Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Wintersemester 2021/2022

A. Schmitt

Übungsblatt 11

Abgabe: Bis Mittwoch, den 26.1.2022, 8 Uhr.

Aufgabe 1 (Die Spur; 4+3+3 Punkte)**.**
a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Spur}\colon \mathrm{Mat}(n;K)\times\mathrm{Mat}(n;K) &\longrightarrow K \\ (A,B) &\longmapsto \mathrm{Spur}(A\cdot B) \end{aligned}$$

eine symmetrische Bilinearform ist.
b) Zeigen Sie, dass für $A\in\mathrm{Mat}(n;K)$ gilt:

$$\forall B\in\mathrm{Mat}(n;K):\quad \mathrm{Spur}(A\cdot B)=0 \quad\Longrightarrow\quad A=0.$$

(Man sagt, die Spur ist *nicht ausgeartet*.)
c) Ist die Spur für $K=\mathbb{R}$ positiv definit?

Aufgabe 2 (Bilinearformen; 6+4 Punkte)**.**
Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \beta\colon \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} t_1\\ t_2\\ t_3\end{pmatrix}\right) &\longmapsto 4s_1t_1-6s_1t_2-6s_2t_1+9s_2t_2+7s_3t_3. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass β eine symmetrische Bilinearform mit $\beta(v,v)\geq 0$ für alle $v\in\mathbb{R}^3$ ist, und bestimmen Sie alle $v\in\mathbb{R}^3$ mit $\beta(v,v)=0$.
b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_E(\beta)$ bzgl. der Standardbasis $E=(e_1,e_2,e_3)$.

Aufgabe 3 (Hermitesche Matrizen; 4+6 Punkte)**.**
Es sei

$$A:=\begin{pmatrix} 1 & 0 & (-1-2i)\\ 0 & 4 & 0\\ (-1+2i) & 0 & 5\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}(3;\mathbb{C}).$$

a) Berechnen Sie A^*, und zeigen Sie, dass A hermitesch ist.
b) Zeigen Sie, dass $\sigma_A(v,v)\geq 0$ für alle $v\in\mathbb{C}^3$ gilt, und bestimmen Sie alle $v\in\mathbb{C}^3$ mit $\sigma_A(v,v)=0$.

Aufgabe 4 (Symmetrische Matrizen; 10 Punkte)**.**
Es sei $A\in\mathrm{Mat}(n;\mathbb{R})$ eine symmetrische reelle Matrix. Beweisen Sie, dass das charakteristische Polynom von A in **reelle** Linearfaktoren zerfällt.