# Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Wintersemester 2021/2022

A. Schmitt

## Übungsblatt 4

Abgabe: Bis Mittwoch, den 24.11.2021, 8 Uhr.

---

Bonusaufgabe 1 (Nilpotente Endomorphismen; 5+5 Bonuspunkte).
Es seien $k$ ein Körper, $Q$ ein Köcher, $R = (R_v, v \in V, f_a, a \in A)$ eine Darstellung von $Q$ und $\varphi = (\varphi_v, v \in V)\colon R \longrightarrow R$ ein Endomorphismus von $R$.
a) Es sei $l \geq 1$, so dass $\operatorname{Ker}(\varphi^l) = \operatorname{Ker}(\varphi^{l+1})$. Beweisen Sie

$$\forall n \geq l: \quad \operatorname{Ker}(\varphi^n) = \operatorname{Ker}(\varphi^l).$$

b) Man setze $l := \max\{\, \dim_k(R_v) \mid v \in V\,\}$. Zeigen Sie

$$\forall n \geq l: \quad \operatorname{Ker}(\varphi^n) = \operatorname{Ker}(\varphi^l).$$

**Hinweis.** Betrachten Sie zunächst einen einzelnen $k$-Vektorraum.

Aufgabe 1 (Der Kronecker-Köcher; 10 Punkte).
Es sei $Q = (V, A, t, h)$ der Köcher mit $V = \{\,1, 2\,\}$, $A = \{\,a, b\,\}$, $t(a) = 1 = t(b)$ und $h(a) = 2 = h(b)$. Bestimmen Sie die unzerlegbaren dünnen Darstellungen von $Q$.

Aufgabe 2 (Köcher von Typ D; 2+4+4 Punkte).
Es seien $n \geq 2$ und $D_n$ der Köcher, der durch das Bild

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & & n^+ \\ 1 \arrow[r, "a_1"] & \cdots \arrow[r, "a_{n-1}"] & n \arrow[ur, "a^+"] \arrow[dr, "a_-"'] & \\ & & & n_- \end{tikzcd}$$

beschrieben wird. Beachten Sie, dass $D_n$ ein orientierter Baum ist, $n \geq 2$.
a) Schreiben Sie $D_n$ in der Form $(V_n, A_n, t_n, h_n)$, $n \geq 2$.
b) Listen Sie für jedes $n \geq 2$ alle zusammenhängenden Teilköcher von $D_n$ auf.
c) Beweisen Sie, dass die Darstellung $R = (k, k^2, k, k, f_1, f^+, f_-)$ von $D_2$ mit $f_1\colon k \longrightarrow k^2$, $\lambda \longmapsto (\lambda, \lambda)$, $f^+\colon k^2 \longrightarrow k$, $(\lambda^+, \lambda_-) \longmapsto \lambda^+$, und $f_-\colon k^2 \longrightarrow k$, $(\lambda^+, \lambda_-) \longmapsto \lambda_-$, unzerlegbar ist. (Sie ist nicht dünn.)

Aufgabe 3 (Die Rang-Invariante; 10 Punkte).
Es seien $n \geq 2$ und $R = (R_v, v = 1, \ldots, n, f_a, a = 1, \ldots, n-1)$ eine Darstellung von $A_n$. Die *Rang-Invariante* von $R$ ist

$$\rho(R) := (\operatorname{Rank}(f_{lm}), 1 \leq l < m \leq n).$$

Erklären Sie, wie man die Koeffizienten $\delta_{l,m}$, $1 \leq l \leq m \leq n$ in Satz I.6.2 im Skript aus dem Dimensionsvektor $d(R)$ und der Rang-Invariante $\rho(R)$ berechnet.

Aufgabe 4 (Zerlegung in unzerlegbare Darstellungen; 10 Punkte).
Es seien $k = \mathbb{Q}$,

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 16 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

und $R = (\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^2, f_1, f_2, f_3)$ die Darstellung von

$$1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{3} 4,$$

bei der $f_i$ durch Matrix $A_i$ gegeben ist, $i = 1, 2, 3$.
Zerlegen Sie die Darstellung $R$ in unzerlegbare Darstellungen.