel V.4.11 ist sie konstant. \square

V.4.17 Aufgaben (Möbiustransformationen). Ein Automorphismus von $\overline{\mathbb{C}}$ ist eine bijektive holomorphe Abbildung $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Wir definieren die Gruppe

$$\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) := \{f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \mid f \text{ ist Automorphismus}\}.$$

i) Sei

$$\mathcal{Z} = \{g \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) \mid g \cdot h = h \cdot g \quad \forall h \in \text{GL}_2(\mathbb{C})\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{C}^\star \right\}$$

das Zentrum von $\text{GL}_2(\mathbb{C})$. Dann ist

$$\text{PGL}_2(\mathbb{C}) := \text{GL}_2(\mathbb{C}) / \mathcal{Z}$$

wiederum eine Gruppe. Zeigen, dass

$$\begin{aligned} \Phi: \text{PGL}_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \left(z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \right) \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

ii) Es seien u, v, w drei verschiedene Punkte auf der riemannschen Zahlkugel $\overline{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie, dass es genau ein Element $m \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ gibt, so dass der Automorphismus $f := \Phi(m): \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

$$f(0) = u, \quad f(1) = v \quad \text{und} \quad f(\infty) = w$$

erfüllt.

Die Einführung der riemannschen Zahlenkugel ist ein wichtiger Schritt nach vorn: Es handelt sich um das erste Beispiel einer **kompakten** komplexen Mannigfaltigkeit (vgl. [14], Kapitel 11, Abschnitt 11.3 und Anhang, für Erläuterungen zu reellen Mannigfaltigkeiten). Wir haben gesehen, wie man auf $\overline{\mathbb{C}}$ genauso wie auf einer offenen Teilmenge der Ebene Funktionentheorie betreiben kann. Dabei unterscheiden sich jedoch die globalen Aussagen stark voneinander: Während es auf jeder nichtleeren offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ stets sehr viele nichtkonstante holomorphe Funktionen gibt, z.B. polynomiale, existieren solche Funktionen auf der riemannschen Zahlenkugel nicht. Jede meromorphe Funktion auf der riemannschen Zahlenkugel ist Quotient zweier polynomialer Funktionen, also ein rein algebraisches Objekt. In der Tat ist $\overline{\mathbb{C}}$ in gewisser Weise selber ein rein algebraisches Objekt, nämlich eine **projektive algebraische Mannigfaltigkeit** oder eine **algebraische Kurve**. Diese fundamentalen Ansätze werden z.B. in den Büchern [5] und [6] bis an die Grenzen der modernen Forschung weiterentwickelt.

V.5 Automorphismen von \mathbb{C}

Wir führen die Untersuchung von Automorphismen gewisser Gebiete in der komplexen Ebene fort und bestimmen nun die Automorphismen von ganz \mathbb{C} .

V.5.1 Satz. *Eine Abbildung $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann biholomorph, wenn es komplexe Zahlen $a \in \mathbb{C}^*$ und $b \in \mathbb{C}$ gibt, so dass*

$$\forall z \in \mathbb{C}: \quad \varphi(z) = a \cdot z + b. \quad (\text{V.6})$$

Beweis. Wenn φ durch die Formel (V.6) gegeben ist, dann ist φ sicherlich eine biholomorphe Abbildung.

Nun sei $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine biholomorphe Funktion. Wir zeigen, dass φ in ∞ eine außerwesentliche Singularität hat. Es handelt sich dann um eine ganzrationale also nach Bemerkung V.4.13 polynomiale Funktion. Ferner ist φ injektiv. Deshalb hat φ genau eine Nullstelle und somit nach Satz IV.5.11 den Grad eins.

Um die Behauptung über die Singularität in ∞ nachzuweisen, zeigen wir, dass die Funktion

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \varphi\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

in 0 eine außerwesentliche Singularität hat. Da die Abbildung ψ holomorph und nicht konstant ist, sind die Mengen

$$A := \{\psi(z) \mid 0 < |z| < 1\} \quad \text{und} \quad B := \{\psi(z) \mid 1 < |z|\}$$

nach Satz IV.8.1 offen und sicherlich nicht leer. Die Abbildung ψ ist injektiv, so dass

$$A \cap B = \emptyset.$$

Wir wählen einen Punkt $b \in B$ und eine positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ mit $B(b, \varepsilon) \subset B$. Wenn in 0 eine wesentliche Singularität vorläge, dann gäbe es nach dem Satz von Casorati–Weierstraß V.1.11 eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

- ★ $z_n \in \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{N}$,
- ★ $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$,
- ★ $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(z_n) = b$.

Es existiert eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_0 : 0 < |z_n| < 1.$$

Das impliziert

$$\forall n \geq n_0 : \psi(z_n) \in A, \quad \text{so dass} \quad |\psi(z_n) - b| \geq \varepsilon.$$

Es folgt

$$0 = |b - b| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\psi(z_n) - b| \geq \varepsilon,$$

ein Widerspruch. □

V.5.2 Bemerkung. Die Gebiete \mathbb{C} und \mathbb{H} sind nicht biholomorph äquivalent: Auf \mathbb{H} gibt es die nichtkonstante beschränkte holomorphe Funktion $C: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$, auf \mathbb{C} gibt es nach dem Satz von Liouville IV.5.9 keine solche Funktion. Diese Nichtäquivalenz schlägt sich auch in den Automorphismengruppen nieder: Wir haben

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

Für die Gruppe gilt ([16], Aufgabe II.9.19)

$$[\text{PSL}_2(\mathbb{R}), \text{PSL}_2(\mathbb{R})] = \text{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

Auf der anderen Seite haben wir⁹

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*,$$

und man berechnet sofort

$$[\text{Aut}(\mathbb{C}), \text{Aut}(\mathbb{C})] = \mathbb{C}.$$

Die Gruppen $\text{Aut}(\mathbb{H})$ und $\text{Aut}(\mathbb{C})$ sind also nicht isomorph.

⁹Das **semidirekte Produkt** wird in [16], Definition II.12.10, erklärt. Dabei ist $\varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C})$ die Abbildung $a \mapsto (z \mapsto a \cdot z)$.

VI

Der Residuensatz

Der Residuensatz ist die allgemeinste Integralformel, die in dieser Vorlesung betrachtet wird. Sie drückt das Wegintegral einer meromorphen Funktion entlang eines Wegs, der keine Polstelle trifft, durch gewisse topologische Invarianten, die **Umlaufzahlen** um die Singularitäten, und funktionentheoretische Invarianten, die **Residuen** in den Singularitäten, aus. Da man sowohl für die Umlaufzahlen als auch für die Residuen vielfältige Berechnungsmethoden entwickeln kann, ermöglicht es einem der Residuensatz unter anderem, gewisse Integrale explizit auszuwerten. Dies werden wir an einigen Beispielen vorführen, darunter die Partialbruchzerlegung des Kotangens.

VI.1 Umlaufzahlen

VI.1.1 Definition. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener stückweise glatter Weg. Für einen Punkt $z_0 \notin \text{Spur}(\gamma)$ ist

$$\chi(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta$$

die *Umlaufzahl* von γ um z_0 .

VI.1.2 Beispiel. Es seien $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eine ganze Zahl, $r > 0$ eine positive reelle Zahl, $z_0 \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto z_0 + r \cdot \exp(2\pi \cdot i \cdot k \cdot t). \end{aligned}$$

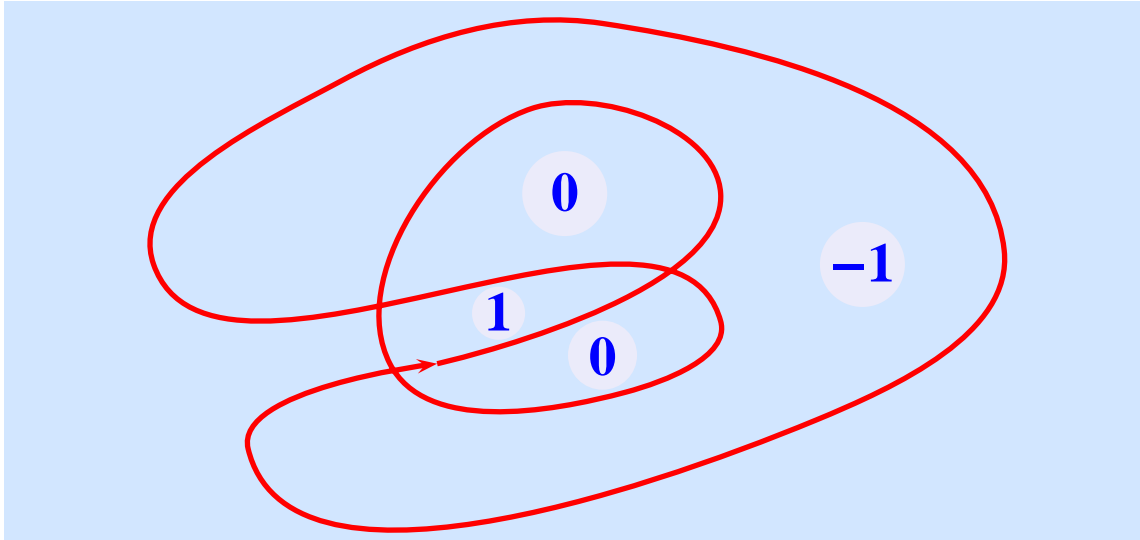
Es gilt

$$\chi(\gamma, z) = \begin{cases} k, & \text{falls } |z - z_0| < r \\ 0, & \text{falls } |z - z_0| > r \end{cases}.$$

Dies berechnet man für $z = z_0$ direkt mit Definition IV.2.1, iv). Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < r$ wendet man denselben Trick wie im Beweis von Lemma IV.5.1 an. Für $r < r' < |z -$

z_0 ist $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$ holomorph auf $B(z_0, r')$. Der Cauchy-Integralsatz IV.4.6 auf dem sternförmigen Gebiet $B(z_0, r')$ liefert das Verschwinden der Umlaufzahl.

VI.1.3 Anschauung. Die Umlaufzahl gibt an, wie oft der Weg γ den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ im mathematisch positiven Sinne umrundet:



Diese anschauliche Definition lässt sich mit Methoden der **algebraischen Topologie** formalisieren. Dazu nehmen wir der Einfachheit halber $z_0 = 0$ an. Vom Standpunkt der **Homotopietheorie** gilt $\mathbb{C}^* \approx S^1$. Die universelle Überlagerung haben wir schon in Beispiel II.7.6 angesehen. Sie ist durch $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, \varphi \mapsto \exp(i \cdot \varphi)$, gegeben. Für $x \in \mathbb{R}$ lässt sich ein Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow S^1$ mit $\gamma(a) = \pi(x)$ auf eindeutige Weise zu einem Weg $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- ★ $\tilde{\gamma}(a) = x$,
- ★ $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$

anheben. Ist γ geschlossen, gilt also $\gamma(a) = \gamma(b)$, dann gilt

$$\pi(\tilde{\gamma}(b)) = \pi(\tilde{\gamma}(a)),$$

und es gibt eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\tilde{\gamma}(b) = x + 2\pi \cdot k.$$

Diese Zahl hängt nicht von x ab. Dies ist die mathematisch präzise Definition der Umlaufzahl, die unsere Anschauung wiedergibt. Die benötigten Hilfsmittel aus der algebraischen Topologie werden z.B. in dem Buch [9] bereitgestellt.

Wir werden nicht nachweisen, dass Definition VI.1.1 dasselbe Ergebnis liefert wie die gerade besprochene topologische. Als wichtiges Indiz, dass dem so ist, zeigen wir allerdings:

VI.1.4 Satz. *Es seien $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener stückweise glatter Weg und $z_0 \notin \text{Spur}(\gamma)$. Dann ist die Umlaufzahl von γ um z_0 eine ganze Zahl:*

$$\chi(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz für einen glatten Weg γ . Der Beweis lässt sich leicht auf stückweise glatte Wege verallgemeinern. Wir definieren

$$g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds.$$

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften:

$$\star g(a) = 0, g(b) = 2\pi \cdot i \cdot \chi(\gamma, z_0).$$

$$\star g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}, t \in [a, b].$$

Es sei

$$h: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto \exp(-g(t)) \cdot (\gamma(t) - z_0).$$

Für jede reelle Zahl $t \in [a, b]$ gilt

$$h'(t) = -g'(t) \cdot \exp(-g(t)) \cdot (\gamma(t) - z_0) + \exp(-g(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$= \exp(-g(t)) \cdot (\gamma'(t) - g'(t) \cdot (\gamma(t) - z_0)) = 0.$$

Daher ist die Funktion h konstant. Wir finden

$$\gamma(a) - z_0 \stackrel{g(a)=0}{=} \exp(-g(a)) \cdot (\gamma(a) - z_0) = \exp(-g(b)) \cdot (\gamma(b) - z_0) \stackrel{\gamma(a)=\gamma(b)}{=} \exp(-g(b)) \cdot (\gamma(a) - z_0).$$

Wegen $z_0 \notin \text{Spur}(\gamma)$ haben wir $\gamma(a) \neq z_0$ und daher

$$\exp(-g(b)) = 1.$$

Deshalb folgt

$$2\pi \cdot i \cdot \chi(\gamma, z_0) = g(b) \in 2\pi \cdot i \cdot \mathbb{Z}$$

wie behauptet. □

VI.1.5 Aufgaben (Umlaufzahlen). i) Es seien n und k ganze Zahlen und $0 < r \neq 1$. Wir betrachten den Weg $\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $t \longmapsto \exp(i \cdot n \cdot t) + r \cdot \exp(i \cdot k \cdot t)$. Berechnen Sie die Umlaufzahl von γ um den Nullpunkt.

ii) Es sei

$$\gamma: [-r, r + \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto \begin{cases} t, & \text{falls } -r \leq t \leq r \\ r \cdot \exp(i \cdot (t - r)), & \text{falls } r \leq t \leq r + \pi \end{cases}.$$

Bestimmen Sie die Umlaufzahl von γ um $z_0 = i$ in Abhängigkeit von r .

iii) Es seien $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet, $\gamma: [a, b] \longrightarrow G$ ein stückweise glatter und geschlossener Weg und $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(z)^2 = z$ für alle $z \in G$. Zeigen Sie, dass

$$\chi(\gamma, 0) = 2 \cdot \chi((f \circ \gamma), 0).$$

Folgern Sie, dass es auf \mathbb{C}^* keine Wurzelfunktion geben kann.

VI.2 Der Residuensatz

VI.2.1 Definition. Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $z_0 \in U$ und $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Für eine positive reelle Zahl $r > 0$, so dass $B(z_0, r) \subset U$, sei

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

die Laurententwicklung von f auf dem Ringgebiet $B(z_0, r)^*$. Die Zahl a_{-1} heißt das *Residuum* von f an der Stelle z_0 .

Schreibweise. $\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}$.

VI.2.2 Bemerkung. In der Situation der Definition gilt

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(z_0, r)} f(\zeta) d\zeta.$$

VI.2.3 Beispiele. i) Ist in der obigen Situation z_0 eine hebbare Singularität von f , so gilt

$$\text{Res}(f, z_0) = 0.$$

ii) Für eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\text{Res}(z^k, 0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = -1 \\ 0, & \text{falls } k \neq -1 \end{cases}.$$

Das spiegelt abermals wieder, dass die Funktion $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^k$, nur für $k = -1$ keine Stammfunktion besitzt.

VI.2.4 Satz (Der Residuensatz). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $a_1, \dots, a_k \in D$ k verschiedene Punkte. Weiter seien $f: D \setminus \{a_1, \dots, a_k\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener stückweise glatter Weg in $D \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$. Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 2\pi \cdot i \cdot \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, a_j) \cdot \chi(\gamma, a_j).$$

Man beachte, dass nur diejenigen Punkte aus $\{a_1, \dots, a_k\}$ zu der Summe auf der rechten Seite beitragen, die von γ umlaufen werden.

Beweis von Satz VI.2.4. Wir betrachten die Laurentreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^j \cdot (z - a_j)^k$$

von f mit Entwicklungspunkt a_j sowie ihren Hauptteil

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}^j}{(z - a_j)^k}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Dieser Hauptteil definiert eine holomorphe Funktion h_j auf $\mathbb{C} \setminus \{a_j\}$, $j = 1, \dots, k$. Ferner sei

$$\begin{aligned} \tilde{h}_j: \mathbb{C} \setminus \{a_j\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_{-k}^j}{(z - a_j)^k}, \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Dies ist eine holomorphe Funktion. Mit einem Argument, das dem Beweis der Holomorphie einer Potenzreihe ähnelt (Satz III.3.14), zeigt man, dass \tilde{h}_j eine Stammfunktion besitzt, $j = 1, \dots, k$. Schließlich beachte man

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a_j\}: \quad h_j(z) = \frac{a_{-1}^j}{z - a_j} + \tilde{h}_j(z), \quad j = 1, \dots, k.$$

Die Funktion

$$f - \sum_{j=1}^k h_j$$

besitzt eine holomorphe Fortsetzung $g: D \rightarrow \mathbb{C}$. Da D ein Elementargebiet ist, haben wir

$$\int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = 0.$$

Das Integral auf der linken Seite bestimmen wir folgendermaßen:

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^k \int_{\gamma} h_j(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^k \int_{\gamma} \frac{a_{-1}^j}{\zeta - a_j} d\zeta - \sum_{j=1}^k \int_{\gamma} \tilde{h}_j(\zeta) d\zeta.$$

Wie zuvor bemerkt besitzt \tilde{h}_j eine Stammfunktion, und daher haben wir

$$\int_{\gamma} \tilde{h}_j(\zeta) d\zeta = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Wir haben somit die Identität

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^k a_{-1}^j \cdot \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - a_j} d\zeta$$

hergeleitet. Da

$$\operatorname{Res}(f, a_j) = a_{-1}^j \quad \text{und} \quad \chi(\gamma, a_j) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - a_j} d\zeta,$$

ist dies die Behauptung des Residuensatzes. \square

VI.2.5 Bemerkungen. i) Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener stückweise glatter Weg. Die Menge $\operatorname{Spur}(\gamma)$ ist kompakt. Es gibt somit eine positive reelle Zahl $R > 0$ mit

$$\operatorname{Spur}(\gamma) \subset B(0, R).$$

Für einen Punkt $z_0 \notin B(0, R)$ gilt

$$\chi(\gamma, z_0) = 0.$$

Das folgt direkt aus dem Residuensatz, angewandt auf das Elementargebiet $B(0, R)$ und die holomorphe Funktion

$$\begin{aligned} f: B(0, R) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z - z_0}. \end{aligned}$$

ii) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Für $z_0 \in D$ ist

$$\begin{aligned} g: D \setminus \{z_0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\longmapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \end{aligned}$$

eine holomorphe Funktion mit

$$\text{Res}(g, z_0) = f(z_0).$$

Für einen geschlossenen stückweise glatten Weg $\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ in $D \setminus \{z_0\}$ gilt

$$\chi(\gamma, z_0) \cdot f(z_0) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

nach dem Residuensatz. Dies können wir als Verallgemeinerung der Cauchy-Integralformel IV.5.2 ansehen.

iii) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $a \in D$ und $f: D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Das Residuum von f in a ist die einzige komplexe Zahl c , für die die Funktion

$$\begin{aligned} D \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) - \frac{c}{z - a} \end{aligned}$$

in einer geeigneten Umgebung von a eine Stammfunktion besitzt. Dazu machen wir folgende Beobachtungen:

a) Für eine komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$ und eine positive reelle Zahl $r > 0$ gilt die Formel

$$\int_{\gamma(a,r)} \frac{c}{\zeta - a} d\zeta = 2\pi \cdot i \cdot c.$$

Es gibt deshalb genau dann eine offene Menge $a \in U \subset D$, so dass $z \longmapsto c/(z - a)$ eine Stammfunktion auf $U \setminus \{a\}$ hat, wenn $c = 0$. (Dann können wir $U = D$ wählen.)

b) Es seien $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot (z - a)^k$ die Laurentreihe von f im Entwicklungspunkt a und $r > 0$ ein Radius, so dass sie auf $B(a, r)^*$ konvergiert. Die Funktion

$$\begin{aligned} F: B(a, r)^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq -1}}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot a_k \cdot (z - a)^{k+1} \end{aligned}$$

ist holomorph mit

$$\forall z \in B(a, r)^* : F'(z) = f(z) - \frac{a_{-1}}{z-a}.$$

Es seien weiter $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $a \in U \subset D$, $H: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $c \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, so dass

$$\forall z \in U \setminus \{a\} : H'(z) = f(z) - \frac{c}{z-a}.$$

Es folgt

$$\forall z \in U \cap B(a, r)^* : (F - H)'(z) = \frac{a_{-1} - c}{z-a}.$$

Aus a) leiten wir $\text{Res}(f, a) = a_{-1} = c$ ab.

Residuen in Polstellen

Wir stellen jetzt einige Verfahren vor, mit denen Residuen holomorpher Funktionen in **Polstellen** explizit ermittelt werden können.

VI.2.6 Lemma. *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $a \in \mathbb{C}$ eine Polstelle der Ordnung k von f und $g: U \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ die holomorphe Fortsetzung der Funktion $z \mapsto (z-a)^k \cdot f(z)$, $z \in U$. Dann kann das Residuum von f in a mit der Formel*

$$\text{Res}(f, a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

berechnet werden. Speziell gilt für¹ $k = 1$

$$\text{Res}(f, a) = g(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \cdot f(z).$$

Beweis. Es sei $r > 0$ eine positive reelle Zahl mit $B(a, r)^* \subset U$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $\tilde{f}: B(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ und komplexe Zahlen $a_{-1}, \dots, a_{-k} \in \mathbb{C}$, so dass

$$\forall z \in B(a, r)^* : f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \tilde{f}(z).$$

Somit gilt

$$\forall z \in B(a, r) : g(z) = a_{-k} + a_{-k+1} \cdot (z-a) + \dots + a_{-1} \cdot (z-a)^{k-1} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (z-a)^{j+k} = T_{g,a}(z).$$

Aus der Definition der Taylorreihe (IV.8) lesen wir

$$a_{-1} = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

ab. □

¹Für die Berechnung des Ausdrucks auf der rechten Seite benötigt man nur die Funktion f und nicht die holomorphe Fortsetzung g .

VI.2.7 Beispiele. i) Es sei

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{\exp(i \cdot z)}{z^2 + 1}. \end{aligned}$$

Diese Funktion hat in i eine einfache Polstelle. Mit dem Lemma berechnen wir

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{\exp(i \cdot z)}{z^2 + 1} \cdot (z - i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\exp(i \cdot z)}{z + i} = \frac{\exp(-1)}{2 \cdot i} = -\frac{i}{2 \cdot e}.$$

ii) Wir untersuchen

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{(z^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

an der Polstelle i der Ordnung 3. Wegen

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}: \quad (z - i)^3 \cdot f(z) = \frac{1}{(z + i)^3}$$

ist

$$\begin{aligned} g: \mathbb{C} \setminus \{-i\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{(z + i)^3} \end{aligned}$$

die holomorphe Fortsetzung der Funktion $z \mapsto (z - i)^3 \cdot f(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, in den Punkt i hinein. Nach Lemma VI.2.6 gilt

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{g^{(2)}(i)}{2!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{(i + i)^5} = \frac{3}{16 \cdot i} = -\frac{3}{16} \cdot i.$$

VI.2.8 Lemma. Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $g, h: G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, $a \in G$ ein Punkt mit

$$g(a) \neq 0, \quad h(a) = 0 \quad \text{und} \quad h'(a) \neq 0$$

und

$$N := \{b \in G \mid h(b) = 0\}.$$

Dann hat die Funktion

$$\begin{aligned} f: G \setminus N &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{g(z)}{h(z)} \end{aligned}$$

im Punkt a eine einfache Polstelle, und der Wert des Residuums von f in a ist

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Beweis. Die Taylorreihe von h in a hat die Gestalt

$$T_{h,a}(z) = h'(a) \cdot (z - a) + \sum_{j=2}^{\infty} a_j \cdot (z - a)^j.$$

Wir erkennen

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow a} g(z) \cdot \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - a}{h(z)} = g(a) \cdot \frac{1}{h'(a)}.$$

Die Behauptung folgt damit aus Lemma VI.2.6. \square

VI.2.9 Beispiele. i) Es seien $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \exp(i \cdot z)$, und $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2 + 1$. Die Funktion h hat einfache Nullstellen in i und $-i$. Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt $g(z) \neq 0$. Für die Funktion f aus Beispiel VI.2.7, i), gilt

$$\text{Res}(f, i) = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{\exp(-1)}{2 \cdot i} = -\frac{i}{2 \cdot e}$$

nach Lemma VI.2.8.

ii) Es sei

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \pi \cdot \frac{\cos(\pi \cdot z)}{\sin(\pi \cdot z)}. \end{aligned}$$

Diese Funktion hat in jeder ganzen Zahl $a \in \mathbb{Z}$ eine einfache Polstelle. Man beachte

$$\forall a \in \mathbb{Z}: \quad \sin'(\pi \cdot a) = \pi \cdot \cos(\pi \cdot a) = (-1)^a \cdot \pi \neq 0.$$

Nach Lemma VI.2.8 haben wir

$$\forall a \in \mathbb{Z}: \quad \text{Res}(f, a) = \pi \cdot \frac{\cos(\pi \cdot a)}{\pi \cdot \cos(\pi \cdot a)} = 1.$$

VI.2.10 Lemma. *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $a \in U$, $f: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Die Funktion f habe in a eine außerwesentliche Singularität, und für alle $b \in U \setminus \{a\}$ gelte $f(b) \neq 0$. Dann gilt für die Funktion*

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f}: U \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{f'(z)}{f(z)} \end{aligned}$$

die Gleichung²

$$\text{Res}\left(g \cdot \frac{f'}{f}, a\right) = g(a) \cdot \text{Ord}(f, a).$$

²s. Definition V.1.9 für den Begriff der Ordnung

Beweis. Es sei $k := \text{Ord}(f, a)$. Es gibt eine holomorphe Funktion $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h(a) \neq 0$ und

$$\forall z \in U \setminus \{a\}: f(z) = (z - a)^k \cdot h(z).$$

Damit berechnen wir

$$\forall z \in U \setminus \{a\}: \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k \cdot (z - a)^{k-1} \cdot h(z) + (z - a)^k \cdot h'(z)}{(z - a)^k \cdot h(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Auf Grund der Voraussetzungen an f hat h keine Nullstelle auf U , so dass $z \mapsto h'(z)/h(z)$, $z \in U$, eine holomorphe Funktion ist. Aus dieser Gleichung lesen wir die Behauptung mit Hilfe von Lemma VI.2.6 ab. \square

VI.2.11 Beispiel. Wir betrachten abermals die Funktion f aus Beispiel VI.2.9, ii). Mit $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sin(\pi \cdot z)$, gilt

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}: f(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Nach Lemma VI.2.10 gilt

$$\forall a \in \mathbb{Z}: \text{Res}(f, a) = \text{Ord}(\varphi, a) = 1.$$

Rationale Funktionen

VI.2.12 Definition. Es seien $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ eine offene Teilmenge mit $\infty \in U$, $f: U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion auf U und

$$g: V := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{z} \in U \right\} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \tag{VI.1}$$

$$z \mapsto -\frac{1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Dann ist

$$\text{Res}(f, \infty) := \text{Res}(g, 0) \tag{VI.2}$$

das *Residuum* von f in ∞ .

VI.2.13 Bemerkung. Die Transformation in (VI.1) ist nicht die Transformation der Funktion f bzgl. des Koordinatenwechsels $z \mapsto 1/z$ sondern der **Differentialform**

$$f(z)dz.$$

Diese Aussage wird sogleich durch den Beweis des folgenden Lemmas deutlich werden.

VI.2.14 Lemma. *In der Situation von Definition VI.2.12 sei r eine positive reelle Zahl, so dass g auf $B(0, r)^*$ holomorph ist. Dann gilt*

$$\text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(0, \frac{1}{r})} f(\zeta)d\zeta.$$

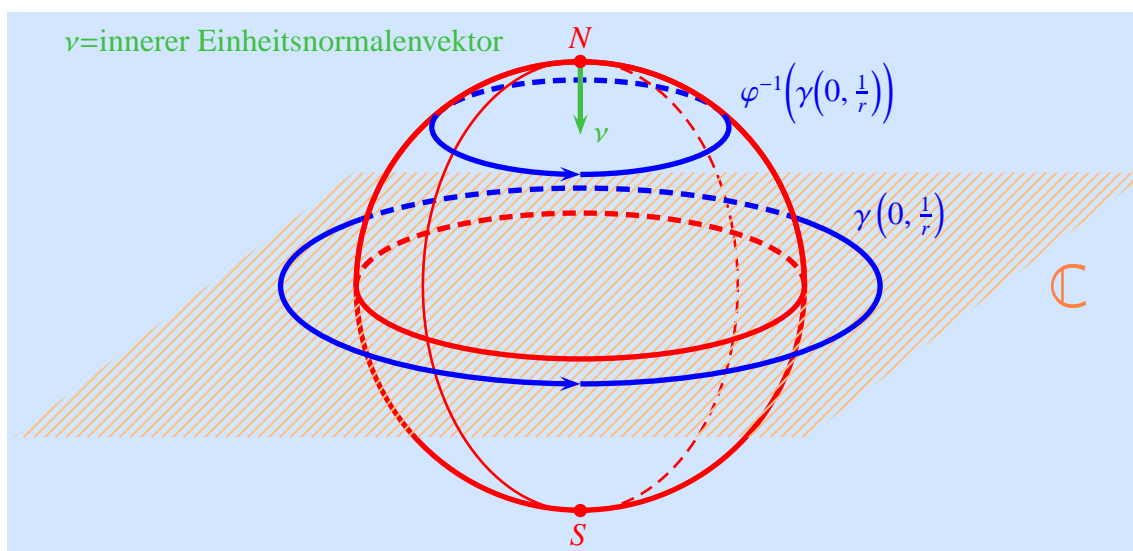
VI.2.15 *Achtung.* Die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \bar{\mathbb{C}} &\longrightarrow \bar{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

hat in ∞ eine Nullstelle. Trotzdem gilt

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) = -1.$$

VI.2.16 *Bemerkung.* Die durch die \mathbb{R} -Basis $(1, i)$ induzierte Orientierung von \mathbb{C} (vgl. [14], Definition 5.3.3) induziert vermöge der stereographischen Projektion (Seite 159) eine Orientierung der Sphäre S^2 . Diese ist dadurch charakterisiert, dass sie, gefolgt vom **inneren Normalenvektor** (vgl. [14], Abschnitt 5.8), die Standardorientierung des \mathbb{R}^3 liefert. Bzgl. dieser Orientierung umläuft der Kreisweg $\gamma(0, 1/r)$ den Punkt ∞ im **mathematisch negativen Sinne**. Das erklärt das Vorzeichen in Lemma VI.2.14.



Beweis von Lemma VI.2.14. Es sei

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} := \gamma\left(0, \frac{1}{r}\right)^{-1} : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \frac{1}{r} \cdot \exp(-i \cdot \varphi). \end{aligned}$$

Eine Anwendung von (V.5) und der Substitutionsregel (Eigenschaft IV.1.3, iv) ergibt

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(0, r)} \frac{1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right) dz = \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\tilde{\gamma}} f(\zeta) d\zeta.$$

Nach Eigenschaft IV.2.12, ii), gilt

$$\frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\tilde{\gamma}} f(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(0, \frac{1}{r})} f(\zeta) d\zeta,$$

und damit ist die Behauptung gezeigt. \square

VI.2.17 Satz (Die Geschlossenheitsrelation). *Es seien $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine rationale Funktion und $a_1, \dots, a_r \in \overline{\mathbb{C}}$ die Polstellen von f . Dann hat man*

$$\sum_{j=1}^r \operatorname{Res}(f, a_j) = 0.$$

Beweis. Es sei $r > 0$ eine positive reelle Zahl, so dass alle Polstellen von f in \mathbb{C} in der Kreisscheibe $B(0, 1/r)$ enthalten sind. Nach dem Residuensatz VI.2.4 und Lemma VI.2.14 gilt

$$2\pi \cdot i \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, r\}: \\ a_j \in \mathbb{C}}} \operatorname{Res}(f, a_j) = \int_{\gamma(0, \frac{1}{r})} f(\zeta) d\zeta = -2\pi \cdot i \cdot \operatorname{Res}(f, \infty).$$

Dies zeigt

$$\sum_{\substack{j \in \{1, \dots, r\}: \\ a_j \in \mathbb{C}}} \operatorname{Res}(f, a_j) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0$$

wie behauptet. □

VI.2.18 Aufgaben (Residuen). i) Für $0 < \varepsilon < 2\pi$ sei

$$f: B(0, \varepsilon) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{\sin(z)}{\cos(z^3) - 1}.$$

Zeigen Sie, dass f in 0 einen Pol der Ordnung 5 hat und berechnen Sie das Residuum von f in 0.

ii) Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in allen Singularitäten.

$$\text{a) } \frac{\exp(z)}{(z-1)^2}, \quad \text{b) } \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}, \quad \text{c) } \frac{1}{\sin(\pi \cdot z)}.$$

iii) Berechnen Sie $\operatorname{Res}(f, 0)$ für

$$\text{a) } f(z) = \frac{\tan(z) - z}{(1 - \cos(z))^2}, \quad \text{b) } f(z) = \frac{z-1}{\operatorname{Log}(z+1)}.$$

VI.3 Anzahlen von Null- und Polstellen

Aus Lemma VI.2.10 und dem Residuensatz VI.2.4 folgern wir:

VI.3.1 Satz. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion, die auf D endlich viele Nullstellen a_1, \dots, a_m und endlich viele Polstellen b_1, \dots, b_n hat. Für einen geschlossenen stückweise glatten Weg $\gamma: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$, dessen Spur keinen der Punkte $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ enthält, gilt*

$$\frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{j=1}^m \chi(f, a_j) \cdot \operatorname{Ord}(f, a_j) + \sum_{k=1}^n \chi(f, b_k) \cdot \operatorname{Ord}(f, b_k).$$

VI.3.2 Lemma (Argumentprinzip). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion³ und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener stückweise glatter Weg, dessen Spur keine Nullstelle von f enthält. Dann hat man*

$$\frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \chi(f \circ \gamma, 0).$$

Beweis. Wir nehmen an, dass γ glatt ist, und wenden Definition IV.2.1, iv), und VI.1.1 an:

$$\int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{(f \circ \gamma)(t)} dt = \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi \cdot i \cdot \chi(f \circ \gamma, 0).$$

Daraus folgt die behauptete Gleichung. \square

VI.3.3 Satz. *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $a \in G$, $b := f(a)$ und*

$$k := \text{Ord}(f - b, a)$$

die Ordnung der Nullstelle a der Funktion $z \mapsto f(z) - b$, $z \in G$. Dann gibt es offene Teilmengen $U, V \subset \mathbb{C}$ mit $a \in U$ und $b \in V \subset f(U)$, so dass jeder Punkt $z \in V \setminus \{b\}$ genau k Urbildpunkte $w_1, \dots, w_k \in U$ hat.

Wir geben wiederum zwei Beweise für dieses Resultat.

1. Beweis von Satz VI.3.3. Die Diskussion zu Beginn von Abschnitt IV.8 zeigt, dass wir diese Aussage für die Funktion $z \mapsto z^k$, $z \in G$, und $a = b = 0$ nachweisen müssen. Wir wählen eine positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$, so dass $U := B(0, \varepsilon) \subset G$. Dann gilt $f(U) = B(0, \varepsilon^k)$. Für $z \neq 0$ gilt (vgl. Beispiel II.7.3, i)

$$f^{-1}(z) = \left\{ \exp\left(\frac{1}{k} \cdot \text{Log}(z)\right) \cdot \exp\left(\frac{l}{k} \cdot 2\pi \cdot i\right) \mid l = 0, \dots, k-1 \right\}.$$

Diese Menge hat genau k Elemente. \square

2. Beweis von Satz VI.3.3. Wir wählen eine positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{B(a, \varepsilon)} \subset G$. Da die Nullstellen holomorpher Funktionen isoliert liegen (Satz IV.7.1), können wir ε so klein wählen, dass

★ $z \mapsto f(z) - b$ keine Nullstelle auf der Menge $\overline{B(a, \varepsilon)} \setminus \{a\} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid 0 < |\zeta - a| \leq \varepsilon\}$ hat,

★ $f'(z) \neq 0$, $z \in B(a, \varepsilon)$ ★.

Die Menge $f(\partial B(a, \varepsilon))$ ist kompakt. Wegen $b \notin f(\partial B(a, \varepsilon))$ gilt

$$\delta := \min\{|f(\zeta) - b| \mid \zeta \in \partial B(a, \varepsilon)\} > 0$$

und

$$B(b, \delta) \cap f(\partial B(a, \varepsilon)) = \emptyset.$$

³Wir machen keine Annahme zu den Nullstellen von f .

Wir setzen

$$U := B(a, \varepsilon) \quad \text{und} \quad V := B(b, \delta).$$

Nach Satz VI.3.1 gilt für $z \in V$ die Gleichung

$$\sum_{\substack{w \in B(a, \varepsilon): \\ f(w)=z}} \text{Ord}(f - z, w) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(a, \varepsilon)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - z} d\zeta. \quad (\text{VI.3})$$

Die zweite Voraussetzung besagt $f'(w) \neq 0$, $w \in B(a, \varepsilon)^*$. Deshalb ist für $z \in V \setminus \{b\}$

$$\sum_{\substack{w \in B(a, \varepsilon): \\ f(w)=z}} \text{Ord}(f - z, w)$$

die Anzahl der Urbildpunkte von z in der Menge U . Für $z = b$ finden wir

$$\sum_{\substack{w \in B(a, \varepsilon): \\ f(w)=b}} \text{Ord}(f - b, w) = k$$

wegen der Voraussetzungen aus dem Satz und zu den Nullstellen von $f - b$ auf $\overline{B(a, \varepsilon)}$.

Behauptung. Die Funktion

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma(a, \varepsilon)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - z} d\zeta \end{aligned}$$

ist stetig und nimmt nur ganzzahlige Werte an.

Die Behauptung zur Ganzzahligkeit ergibt sich aus (VI.3). Es seien $z, z' \in V$. Dann finden wir

$$\forall \zeta \in \text{Spur}(\gamma(a, \varepsilon)) : \quad \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - z} - \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - z'} = \frac{f'(\zeta) \cdot (z - z')}{(f(\zeta) - z) \cdot (f(\zeta) - z')}.$$

Es sei

$$\delta' := \min\{|f(\zeta) - z| \mid |\zeta - a| = \varepsilon\}.$$

Dann haben wir

$$\forall \eta < \frac{\delta'}{2} \forall z' \in B(z, \eta) : \quad \left| \frac{f'(\zeta) \cdot (z - z')}{(f(\zeta) - z) \cdot (f(\zeta) - z')} \right| \leq \eta \cdot \frac{2 \cdot \max\{|f'(\zeta)| \mid |\zeta - a| = \varepsilon\}}{\delta'^2}.$$

Die Behauptung ergibt sich folglich aus der Standardabschätzung IV.2.9. ✓

Nach Satz VI.1.4 gilt

$$\forall z \in V : \quad \chi_z \in \mathbb{Z}.$$

Da V ein Gebiet ist, ist die Funktion aus der Behauptung konstant, d.h.

$$\forall z \in V : \quad \chi_z = \chi_b = k.$$

Das beweist die Behauptung des Satzes. □

VI.3.4 *Bemerkung.* Man beachte, dass wir den Satz über die Gebietstreue IV.8.1 nicht benutzt sondern erneut bewiesen haben.

Aus dem obigen Resultat können wir den Umkehrsatz für holomorphe Funktionen ableiten:

VI.3.5 Folgerung. *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $a \in G$ ein Punkt mit $f'(a) \neq 0$.⁴ Dann gibt es eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ mit $a \in U$, so dass $f|_U$ injektiv ist. Wählt man U so, dass $f'(w) \neq 0$, $w \in U$, dann bildet $f|_U$ die offene Menge U konform auf $f(U)$ ab.*

VI.3.6 Satz (Der Satz von Rouché⁵). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener stückweise glatter Weg. Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:*

- ★ Die Funktionen f und $f + g$ haben auf D nur endlich viele Nullstellen.
- ★ Für jeden Punkt $\zeta \in \text{Spur}(\gamma)$ gilt $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$.

Dann haben die Funktionen f und $f + g$ keine Nullstellen auf $\text{Spur}(\gamma)$, und es gilt

$$\sum_{z \in D: f(z)=0} \chi(\gamma, z) \cdot \text{Ord}(f, z) = \sum_{z \in D: f(z)+g(z)=0} \chi(\gamma, z) \cdot \text{Ord}(f + g, z).$$

VI.3.7 *Bemerkungen.* i) Es seien $a \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, $r > 0$ eine positive reelle Zahl und $\gamma(a, r)$ der Kreisweg vom Radius r um a . Dann ist

$$\sum_{z \in D: f(z)=0} \chi(\gamma, z) \cdot \text{Ord}(f, z) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{z \in D: f(z)+g(z)=0} \chi(\gamma, z) \cdot \text{Ord}(f + g, z)$$

die Anzahl der mit Vielfachheiten gezählten Nullstellen von f bzw. $f + g$ auf der Kreisscheibe $B(a, r)$.

ii) Wir fassen die Funktion g als „kleine Störung“ von f auf. In diesem Sinne besagt der Satz von Rouché, dass sich die Anzahl der Nullstellen unter kleinen Störungen nicht ändert.

Beweis von Satz VI.3.6. Für $0 \leq s \leq 1$ definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned} h_s: G &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) + s \cdot g(z). \end{aligned}$$

Die zweite Voraussetzung impliziert, dass h_s keine Nullstelle auf $\text{Spur}(\gamma)$ hat, $0 \leq s \leq 1$.

Behauptung. *Die Funktion*

$$\begin{aligned} I: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ s &\mapsto I(s) := \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma} \frac{h'_s(\zeta)}{h_s(\zeta)} d\zeta \end{aligned}$$

ist stetig.

⁴Es folgt $\text{Ord}(f - b, a) = 1$, $b := f(a)$.

⁵Eugène Rouché (1832 - 1910), französischer Mathematiker.

Es seien $s, s' \in [0, 1]$. Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{h'_s(\zeta)}{h_s(\zeta)} - \frac{h'_{s'}(\zeta)}{h_{s'}(\zeta)} &= \frac{s \cdot f(\zeta) \cdot g'(\zeta) + s' \cdot f'(\zeta) \cdot g(\zeta) - s \cdot f'(\zeta) \cdot g(\zeta) - s' \cdot f(\zeta) \cdot g'(\zeta)}{h_s(\zeta) \cdot h_{s'}(\zeta)} \\ &= \frac{(s - s') \cdot (f(\zeta) \cdot g'(\zeta) - f'(\zeta) \cdot g(\zeta))}{h_s(\zeta) \cdot h_{s'}(\zeta)}, \quad \zeta \in \text{Spur}(\gamma). \end{aligned}$$

Es seien

$$C := \max\{|f(\zeta) \cdot g'(\zeta) - f'(\zeta) \cdot g(\zeta)| \mid \zeta \in \text{Spur}(\gamma)\}$$

und

$$D := \min\{|f(\zeta)| - |g(\zeta)| \mid \zeta \in \text{Spur}(\gamma)\} > 0.$$

Man beachte

$$\forall s \in [0, 1] \forall \zeta \in \text{Spur}(\gamma) : |h_s(\zeta)| \geq \left| |f(\zeta)| - |g(\zeta)| \right| = |f(\zeta)| - |g(\zeta)| \geq D.$$

Mit der Standardabschätzung schließen wir

$$|I(s) - I(s')| \leq |s - s'| \cdot \frac{L(\gamma)}{2\pi} \cdot \frac{C}{D^2}.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. ✓

Da I nur ganze Zahlen als Werte annehmen kann (Satz VI.1.4), folgt aus den Tatsachen, dass I stetig ist und $[0, 1]$ zusammenhängend, dass I konstant ist. Insbesondere folgt

$$I(0) = I(1).$$

Nach Satz VI.3.1 gilt

$$I(s) = \sum_{z \in D: h_s(z)=0} \chi(\gamma, z) \cdot \text{Ord}(h_s, z), \quad s \in [0, 1],$$

und damit ist die Behauptung bewiesen. □

VI.3.8 Beispiel. Es sei $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^4 - 4 \cdot z + 2$. Wir fragen, wieviele Nullstellen h auf der Kreisscheibe $B(0, 1)$ hat. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto -4 \cdot z + 2, \\ g: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^4 \end{aligned}$$

und arbeiten mit dem Kreisweg $\gamma(0, 1)$. Man verifiziert leicht, dass die Voraussetzungen von Satz VI.3.6 erfüllt sind. Die Funktion f besitzt auf $B(0, 1)$ genau eine einfache Nullstelle auf $B(0, 1)$, und zwar $a = 1/2$. Nach dem Satz von Rouché hat die Funktion $h = f + g$ ebenfalls genau eine einfache Nullstelle auf $B(0, 1)$.

VI.4 Integration mit dem Residuensatz

Wir haben schon in Beispiel IV.6.10 festgestellt, dass der Übergang zum Komplexen helfen kann, reelle Funktionen besser zu verstehen. In diesem Abschnitt werden wir weitere Beobachtungen in dieser Richtung vorstellen. Wir lesen den Residuensatz als eine Formel für ein Integral und werden ihn somit nutzen, um einige reelle Integrale auszuwerten.

VI.4.1 Definition. i) Für natürliche Zahlen $n, d \in \mathbb{N}$ sei

$$K(n, d) := \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^{\times n} \mid k_1 + \dots + k_n \leq d\}.$$

Wir setzen auch $K(n, -1) := \emptyset, n \in \mathbb{N}$.

ii) Es seien $n, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ positive ganze Zahlen. Eine Funktion $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine *polynomiale Funktion vom Grad d* , wenn es komplexe Zahlen $c_{\underline{k}}, \underline{k} \in K(n, d)$, gibt, so dass

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\underline{k}=(k_1, \dots, k_n) \in K(n, d)} c_{\underline{k}} \cdot z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n},$$

und mindestens einen Index $\underline{k} \in K(n, d) \setminus K(n, d-1)$ mit $c_{\underline{k}} \neq 0$.

Wir geben uns für das folgende zwei polynomiale Funktionen p, q auf \mathbb{C}^2 vor und nehmen dabei

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1 \implies q(x, y) \neq 0. \quad (\text{VI.4})$$

an. Wir bilden die rationale Funktion

$$r(v, w) = \frac{p(v, w)}{q(v, w)}$$

in den komplexen Veränderlichen v und w und die rationale Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto \frac{1}{i \cdot z} \cdot r\left(\frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i} \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right)\right). \end{aligned}$$

Der Einheitskreis in der Ebene ist

$$S^1 = \{\exp(i \cdot \varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

Mit der Eulerformel II.5.4

$$\forall \varphi \in [0, 2\pi) : \exp(i \cdot \varphi) = \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i,$$

den Eulerformeln II.5.6 für den Sinus und den Kosinus und (VI.4) schließen wir, dass keine der Polstellen von f auf dem Einheitskreis

$$S^1 = \text{Spur}(\gamma(0, 1))$$

liegt. Wir können damit den Residuensatz auf die Funktion f und den Kreisweg $\gamma(0, 1)$ anwenden, um Formeln für gewisse Integrale zu gewinnen.

Rationale Funktionen in den trigonometrischen Funktionen

VI.4.2 Satz. In der zuvor geschilderten Situation gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{p(\cos(\varphi), \sin(\varphi))}{q(\cos(\varphi), \sin(\varphi))} d\varphi = 2\pi \cdot i \cdot \sum_{a \in \mathbb{D}} \text{Res}(f, a).$$

Beweis. Nach dem Residuensatz VI.2.4 gilt

$$2\pi \cdot i \cdot \sum_{a \in \mathbb{D}} \text{Res}(f, a) = \int_{\gamma(0,1)} f(\zeta) d\zeta.$$

Mit Definition IV.2.1, iv), berechnen wir

$$\int_{\gamma(0,1)} f(\zeta) d\zeta = \int_0^{2\pi} f(\exp(i \cdot \varphi)) \cdot i \cdot \exp(i \cdot \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{p(\cos(\varphi), \sin(\varphi))}{q(\cos(\varphi), \sin(\varphi))} d\varphi$$

und haben damit den Satz bewiesen. □

Dieser Beweis erklärt den Faktor $1/(i \cdot z)$ in der Definition von f .

VI.4.3 Beispiele. i) Es sei $a \in \mathbb{D}$. Wir behaupten, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cdot \cos(\varphi) + a^2} d\varphi = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Für $a = 0$ ist die Aussage trivial. Wir setzen folglich $a \neq 0$ voraus. In der obigen Notation haben wir

$$p(v, w) = 1 \quad \text{und} \quad q(v, w) = 1 - 2a \cdot v + a^2.$$

Dazu gehört die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{1}{i \cdot z} \cdot \frac{1}{1 - a \cdot z - \frac{a}{z} + a^2} = \frac{i}{a} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{1}{a}\right) \cdot (z - a)}.$$

Wir halten fest:

- ★ Der Punkt a ist die einzige Polstelle von f auf der Kreisscheibe \mathbb{D} .
- ★ In a liegt eine einfache Polstelle vor.
- ★ Nach Lemma VI.2.6 gilt

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot f(z) = \frac{i}{a} \cdot \frac{1}{a - \frac{1}{a}} = \frac{i}{a^2 - 1}.$$

Damit folgt die behauptete Formel.

ii) Es sei $a > 1$ eine reelle Zahl. Wir werden

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a + \cos(\varphi)} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

zeigen. Hier haben wir

$$p(v, w) = 1 \quad \text{und} \quad q(v, w) = a + v.$$

Die entsprechende rationale Funktion ist

$$f(z) = \frac{1}{i \cdot z} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right)} = -\frac{2i}{(z + a + \sqrt{a^2 - 1}) \cdot (z + a - \sqrt{a^2 - 1})}.$$

Die einzige Polstelle von f auf der Kreisscheibe \mathbb{D} ist $-a + \sqrt{a^2 - 1}$. Es handelt sich um eine einfache Polstelle mit

$$\text{Res}(f, a) = -\frac{i}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus der Gleichung

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a + \cos(\varphi)} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos(\varphi)} = \pi \cdot i \cdot \text{Res}(f, a).$$

Uneigentliche Integrale

VI.4.4 Definition. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion auf der reellen Geraden. Wir sagen, dass das *uneigentliche Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

existiert, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f(t) dt$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 f(t) dt$$

existieren. Wenn das uneigentliche Integral existiert, dann wird sein Wert als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 f(t) dt + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f(t) dt$$

festgesetzt.

VI.4.5 Bemerkung. Wenn das uneigentliche Integral existiert, dann gilt für seinen Wert die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(t) dt.$$

Wir stellen nun ein Verfahren vor, dass es uns erlaubt, den Ausdruck

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(t) dt$$

unter geeigneten Voraussetzungen zu bestimmen. Dazu sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, das die abgeschlossene obere Halbebene

$$\overline{\mathbb{H}} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

enthält. Es seien $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{H}$,

$$f: D \setminus \{a_1, \dots, a_k\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion und

$$r > \max\{|a_j| \mid j = 1, \dots, k\}$$

eine reelle Zahl. Wir arbeiten mit dem Integrationsweg

$$\gamma = \sigma_r \cdot \tau_r,$$

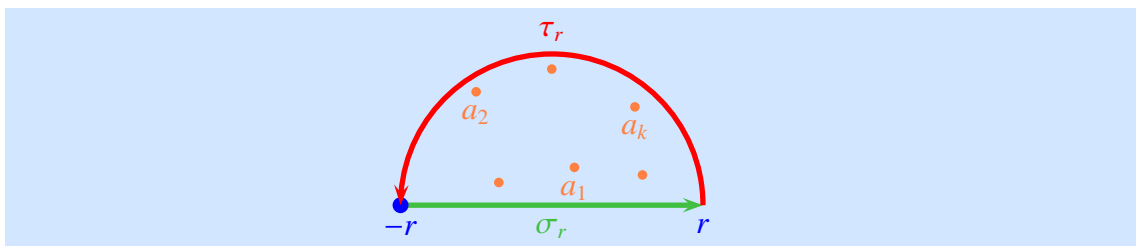
der sich aus den Wegen

$$\begin{aligned} \sigma_r: [-r, r] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto t \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tau_r: [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto r \cdot \exp(i \cdot t) \end{aligned}$$

zusammensetzt.



Wir haben nun

$$\int_{-r}^r f(t)dt + \int_{\tau_r} f(\zeta)d\zeta = \int_{\sigma_r} f(\zeta)d\zeta + \int_{\tau_r} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta = 2\pi \cdot i \cdot \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f, a_j).$$

Damit erkennen wir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\tau_r} f(\zeta)d\zeta = 0 \quad \implies \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(t)dt = 2\pi \cdot i \cdot \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f, a_j).$$

Es folgt ein Beispiel, in dem dieser Zugang erfolgreich angewandt werden kann.

VI.4.6 Satz. Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ *reelle* Zahlen mit $\alpha_m \neq 0, \beta_n \neq 0$ und

$$m + 2 \leq n. \quad (\text{VI.5})$$

Dazu gehören die *polynomialen Funktionen*

$$\begin{aligned} p: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \alpha_0 + \alpha_1 \cdot z + \dots + \alpha_{m-1} \cdot z^{m-1} + \alpha_m \cdot z^m, \\ q: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \beta_0 + \beta_1 \cdot z + \dots + \beta_{n-1} \cdot z^{n-1} + \beta_n \cdot z^n \end{aligned}$$

und die *meromorphe Funktion*

$$\begin{aligned} r: \mathbb{C} &\longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto \frac{p(z)}{q(z)}. \end{aligned}$$

Weiter sei

$$\{a_1, \dots, a_k\} = \{z \in \mathbb{H} \mid q(z) = 0\}.$$

Wir nehmen an, dass

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad q(x) \neq 0.$$

Dann existiert das *uneigentliche Integral* $\int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx$ und hat den Wert

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx = 2\pi \cdot i \cdot \sum_{j=1}^k \text{Res}(r, a_j).$$

Beweis. Es gibt eine positive reelle Zahl $\delta > 0$ mit

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad (\text{Im}(z) < 0 \wedge q(z) = 0) \implies \text{Im}(z) < -\delta.$$

Es ist

$$D := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > -\delta\}$$

ein Elementargebiet, das $\overline{\mathbb{H}}$ enthält. Die Polstellen von r auf D sind nach Voraussetzung a_1, \dots, a_k .

Im Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra IV.5.11 haben wir gezeigt, dass zu einer hinreichend kleinen reellen Zahl $\varepsilon > 0$ und $C := |\beta_n| - \varepsilon$ eine reelle Zahl $R > 0$ mit der Eigenschaft

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad |z| > R \implies |q(z)| > C \cdot |z|^n$$

gibt. Ebenso kann man erreichen, dass mit $C' := |\alpha_m| + \varepsilon$ auch

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad |z| > R \implies |p(z)| < C' \cdot |z|^m$$

gilt. Es folgt

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad |z| > R \implies |r(z)| < \frac{C'}{C} \cdot |z|^{m-n} \leq \frac{C'}{C \cdot |z|^2}.$$

Aus [13], Beispiel 5.6.2, i), folgt damit die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx.$$

Ferner führt eine Anwendung der Standardabschätzung IV.2.9 auf die Ungleichung

$$\forall r > R : \left| \int_{\tau_r} r(\zeta) d\zeta \right| < \pi \cdot r \cdot \frac{C'}{C} \cdot \frac{1}{r^2} = \pi \cdot \frac{C'}{C} \cdot \frac{1}{r}.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\tau_r} r(\zeta) d\zeta = 0.$$

Damit ergibt sich die Behauptung aus den oben getätigten Vorüberlegungen. \square

VI.4.7 Beispiele. i) Wir behaupten, dass

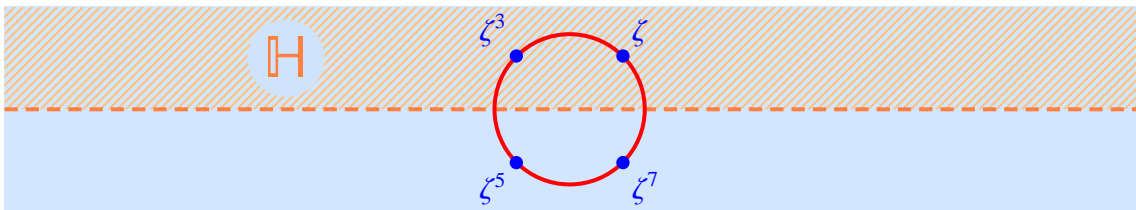
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Es sei

$$\zeta := \exp\left(\frac{\pi \cdot i}{4}\right).$$

Die Nullstellen der polynomialen Funktion $z \mapsto 1 + z^4$, $z \in \mathbb{C}$, sind

$$\zeta, \quad \zeta^3, \quad \zeta^5 \quad \text{und} \quad \zeta^7.$$



Davon liegen ζ und ζ^3 in der oberen Halbebene. Die Summe der Residuen ist

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta^2}{(\zeta - \zeta^3) \cdot (\zeta - \zeta^5) \cdot (\zeta - \zeta^7)} + \frac{\zeta^6}{(\zeta^3 - \zeta) \cdot (\zeta^3 - \zeta^5) \cdot (\zeta^3 - \zeta^7)} \\ &= \frac{i+1}{2 \cdot (\zeta^3 - \zeta^7)} = \frac{i+1}{4} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i} = \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot i}. \end{aligned}$$

Zusammen mit Satz VI.4.6 ergibt sich daraus die behauptete Formel.

Bemerkung. Allgemeiner lässt sich zeigen ([3], Beispiel 3 zu Satz III.7.10):

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad k < n : \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2k}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{n \cdot \sin\left(\frac{(2k+1) \cdot \pi}{2n}\right)}.$$

ii) Wir beweisen nun die Formel

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \frac{\pi}{2^{2n-2}} \cdot \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}.$$

Die polynomiale Funktion $z \mapsto (z^2 + 1)^n$ hat die Nullstellen $\pm i$. Davon liegt i in der oberen Halbebene. Wir wenden Lemma VI.2.6 an, um das Residuum in i zu berechnen. Dazu benötigen wir die Funktion

$$g: \mathbb{C} \setminus \{i\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \frac{1}{(z+i)^n}.$$

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ haben wir

$$\frac{g^{(n-1)}(z)}{(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot n}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(z+i)^{2n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n-2)!}{((n-1)!)^2} \cdot \frac{1}{(z+i)^{2n-1}},$$

so dass

$$\frac{g^{(n-1)}(i)}{(n-1)!} = \frac{1}{2^{2n-1} \cdot i} \cdot \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}.$$

Damit leitet man die angegebene Formel ab.

VI.4.8 Satz. *Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $\alpha_m \neq 0, \beta_n \neq 0$,*

$$m + 1 \leq n \tag{VI.6}$$

und zugehörigen polynomialen Funktionen

$$p: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \alpha_0 + \alpha_1 \cdot z + \dots + \alpha_{m-1} \cdot z^{m-1} + \alpha_m \cdot z^m,$$

$$q: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \beta_0 + \beta_1 \cdot z + \dots + \beta_{n-1} \cdot z^{n-1} + \beta_n \cdot z^n.$$

Es seien

$$\{a_1, \dots, a_k\} = \{z \in \mathbb{H} \mid q(z) = 0\}$$

die Nullstellen von q in der oberen Halbebene. Keine davon sei reell:

$$\forall x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0.$$

Für die meromorphe Funktion

$$r: \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

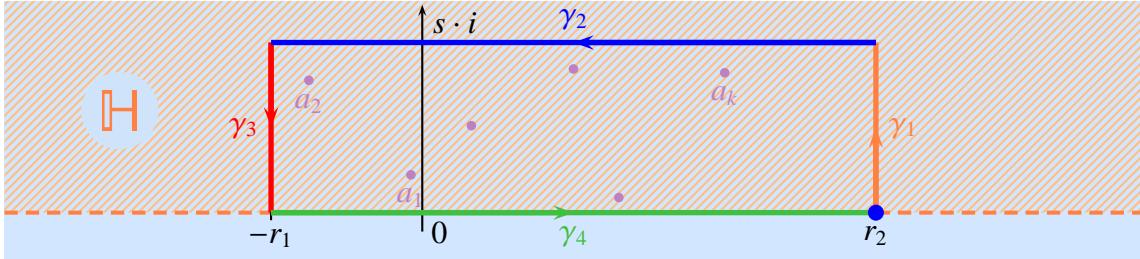
$$z \longmapsto \frac{p(z)}{q(z)}$$

existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot \exp(i \cdot x) dx$ und nimmt den Wert

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot \exp(i \cdot x) dx = 2\pi \cdot i \cdot \sum_{j=1}^k \text{Res}(r \cdot \exp(i \cdot z), a_j)$$

an.

Beweis. Wir kümmern uns zunächst um die Existenz des Integrals. Für positive reelle Zahlen $r_1, r_2, s > 0$ integrieren wir entlang des Rechtecks mit den Eckpunkten $r_2, r_2 + s \cdot i, -r_1 + s \cdot i, -r_1$. Diese Zahlen seien so groß gewählt, dass die Punkte a_1, \dots, a_k sämtlich im Inneren dieses Rechtecks liegen.



Nach dem Residuensatz VI.2.4 besteht die Gleichung

$$\int_{-r_1}^{r_2} r(x) \cdot \exp(i \cdot x) dx = 2\pi \cdot i \cdot \sum_{j=1}^k \text{Res}(r(z) \cdot \exp(i \cdot z), a_j) - \int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3} r(\zeta) \cdot \exp(i \cdot \zeta) d\zeta. \quad (\text{VI.7})$$

Für die folgenden Standardabschätzungen benötigen wir zwei Zutaten:

- ★ Wie im Beweis von Satz VI.4.6 kann man reelle Konstanten $M, R > 0$ wählen, so dass

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z| > R \implies |r(z)| < \frac{M}{|z|}.$$

- ★ $\forall z \in \mathbb{C} : |\exp(i \cdot z)| = \exp(-\text{Im}(z)).$

Wählt man $r_1, r_2, s > R$, dann ergeben sich die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} r(\zeta) \cdot \exp(i \cdot \zeta) d\zeta \right| &\leq \frac{(r_1 + r_2) \cdot M}{s \cdot \exp(s)}, \\ \left| \int_{\gamma_1} r(\zeta) \cdot \exp(i \cdot \zeta) d\zeta \right| &= \left| \int_0^1 r(r_2 + t \cdot s \cdot i) \cdot i \cdot s \cdot \exp(-t \cdot s + r_2 \cdot i) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |r(r_2 + t \cdot s \cdot i) \cdot i \cdot s \cdot \exp(-t \cdot s + r_2 \cdot i)| dt \\ &\leq \sup\{|r(z)| \mid z = r_2 + t \cdot s \cdot i, t \in [0, 1]\} \cdot s \cdot \int_0^1 \exp(-t \cdot s) dt \\ &\leq \frac{M}{r_2} \cdot \left(-\exp(-t \cdot s)\right)\Big|_0^1 \leq \frac{M}{r_2}, \\ \left| \int_{\gamma_3} r(\zeta) \cdot \exp(i \cdot \zeta) d\zeta \right| &\leq \frac{M}{r_1}. \end{aligned}$$

Jetzt geben wir uns eine positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ vor und halten r_1 fest. Für reelle Zahlen $r_2, s \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{r_2} < \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{r_1 + r_2}{s \cdot \exp(s)} < \varepsilon$$

leiten wir aus (VI.7) und den obigen Abschätzungen die Ungleichung

$$\left| \int_{-r_1}^{r_2} r(\zeta) \cdot \exp(i \cdot \zeta) d\zeta \right| < \frac{M}{r_1} + 2 \cdot M \cdot \varepsilon + 2\pi \cdot \sum_{j=1}^k |\text{Res}(r(z) \cdot \exp(i \cdot z), a_j)|$$

ab. Es folgt die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-r_1}^{\infty} r(x) \cdot \exp(i \cdot x) dx$$

Ebenso beweist man die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{r_2} r(x) \cdot \exp(i \cdot x) dx$$

und damit die Existenz von

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x) \cdot \exp(i \cdot x) dx.$$

Diese Betrachtungen führen auch auf den postulierten Wert dieses Integrals. □

VI.4.9 Beispiel. Wir behaupten, dass für jede positive reelle Zahl a

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \cdot \exp(-a)$$

gilt. Dazu beobachten wir zunächst

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i \cdot x)}{a^2 + x^2} dx \right).$$

Mit Satz VI.4.8 berechnen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i \cdot x)}{a^2 + x^2} dx = 2\pi \cdot i \cdot \operatorname{Res} \left(\frac{\exp(i \cdot z)}{a^2 + z^2}, i \cdot a \right) = 2\pi \cdot i \cdot \frac{\exp(i \cdot i \cdot a)}{2a \cdot i} = \frac{\pi}{a} \cdot \exp(-a).$$

VI.4.10 Aufgaben (Der Residuensatz). Verwenden Sie den Residuensatz, um folgende Integrale zu berechnen:

$$\text{i) } \int_{\gamma(0,2)} \frac{1}{(\zeta - 3)(\zeta^{13} - 1)} d\zeta, \quad \text{ii) } \int_{\gamma(0,10)} \frac{\zeta^3}{\zeta^4 - 1} d\zeta.$$

VI.5 Die Partialbruchzerlegung des Kotangens

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass auch der holomorphe Kotangens

$$\begin{aligned} \cot: \mathbb{C} \setminus (\pi \cdot \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \end{aligned}$$

eine Partialbruchzerlegung zulässt. Genauer gilt:

VI.5.1 Satz. Für alle nichtganzen komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt

$$\pi \cdot \cot(\pi \cdot z) = \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - k} + \frac{1}{k} \right).$$

Wir müssen der Behauptung des Satzes zunächst Sinn verleihen. Das heißt, wir müssen erklären, warum die Reihe

$$\frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right)$$

absolut konvergiert. Dazu müssen wir nach Definition V.2.3, i), beweisen, dass die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right)$$

für jede Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ absolut konvergieren. Es seien $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und $r := |z|$. Für $k > r$ haben wir

$$\begin{aligned} \star \quad \frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} &= \frac{z}{(z-k) \cdot k} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} = \frac{-z}{(z+k) \cdot k}, \\ \star \quad \left| \frac{z}{(z \pm k) \cdot k} \right| &\leq \frac{r}{|k-r| \cdot |k|} \leq \frac{r}{(k-r)^2}. \end{aligned}$$

Die absolute Konvergenz folgt damit aus der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

die in [13], Folgerung 2.7.5, nachgewiesen wurde.

Beweis von Satz VI.5.1. Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Für unsere Argumentation benötigen wir eine meromorphe Funktion mit den „richtigen“ Polstellen und Residuen. Diese ist

$$f_z(w) := \frac{z}{w \cdot (z-w)} \cdot \pi \cdot \cot(\pi \cdot w).$$

Sie hat

- ★ eine einfache Polstelle in $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und in $w = z$,
- ★ eine doppelte Polstelle in 0.

Die entsprechenden Residuen sind

- ★ $\text{Res}(f, z) = -\pi \cdot \cot(\pi \cdot z)$,
- ★ $\text{Res}(f, k) = \frac{z}{k \cdot (z-k)}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,
- ★ $\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{z}$.

Die erste Formel ergibt sich aus Lemma VI.2.8. Für die zweite Formel wenden wir Lemma VI.2.10 und Beispiel VI.2.11 (mit $g(w) = z/(w \cdot (z-w))$ und $f(w) = \sin(\pi \cdot w)$) an.

Weiter gilt $\text{Res}(\pi \cdot \cot(\pi \cdot w), 0) = 1$ (s. Beispiel VI.2.9, ii). Damit hat die Laurententwicklung von $\pi \cdot \cot(\pi \cdot w)$ in 0 die Gestalt

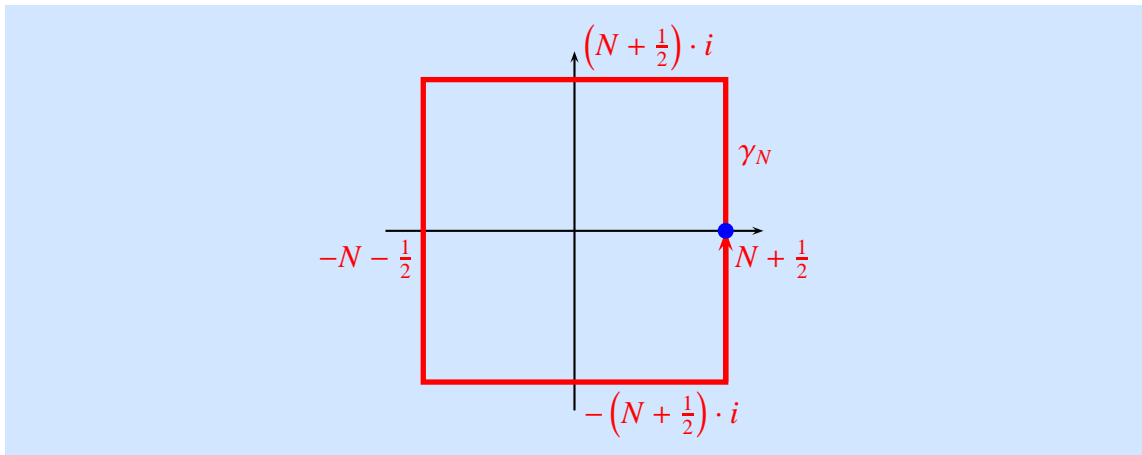
$$\frac{1}{w} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cdot w^{2k+1}.$$

Außerdem haben wir

$$\frac{z}{(z-w) \cdot w} = \frac{1}{w} + \frac{1}{z-w} = \frac{1}{w} + \frac{1}{z} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^l, \quad \left|\frac{w}{z}\right| < 1.$$

Daraus folgert man die dritte Formel.

Für eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit $N > |z|$ benutzen wir den Integrationsweg, der entlang des Quadrats mit Kantenlänge $2N+1$ und Mittelpunkt 0 verläuft:



Es liegen keine Singularitäten von f auf $\text{Spur}(\gamma_N)$. Als Elementargebiet verwenden wir

$$D := \left\{ z = x + y \cdot i \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, \max\{|x|, |y|\} < N + \frac{1}{2} + \varepsilon \right\}$$

für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Der Residuensatz zeigt

$$\frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_{\gamma_N} f_z(\zeta) d\zeta = -\pi \cdot \cot(\pi \cdot z) + \frac{1}{z} + \sum_{\substack{-N \leq k \leq N \\ k \neq 0}} \frac{z}{(z-k) \cdot k}.$$

Es ist somit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\gamma_N} f_z(\zeta) d\zeta = 0 \quad (\text{VI.8})$$

zu zeigen. Aus Satz II.5.6 ergibt sich die Formel

$$\cot(\pi \cdot w) = i \cdot \frac{1 + \exp(-2\pi \cdot i \cdot w)}{1 - \exp(-2\pi \cdot i \cdot w)}.$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|y| \geq 1$ und $w = x + y \cdot i$ ergibt sich die Abschätzung

$$\left| \cot(\pi \cdot w) \right| \leq \frac{1 + \exp(-2\pi \cdot |y|)}{1 - \exp(-2\pi \cdot |y|)} \leq \frac{1 + \exp(-2\pi)}{1 - \exp(-2\pi)} =: c'.$$

Auf Grund der Periodizität des Kotangens kann man eine Konstante c'' finden, die

$$\forall N \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{R} : |y| \leq 1 \implies \left| \pi \cdot \cot\left(\pi \cdot \left(N + \frac{1}{2} + y \cdot i\right)\right) \right| = \left| \pi \cdot \cot\left(\pi \cdot \left(\frac{1}{2} + y \cdot i\right)\right) \right| \leq c''$$

erfüllt. Mit $c := \max\{\pi \cdot c', c''\}$ ergibt sich

$$\forall N \in \mathbb{N} \forall \zeta \in \text{Spur}(\gamma_N) : |\pi \cdot \cot(\pi \cdot \zeta)| \leq c.$$

Die Standardabschätzung IV.2.9 führt nun auf die Ungleichung

$$\left| \int_{\gamma_N} f_z(\zeta) d\zeta \right| \leq 4 \cdot (2N + 1) \cdot \frac{c \cdot |z|}{\left(N + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(N + \frac{1}{2} - |z|\right)}.$$

Damit folgert man leicht (VI.8). □

Literaturhinweise

- [1] J.B. Conway, *Functions of one complex variable*, Graduate Texts in Mathematics, 11, New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1973, xi+313 S.
- [2] W. Fischer, I. Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik, 47, Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig, 1980, ix+258 S.
- [3] E. Freitag, R. Busam, *Funktionentheorie 1*, 4., korr. und erw. Aufl., Springer-Lehrbuch, Berlin: Springer, 2006, xx+550 S.
- [4] É. Ghys, *Groups acting on the circle*, L'Enseignement Mathématique **47** (2001), 329-407.
- [5] Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, 2. Aufl., Wiley Classics Library, New York, NY: John Wiley & Sons Ltd., 1994, xii+813 S.
- [6] D. Huybrechts, *Complex geometry. An introduction*, Universitext, Berlin: Springer, 2005, xii+309 S.
- [7] S. Katok, *p-adic analysis compared with real*, Student Mathematical Library, 37, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007, xiv+152 S.
- [8] A. Kemnitz, *Mathematik zum Studienbeginn. Grundlagenwissen für alle technischen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge*, 10., aktual. Aufl., Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2011, xvi+423 S.
- [9] G. Laures, M. Szymik, *Grundkurs Topologie*, Spektrum Akademischer Verlag, 2009.
- [10] T. Needham, *Anschauliche Funktionentheorie*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2001, xxix+685 S.
- [11] R. Remmert, G. Schumacher, *Funktionentheorie 1*, 5., neu bearb. Aufl., Berlin: Springer, 2002, xx+402 S.
- [12] P. Ribenboim, *Die Welt der Primzahlen. Geheimnisse und Rekorde*, 2. überarb. und erg. Aufl., Springer-Lehrbuch, Berlin: Springer, 2011, xxv+366 S.
- [13] A. Schmitt, *Analysis I*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt>.

- [14] A. Schmitt, *Analysis II*, Vorlesungsskript,
<http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt>.
- [15] A. Schmitt, *Analysis III*, Vorlesungsskript,
<http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt>.
- [16] A. Schmitt, *Algebra und Zahlentheorie*, Vorlesungsskript,
<http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt>.
- [17] R.-H. Schulz, *Elementargeometrie*, Vorlesungsskript,
<http://page.mi.fu-berlin.de/rhschulz/Elgeo-Skript/elgeo.html>
- [18] V. Schulze, *Lineare Algebra*, Vorlesungsskript,
http://page.mi.fu-berlin.de/klarner/lina_skript.pdf

Stichwortverzeichnis

- Abbildung
 - Cayley- —, 84, 87
 - holomorphe —, 161
 - rationale —, 163
- Abel, 30, 36
 - Formel von Newton- —, 36
- abelsches Konvergenzlemma, 30
- abgeschlossen, 55
 - e Einheitskreisscheibe, 83
 - algebraisch —, 6, 117
- Ableitung, 57
 - Richtungs- —, 58
 - Wirtinger- —en, 73
- absolut konvergent, 25–27, 192
- Absolutbetrag, 1
- Abstand zum Rand, 135
- Addition
 - stheoreme, 13, 40
 - für die komplexe Sinus- und Kosinusfunktion, 40
 - meromorpher Funktionen, 156
- algebraisch
 - abgeschlossen, 6, 117
 - e Kurve, 165
 - e Topologie, 168
- alternierende harmonische Reihe, 32
- analytisch, 29
 - reell —, 29, 130
- Anordnung, 7
- antilinear
 - komplex —, 72
- Anzahl der Nullstellen, 181
- Argument, 12
 - funktion (mehrdeutig), 46
 - prinzip, 179
 - Hauptzweig des —s, 13, 44, 53, 54
- Assoziativgesetz, 4, 158
- außerwesentliche Singularität, 141, 161, 175
- Automorphismengruppe, 86, 137
 - der Einheitskreisscheibe, 138
 - der oberen Halbebene, 138
 - der riemannschen Zahlenkugel, 164
- Automorphismus, 11, 137, 164
 - der riemannschen Zahlenkugel, 164
- Ball
 - offener —, 55
- bedingt konvergent, 25
- beschränkte Folge, 22
- Betrag, 10
- biholomorph, 80
 - äquivalent, 80, 138, 166
- Binomialkoeffizient, 35
- binomisch-
 - e Reihe, 35
 - er Lehrsatz, 35
- Bogenlänge, 99
- Brennpunkt, 79
- Cardano, 2, 7
 - s Lösungsformel, 2, 7
- Casorati, 143
 - Satz von — –Weierstraß, 143, 166
- Cauchy, 11, 70
 - abschätzung, 150
 - folge, 24
 - Integralformel, 91, 114, 117, 133, 172

- satz, 91, 110, 111, 114, 118, 122, 146, 168
- satz für Dreieckswege, 104
- satz für sternförmige Gebiete, 108
- kriterium, 25
- produkt, 27, 28, 36
- Riemann-Differentialgleichungen, 70, 74
- Schwarz-Ungleichung, 11
- verallgemeinerte — -Integralformel, 116, 118, 122, 123
- Cayley, 84
 - abbildung, 84, 87
- Clausen, 48

- Darstellungsmatrix, 8
- de Moivre, 15
- Definitionslücke, 139
- dicht, 143
- Differential, 70
 - form, 176
 - gleichungen
 - Cauchy–Riemann- —, 70, 74
- differenzierbar
 - 0-mal —, 116
 - 1-mal —, 116
 - komplex —, 56–58, 71
 - n -mal —, 116
 - reell —, 57, 70, 71, 74
 - stetig —, 75, 93
 - unendlich oft —, 116
- diskret, 153
- Diskriminante, 2
- Distributivgesetz, 4, 158
- Dreh-
 - sinn, 76
 - streckung, 19
- Drehung, 137
- Dreiecks-
 - fläche, 103
 - ungleichung, 10
 - weg, 104
 - Cauchy-Integralsatz für —e, 104
- Durchmesser, 106

- Einheits-
 - kreisscheibe, 83, 136

- Automorphismengruppe
 - der —, 138
- wurzel, 14
 - Menge der n -ten —n, 14
- Element
 - argebiet, 111, 170, 178
 - inverses —, 4
 - neutrales —, 4
- Ellipse, 79
- entgegengesetzter Weg, 100
- Entwicklungspunkt, 21, 28
- euklidische Norm, 10, 55
- Euler, 15, 45
 - formel, 39, 41, 53, 183
- Exponential-
 - funktion, 37, 53, 130, 162
 - Funktionalgleichung
 - der —, 38, 130
 - Geometrie der —, 80
 - reihe, 37

- Folge
 - der Partialsummen, 25
 - beschränkte —, 22
 - Cauchy- —, 24
 - konvergente —, 22
 - Null- —, 25
- formale Potenzreihe, 28
- Formel von Newton–Abel, 36
- Fortsetzung
 - holomorphe —, 130, 131, 141, 173
- Fundamental-
 - bereich, 89
 - gruppe, 48
 - satz der Algebra, 117, 187
- Funktion
 - gleichung der Exponentialfunktion, 38, 130
 - Exponential- —, 37, 53
 - ganze —, 116
 - ganzrationale —, 163
 - Hyperbel- —, 41
 - konstante —, 67
 - Kosinus- —, 39, 117
 - mehrdeutige —, 46
 - meromorphe —, 155, 161
 - Addition —r —en, 156

- Körper der —n —en, 158, 162
 Multiplikation —r —en, 157
 offene —, 80
 polynomiale —, 53, 60, 117, 150, 163,
 183, 187, 189
 vom Grad d , 183
 rationale —, 60, 183, 184
 riemannsche ζ - —, 122
 Sinus- —, 39
 Wurzel- —, 169
- ganze Funktion, 116
 ganzrational, 163
 -e Funktion, 163
 Gebiet, 66, 67, 156, 162
 -streuung, 133, 135, 181
 Cauchy
 -Integralsatz für sternförmige —e,
 108
 Elementar- —, 111, 170, 178
 Geometrie der Exponentialfunktion, 80
 geometrische Reihe, 25, 31
 geschlitzte Ebene, 107
 Geschlossenheitsrelation, 178
 glatt, 94
 stückweise —, 95
 gleichmäßig
 konvergent, 119–121
 lokal —, 121, 126, 149
 Gleichung
 kubische —, 2
 quadratische —, 1, 7
 Goursat, 104
 Lemma von —, 104
 Satz von —, 104, 112
 Grad
 einer polynomialen Funktion, 183
 Grenzwert, 56
- Hadamard, 33
 Halbebene
 negative —, 125
 obere —, 84, 125, 189
 Automorphismengruppe
 der —n —, 138
 harmonische Reihe, 32
 Häufungspunkt, 56, 126, 140, 153
- Haupt-
 satz der Differential- und
 Integralrechnung, 94
 teil, 145
 zweig
 des Arguments, 13, 44, 53, 54
 des Logarithmus, 44, 53, 54, 65,
 110, 125
 Hausdorffaxiom, 159
 hebbare Singularität, 140, 161
 Hebbarkeitssatz
 riemannscher —, 140, 143, 147
 holomorph, 29, 60, 161
 -e Abbildung, 161
 -e Fortsetzung, 130, 131, 141, 173
 homogen, 88
 Homöomorphismus, 80, 160
 Homotopietheorie, 168
 Hyperbel, 79
 -funktionen, 41
- Identitätssatz, 129–132
 imaginär
 rein —, 9
 Imaginärteil, 8, 53
 innerer Normalenvektor, 177
 Integral, 92
 -formel
 Cauchy- —, 91, 114, 117, 133, 172
 verallgemeinerte Cauchy- —, 116,
 118, 122, 123
 -satz
 Cauchy- —, 91, 110, 111, 114, 118,
 122, 146, 168
 Cauchy- — für Dreieckswege, 104
 Cauchy- — für sternförmige
 Gebiete, 108
 Monotonie des reellen —s, 94, 100
 Riemann- —, 91
 uneigentliches —, 185, 187, 189
 Weg- —, 95, 96, 101, 103, 119
- Integration
 partielle —, 93
 integrierbar, 92
 inverses Element, 4
 isolierte Singularität, 139, 161
 Isomorphiesatz, 138

- Jacobi, 71
 -matrix, 71, 73
- Kardanwelle, 2
- Kettenregel, 59, 94, 98
- kollinear, 103
- Kommutativgesetz, 4, 158
- kompakt, 55
 -e komplexe Mannigfaltigkeit, 139, 165
- komplex
 antilinear, 72
 differenzierbar, 56–58, 71
 -e Konjugation, 9
 -e Mannigfaltigkeit, 139, 164, 165
 -e Zahl, 3
 konjugiert — —, 9
- konform, 75
 lokal —, 75
- Konjugation
 komplexe —, 9
- konjugiert komplexe Zahl, 9
- konstante Funktion, 67
- konvergent, 149, 160
 -e Folge, 22
 -e Laurentreihe, 149
 -e Reihe, 25
 absolut —, 25–27, 192
 bedingt —, 25
 gleichmäßig —, 119–121
- Konvergenz, 22, 25
 auf der riemannschen Zahlenkugel, 160
 -lemma
 abelsches —, 30
 -menge, 28, 30
 -radius, 30, 37, 125
 der binomischen Reihe, 36
 der Exponentialreihe, 37
- Körper, 158, 162
 der meromorphen Funktionen, 158, 162
 -automorphismus, 9
 -homomorphismus, 5
 normierter —, 51
- Kosinus, 183
 hyperbolicus, 41
 -funktion, 39, 117
 -reihe, 39
- Kotangens
 Partialbruchzerlegung des —, 191
- Kreis-
 ring, 108, 144, 146, 150
 -segment, 146
 weg, 66
- Kriterium
 Cauchy- —, 25
 ε - δ - —, 52
 Leibniz- —, 32
 Majoranten- —, 33, 38
- kubische Gleichung, 2
- Lagrange, 11
 -sche Identität, 11
- Laurent, 144, 145
 -entwicklung, 149, 153
 -koeffizient, 150
 -reihe, 149
 konvergente —, 149
 -zerlegung, 144, 145
- Leibniz, 32
 -kriterium, 32
- Lemma
 von Goursat, 104
 von Schwarz, 136
- Limes superior, 32
- Liouville, 117
 Satz von —, 117, 135, 145, 164, 166
- logarithmische Reihe, 31, 32, 125
- Logarithmus, 48, 53, 112
 Hauptzweig des —, 44, 53, 54, 65, 110, 125
 natürlicher —, 44
- lokal
 gleichmäßig, 121, 126, 149
 konform, 75
 wegzusammenhängend, 128
 -e Stammfunktion, 109
- Majoranten-
 kriterium, 33, 38
 test
 weierstraßscher —, 120, 122
- Mannigfaltigkeit

- kompakte komplexe —, 139, 165
 komplexe —, 139, 164, 165
 projektive algebraische —, 165
 Maximum, 56
 -prinzip, 134–136
 mehrdeutige Funktion, 46
 Menge der n -ten Einheitswurzeln, 14
 meromorph
 -e Funktion, 155, 161
 Addition —r —en, 156
 Körper der —n —en, 158, 162
 Multiplikation —r —en, 157
 Minimum, 56
 Mittel-
 punkt, 55
 Stern- —, 107, 108, 110, 114
 wert-
 gleichung, 134
 satz, 67
 Möbius, 81
 -transformation, 81, 164
 -en und Kreise, 83
 Monotonie des reellen Integrals, 94, 100
 Morera, 118
 Satz von —, 118, 121
 Multiplikation meromorpher
 Funktionen, 157

 natürlicher Logarithmus, 44
 Nebenteil, 145
 negative Halbebene, 125
 neutrales Element, 4
 Newton, 36
 Formel von —–Abel, 36
 Nordpol, 159
 Norm
 euklidische —, 10, 55
 Normalenvektor
 innerer —, 177
 normierter Körper, 51
 Null-
 folge, 25
 stelle, 131, 142, 178, 179, 181
 Anzahl der —n, 181

 obere Halbebene, 84, 125, 189

 Automorphismengruppe der —n —, 138
 offen, 55, 80, 158
 -e Einheitskreisscheibe, 83
 -er Ball, 55
 Ordnung, 131, 142, 161, 175, 179
 ordnungsvollständig, 1
 Orientierung, 177
 orientierungstreu, 19

p-adische Zahlen, 57
 Parallelogramm, 7
 Partialbruchzerlegung, 150, 164
 des Kotangens, 191
 partielle Integration, 93
 Periode, 42
 periodisch, 42
 Pol
 -stelle, 142, 161, 173, 174, 178
 Nord- —, 159
 Süd- —, 159
 Polarkoordinaten, 12, 78
 polynomiale Funktion, 53, 60, 117, 150, 163, 183, 187, 189
 vom Grad d , 183
 Potenz, 14, 45, 48
 -reihe
 formale —, 28
 Konvergenzradius einer —, 30
 Produkt, 29, 157
 -regel, 94
 semidirektes —, 166
 Projektion
 stereographische —, 159, 177
 projektive algebraische Mannigfaltigkeit, 165

 quadratische Gleichung, 1, 7

 Radius, 55
 rational, 163
 -e Abbildung, 163
 -e Funktion, 60, 183, 184
 Realteil, 8, 53
 reell
 analytisch, 29, 130
 differenzierbar, 57, 70, 71, 74

- regelmäßiges n -Eck, 14
- Reihe, 25
 - alternierende harmonische —, 32
 - binomische —, 35
 - geometrische —, 25, 31
 - harmonische —, 32
 - konvergente —, 25
 - Laurent- —, 149
 - logarithmische —, 31, 32, 125
 - unendliche —, 119
- rein imaginär, 9
- rektifizierbarer Weg, 96
- Residuensatz, 170, 172, 178, 183, 184, 190, 191, 193
- Residuum, 170, 173, 174, 176, 178
- Richtungsableitung, 58
- Riemann, 70
 - integral, 91
 - Cauchy- — -Differentialgleichungen, 70, 74
- riemannsch
 - e ζ -Funktion, 122
 - e Zahlenkugel, 158
 - Automorphismengruppe der — n —, 164
 - er Hebbbarkeitssatz, 140, 143, 147
- Rouché, 181
 - Satz von —, 181, 182
- Satz
 - Residuen- —, 170, 172, 178, 183, 184, 190, 191, 193
 - von Casorati–Weierstraß, 143, 166
 - von Cauchy–Hadamard, 33
 - von Euler und de Moivre, 15
 - von Goursat, 104, 112
 - von Liouville, 117, 135, 145, 164, 166
 - von Morera, 118, 121
 - von Rouché, 181, 182
- Schachtelungsprinzip, 106
- Schnittwinkel, 76
- Schwarz, 11
 - Cauchy- — -Ungleichung, 11
 - Lemma von —, 136
- semidirektes Produkt, 166
- Singularität, 144
 - außerwesentliche —, 141, 161, 175
 - hebbare —, 140, 161
 - isolierte —, 139, 161
 - wesentliche —, 142, 161
- Sinus, 183
 - hyperbolicus, 41
 - funktion, 39
 - reihe, 39
- Skalarprodukt, 16
 - Standard- —, 17
- Sphäre
 - zweidimensionale —, 159
- Spiegelachse, 19
- Spiegelung, 9, 19
- Spur, 66
- Stammfunktion, 92, 97, 101, 103, 110, 172
 - lokale —, 109
- Standard-
 - abschätzung, 99, 103, 106, 111, 117, 121, 122, 134, 150, 182, 188, 190
 - orientierung, 177
 - skalarprodukt, 17
- Standgruppe, 137
- stereographische Projektion, 159, 177
- sternförmig, 107, 114, 146
 - Cauchy-Integralsatz für —e Gebiete, 108
- Sternmittelpunkt, 107, 108, 110, 114
- stetig, 51, 52
 - differenzierbar, 75, 93
- stückweise glatt, 95
- Substitutionsregel, 93, 98, 101, 177
- Südpol, 159
- Summe, 29, 156
- Tangente, 75
- Tangentialraum, 70
- Taylor, 21
 - reihe, 21, 119, 123, 126
- Teilraumtopologie, 127
- Topologie, 159
 - algebraische —, 168
- topologischer Raum, 126, 128
- trigonometrische Formel, 43
- Überdeckungseigenschaft, 159
- Überlagerung, 48

- universelle —, 48, 168
 Umkehr-
 funktion, 54, 56
 satz, 181
 Umlaufzahl, 167, 169
 anschauliche Interpretation
 der —, 168
 Umordnung, 26
 -ssatz, 26
 Umparametrisierung, 98
 uneigentliches Integral, 185, 187, 189
 unendlich
 oft differenzierbar, 21, 116
 -e Reihe, 25, 119
 universelle Überlagerung, 48, 168
 Unterteilung, 95

 verallgemeinerte Cauchy-Intergalformel,
 116, 118, 122, 123
 Verknüpfung, 100
 Vielfachheit, 131, 142
 Vollständigkeit, 24

 Weg, 65
 -integral, 95, 96, 101, 103, 119
 entgegengesetzter —, 100
 Kreis- —, 66
 rektifizierbarer —, 96
 wegzusammenhängend, 66, 127, 128
 lokal —, 128
 Weierstraß, 120, 121, 143, 166
 Satz von Casorati- —, 143, 166
 weierstraßscher Majorantentest, 120, 122
 Wert
 einer Reihe, 149
 eines uneigentlichen Integrals, 185
 wesentliche Singularität, 142, 161
 Winkel, 16
 winkeltreu, 17
 Wirtinger, 73
 -ableitungen, 73
 Wurzel, 45, 53, 112
 -funktion, 169
 -funktion (mehrdeutig), 47

 Zahl
 p -adische —en, 57
 komplexe —, 3
 riemannsche —enkugel, 158
 Automorphismengruppe
 der — n —, 164
 Zentrum, 164
 Zerlegung
 Laurent- —, 145
 zusammen-
 hängend, 48, 126–128
 lokal weg—, 128
 weg- —, 66, 127, 128
 ziehbar, 48
 Zusammenhangskomponente, 66
 zweidimensionale Sphäre, 159
 Zwischenwertsatz, 2