

# Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Wintersemester 2021/2022

A. Schmitt

## Übungsblatt 4

Abgabe: Bis Mittwoch, den 24.11.2021, 8 Uhr.

---

Bonusaufgabe 1 (Nilpotente Endomorphismen; 5+5 Bonuspunkte).

Es seien  $k$  ein Körper,  $Q$  ein Köcher,  $R = (R_v, v \in V, f_a, a \in A)$  eine Darstellung von  $Q$  und  $\varphi = (\varphi_v, v \in V): R \rightarrow R$  ein Endomorphismus von  $R$ .

a) Es sei  $l \geq 1$ , so dass  $\text{Ker}(\varphi^l) = \text{Ker}(\varphi^{l+1})$ . Beweisen Sie

$$\forall n \geq l : \quad \text{Ker}(\varphi^n) = \text{Ker}(\varphi^l).$$

b) Man setze  $l := \max\{\dim_k(R_v) \mid v \in V\}$ . Zeigen Sie

$$\forall n \geq l : \quad \text{Ker}(\varphi^n) = \text{Ker}(\varphi^l).$$

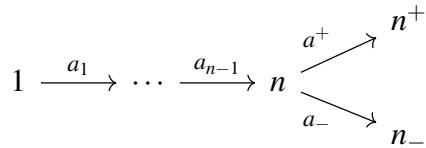
**Hinweis.** Betrachten Sie zunächst einen einzelnen  $k$ -Vektorraum.

Aufgabe 1 (Der Kronecker-Köcher; 10 Punkte).

Es sei  $Q = (V, A, t, h)$  der Köcher mit  $V = \{1, 2\}$ ,  $A = \{a, b\}$ ,  $t(a) = 1 = t(b)$  und  $h(a) = 2 = h(b)$ . Bestimmen Sie die unzerlegbaren dünnen Darstellungen von  $Q$ .

Aufgabe 2 (Köcher von Typ D; 2+4+4 Punkte).

Es seien  $n \geq 2$  und  $D_n$  der Köcher, der durch das Bild



beschrieben wird. Beachten Sie, dass  $D_n$  ein orientierter Baum ist,  $n \geq 2$ .

a) Schreiben Sie  $D_n$  in der Form  $(V_n, A_n, t_n, h_n)$ ,  $n \geq 2$ .

b) Listen Sie für jedes  $n \geq 2$  alle zusammenhängenden Teilköcher von  $D_n$  auf.

c) Beweisen Sie, dass die Darstellung  $R = (k, k^2, k, k, f_1, f^+, f_-)$  von  $D_2$  mit  $f_1: k \rightarrow k^2$ ,  $\lambda \mapsto (\lambda, \lambda)$ ,  $f^+: k^2 \rightarrow k$ ,  $(\lambda^+, \lambda_-) \mapsto \lambda^+$ , und  $f_-: k^2 \rightarrow k$ ,  $(\lambda^+, \lambda_-) \mapsto \lambda_-$ , unzerlegbar ist. (Sie ist nicht dünn.)

Aufgabe 3 (Die Rang-Invariante; 10 Punkte).

Es seien  $n \geq 2$  und  $R = (R_v, v = 1, \dots, n, f_a, a = 1, \dots, n-1)$  eine Darstellung von  $A_n$ . Die Rang-Invariante von  $R$  ist

$$\rho(R) := (\text{Rank}(f_{lm}), 1 \leq l < m \leq n).$$

Erklären Sie, wie man die Koeffizienten  $\delta_{l,m}$ ,  $1 \leq l \leq m \leq n$  in Satz I.6.2 im Skript aus dem Dimensionsvektor  $d(R)$  und der Rang-Invariante  $\rho(R)$  berechnet.

Aufgabe 4 (Zerlegung in unzerlegbare Darstellungen; 10 Punkte).

Es seien  $k = \mathbb{Q}$ ,

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 16 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

und  $R = (\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^2, f_1, f_2, f_3)$  die Darstellung von

$$1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{3} 4,$$

bei der  $f_i$  durch Matrix  $A_i$  gegeben ist,  $i = 1, 2, 3$ .

Zerlegen Sie die Darstellung  $R$  in unzerlegbare Darstellungen.