

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Wintersemester 2021/2022

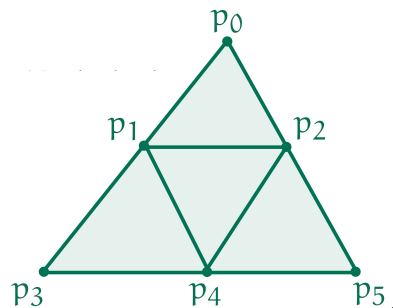
A. Schmitt

Übungsblatt 7

Abgabe: Bis Mittwoch, den 15.12.2021, 8 Uhr.

Aufgabe 1 (Eine Triangulierung des Dreiecks; 9 Punkte).

Es seien k ein Körper und (V, K) der abstrakte Simplicialkomplex, der dem folgenden geometrischen Simplicialkomplex \mathcal{K} zugrunde liegt:



Berechnen Sie $H_q(K, k)$, $q = 0, 1, 2$.

Aufgabe 2 (Null- und eindimensionale simpliciale Homologie; 5+5+5 Punkte).

Es sei (V, K) ein abstrakter Simplicialkomplex.

a) Zeigen Sie, dass $H_0(K, k) \neq 0$ gilt.

b) Es seien $i_0, i_1 \in \{0, \dots, n\}$. Beweisen Sie, dass die Klasse von $\langle v_{i_1} \rangle - \langle v_{i_0} \rangle$ in $H_0(K, k)$ genau dann null ist, wenn es einen orientierten Kantenzug κ mit Startpunkt v_{i_0} und Endpunkt v_{i_1} gibt.

c) Beweisen Sie, dass jeder 1-Zyklus $\omega \in Z_1(K)$ eine k -Linearkombination von orientierten Kantenzügen ist.

Aufgabe 3 (Abstrakte Simplicialkomplexe; 3 Punkte).

Es seien $N \geq 1$ eine natürliche Zahl, $V \subset \mathbb{R}^N$ eine endliche Teilmenge und $\delta > 0$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass das in der Vorlesung definierte Paar $(V, K(\delta))$ ein abstrakter Simplicialkomplex ist.

Aufgabe 4 (Geometrische Simplicialkomplexe; 3 Punkte).

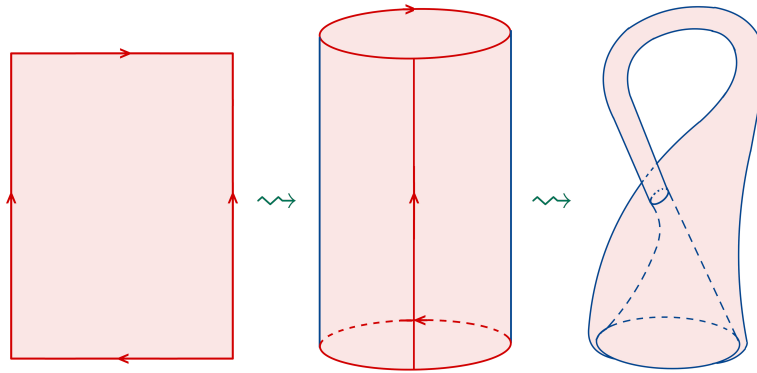
Es seien $N \geq 1$, $e_0 := 0$ und e_1, \dots, e_N die Standardbasisvektoren von \mathbb{R}^N . Wir setzen

$$\mathcal{K} := \{ \Delta_q(e_{i_0}, \dots, e_{i_q}) \mid q = 0, \dots, N \wedge 0 \leq i_0 < \dots < i_q \leq N \}.$$

Diese Menge besteht aus dem N -Simplex $\Delta_N(e_0, e_1, \dots, e_N)$ und allen seinen Seiten. Überprüfen Sie, dass es sich bei \mathcal{K} in der Tat um einen geometrischen Simplicialkomplex handelt.

Aufgabe 5 (Die kleinsche Flasche I; 10 Punkte).

Die kleinsche Flasche entsteht, indem man die Kanten eines Rechtecks wie in der Zeichnung angegeben identifiziert.



Bestimmen Sie eine Triangulierung von F .

Bonusaufgabe 1 (Die kleinsche Flasche II; 10 Bonuspunkte).

Berechnen Sie die Homologiegruppen der kleinschen Flasche mit der Triangulierung aus der vorigen Aufgabe. Welche Eulercharakteristik hat die kleinsche Flasche?

Bemerkung. Sie dürfen für Ihre Berechnung einen Computer verwenden. Sie müssen Ihre Berechnungen aber geeignet dokumentieren.