Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II"

Wintersemester 2021/2022

A. Schmitt

Übungsblatt 10

Abgabe: Bis Mittwoch, den 19.1.2022, 8 Uhr.

Aufgabe 1 (Orthogonale (3×3)-Matrizen, 2+4+3+3 Punkte)**.**
Es sei $A \in \mathrm{Mat}(3;\mathbb{R})$ eine Matrix mit

$$A^t \cdot A = \mathbb{E}_3 = A \cdot A^t.$$

a) Zeigen Sie $\mathrm{Det}(A) \in \{\pm 1\}$.
b) Weisen Sie nach, dass für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$

$$|\lambda| := \sqrt{\lambda \cdot \overline{\lambda}} = 1$$

gilt.
c) Beweisen Sie, dass die Matrix A einen Eigenwert $\lambda \in \{\pm 1\}$ hat und dass die Implikation

$$\mathrm{Det}(A) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \text{ ist Eigenwert von } A$$

gilt. Was ist mit der Umkehrung?
d) Geben Sie die reelle Jordansche Normalform von A an.
Hinweis. Die komplexen Zahlen vom Betrag eins sind genau die komplexen Zahlen der Form

$$\exp(i \cdot t) = \cos(t) + i \cdot \sin(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2 (Nilpotente Matrizen; 6+4 Punkte)**.**
Es seien k ein Körper und $N \in \mathrm{Mat}(n;k)$ eine nilpotente Matrix.
a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}_n - N$ invertierbar ist und dass gilt:

$$(E-N)^{-1} = \sum_{l=0}^{n} N^l.$$

b) Berechnen Sie mit der Formel aus a) das Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5;\mathbb{Q}).$$

Aufgabe 3 (Exponentiation von Matrizen I; 10 Punkte).
Berechnen Sie
$$\exp\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (Exponentiation von Matrizen II; 8 Punkte).
Geben Sie ein Beispiel für (2×2)-Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{C})$ mit

$$\exp(A+B) \neq \exp(A)\cdot\exp(B)$$

an.

Bonusaufgabe 1 (Differenzialgleichungen; 8+7 Bonuspunkte).
Es seien $n \geq 1$ und $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen. Sie definieren die *homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}\cdot y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = 0. \tag{1}$$

Eine *Lösung* dieser Differentialgleichung ist eine n-mal differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, so dass

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad f^{(n)}(t) + a_{n-1}\cdot f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass es eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ gibt, so dass die Zuordnungen

$$f \longmapsto \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \longmapsto f_1$$

zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge der Lösungen der Differentialgleichung (1) und der Menge der Lösungen des Systems

$$y'(t) = A\big(y(t)\big)$$

sind.
b) Es sei $\omega > 0$ eine positive reelle Zahl. Wenden Sie das in a) entwickelte Verfahren an, um die Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(t) + \omega^2 \cdot y(t) = 0$$

zu ermitteln.