Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Wintersemester 2021/2022

A. Schmitt

Übungsblatt 8

Abgabe: Bis Mittwoch, den 5.1.2022, 8 Uhr.

Weihnachtszettel: Für jeden Punkt und jeden Bonuspunkt, den Sie erreichen, wird Ihnen ein weiterer Bonuspunkt gutgeschrieben.

Aufgabe 1 (Der Čech-Komplex, 2+3+5 Punkte).
Für einen Punkt $A \in \mathbb{R}^2$ und eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ ist der *abgeschlossene Ball* vom *Radius* ε durch

$$\overline{B}(A,\varepsilon) := \left\{\, B \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(A,B) \leq \varepsilon \,\right\}$$

gegeben.
Nun sei $V \subset \mathbb{R}^2$ eine nichtleere endliche Teilmenge. Für eine reelle Zahl δ setzen wir

$$L(\delta) := \left\{ \sigma \subset V \,\middle|\, \sigma \neq \varnothing \wedge \bigcap_{A \in \sigma} \overline{B}\left(A, \frac{\delta}{2}\right) \neq \varnothing \right\}.$$

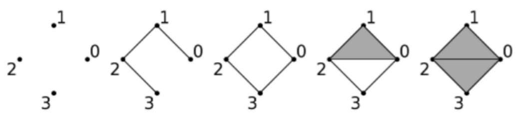
a) Zeigen Sie, dass $(V, L(\delta))$ ein abstrakter Simplizialkomplex ist.
b) Welche Beziehung besteht zwischen $(V, L(\delta))$ und dem abstrakten Simplizialkomplex $(V, K(\delta))$, der in der Vorlesung definiert wurde?
c) Die Menge $V = \{A, B, C\}$ bestehe aus den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Bestimmen Sie $K(\delta)$ und $L(\delta)$ für alle nichtnegativen reellen Zahlen $\delta \geq 0$. Für welche Werte unterscheiden sich $K(\delta)$ und $L(\delta)$?
Bemerkung. Die obige Konstruktion ergibt wieder eine endliche aufsteigende Kette

$$\mathscr{C}: \quad L^0 \subsetneq L^1 \subsetneq \cdots \subsetneq L^{m-1} \subsetneq L^m$$

von abstrakten Simplizialkomplexen, die man als *Čech-Komplex* bezeichnet.

Aufgabe 2 (Beständige Homologie I; 10 Punkte+5 Bonuspunkte).
a) Berechnen Sie die beständige Homologie des Komplexes (von Simplizialkomplexen) auf der linken Seite der folgenden Abbildung,[1] und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Diagramm auf der rechten Seite.

[1] Aus: A. Hickok, D. Needell, M.A. Porter, *Analysis of spatiotemporal anomalies using persistent homology: Case studies with COVID-19 Data*, `https://arxiv.org/abs/2107.09188`.



(a) $\mathcal{K}_0$ (b) $\mathcal{K}_1$ (c) $\mathcal{K}_2$ (d) $\mathcal{K}_3$ (e) $\mathcal{K}_4$

Fig. 1: An example of nested simplicial complexes in a filtered simplicial complex.

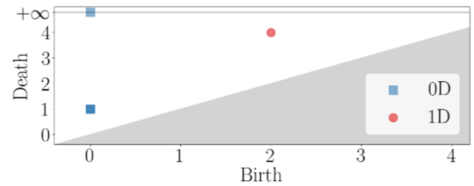


Fig. 2: The persistence diagram for the filtered simplicial complex in Figure 1.

b)* Kann es sich bei dem linken Teil um den Rips-Komplex einer Punktmenge in $\mathbb{R}^2$ handeln?

Aufgabe 3 (Beständige Homologie II; 10 Punkte).
Recherchieren Sie eine Anwendung von beständiger Homologie und stellen Sie sie ausführlich dar.

Aufgabe 4 (Wurzeln aus komplexen (2×2)-Matrizen; 10 Punkte).
Es sei $A \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ eine komplexe (2×2)-Matrix. Beweisen Sie, dass es genau dann eine komplexe (2×2)-Matrix $B \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ mit $B^2 = A$ gibt, wenn entweder $A = 0$ oder $A^2 \neq 0$.