

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Wintersemester 2021/2022

A. Schmitt

Übungsblatt 6

Abgabe: Bis Mittwoch, den 8.12.2021, 8 Uhr.

Bonusaufgabe 1 (Dünne unzerlegbare Darstellungen; 6+6+6+2 Punkte).

a) Es sei $\Gamma = (V, A, \varepsilon)$ ein Baum. Es gebe einen Knoten $v_0 \in V$ mit Kantengrad $d(v_0) \geq 3$. Beweisen Sie, dass es einen orientierten Baum $Q = (V, A, t, h)$ mit zugrunde liegendem Baum Γ und eine unzerlegbare Darstellung R von Q , die nicht dünn ist, gibt.

b) Es sei $\Gamma = (V, A, \varepsilon)$ ein Baum, so dass $d(v) \leq 2$, $v \in V$, für die Kantengrade der Knoten von Γ gilt. Beweisen Sie, dass Γ bei geeigneter Nummerierung der Knoten und Pfeile die Gestalt

$$v_1 \xrightarrow{a_1} v_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-2}} v_{n-1} \xrightarrow{a_{n-1}} v_n,$$

$n = \#V$, annimmt.

c) Es sei $Q = (V, A, t, h)$ ein orientierter Baum, dessen zugrunde liegender Graph durch die Abbildung in Teil b) gegeben ist, $n = \#V$. Zeigen Sie, dass alle Darstellungen von Q dünn sind.

d) Schließen Sie, dass die orientierten Bäume, für die alle unzerlegbaren Darstellungen dünn sind, genau diejenigen sind, deren zugrunde liegender Baum wie in Teil b) aussieht.

Aufgabe 1 (Einfache Polygone; 10 Punkte).

Es sei $\Pi = (p_1, \dots, p_n)$ ein einfaches Polygon. Versuchen Sie, das *Innere* von Π mathematisch zu definieren. Wieso funktioniert die Definition bei anderen Polygonen nicht?

Aufgabe 2 (Catalan-Zahlen; 10 Punkte).

Recherchieren Sie ein weiteres Zählproblem, das durch die Catalan-Zahlen gelöst wird, und stellen es ausführlich dar.

Aufgabe 3 (Position der Kameras; 10 Punkte).

Überwachen Sie das Museum, das durch das einfache Polygon im Skript gegeben ist, durch möglichst wenige Kameras.

Aufgabe 4 (Simpliziale Homologie; 4+4+2 Punkte).

Es seien (V, K) , (W, L) abstrakte Simplicialkomplexe und $\varphi: V \rightarrow W$ eine simpliciale Abbildung. Weiter sei k ein Körper. Die Bezeichnungen seien wir in der Vorlesung und im Skript.

a) Zeigen Sie, dass für alle $q \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\varphi}_{q*}(U_q(K)) \subset U_q(L)$$

gilt.

b) Überprüfen Sie, dass¹

$$\forall q \geq 1: \quad \tilde{\varphi}_{q-1*} \circ \tilde{\partial}_q = \tilde{\partial}_q \circ \tilde{\varphi}_{q*},$$

d.h., dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_q(K) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_q} & T_{q-1}(K) \\ \tilde{\varphi}_{q*} \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi}_{q-1*} \\ T_q(L) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_q} & T_{q-1}(L) \end{array}$$

kommutiert.

c) Schließen Sie, dass $\tilde{\varphi}_{q*}$ eine k -lineare Abbildung

$$\varphi_{q*}: C_q(K) \longrightarrow C_q(L), \quad q \in \mathbb{N},$$

induziert und dass

$$\forall q \in \mathbb{N}: \quad \varphi_{q-1*} \circ \partial_q = \partial_q \circ \varphi_{q*}.$$

¹Links bezieht sich $\tilde{\partial}_q$ auf K und rechts auf L .