Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Wintersemester 2021/2022

A. Schmitt

Übungsblatt 1

Abgabe: Bis Mittwoch, den 3.11.2021, 8 Uhr.

Aufgabe 1 (Die jordansche Normalform I; 10 Punkte).
Über eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(6;\mathbb{C})$ sei bekannt:

- $\chi_A(t) = (t+7)^4 \cdot (t-3)^2$,
- $\dim_{\mathbb{C}}\big(\mathrm{Eig}(A,-7)\big) = 2$.

Listen Sie die möglichen jordanschen Normalformen für A auf.
Geben Sie zu jeder Normalform das Minimalpolynom an.
Hinweis. Beachten Sie, dass es zwei Eigenwerte gibt.

Aufgabe 2 (Die jordansche Normalform II; 10 Punkte).
Es sei

$$A = \left(\begin{array}{ccc|rr|rr} 0 & 0 & 0 & -3 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -17 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathrm{Mat}(7;\mathbb{C}).$$

Geben Sie die jordansche Normalform J von A an und bestimmen Sie Vektoren $t_1,\ldots,t_7 \in \mathbb{C}^7$, so dass für die Matrix

$$T := (t_1|\cdots|t_7) \in \mathrm{GL}_7(\mathbb{C})$$

die Gleichung

$$T^{-1}\cdot A \cdot T = J$$

gilt.

Aufgabe 3 (Das königsberger Brückenproblem heute; 10 Punkte).
Schauen Sie sich einen aktuellen Stadtplan von Kaliningrad an und erstellen Sie den zugehörigen Graphen. Gibt es heutzutage einen Weg bzw. einen geschlossenen Weg, bei dem jede Brücke genau einmal überquert wird?

Aufgabe 4 (Köcherdarstellungen; 5+5 Punkte).
Es seien $Q = (V, A, t, h)$ ein Köcher und k ein Körper.
a) Es seien $R = (R_v, v \in V, f_a, a \in A)$, $S = (S_v, v \in V, g_a, a \in A)$ Darstellungen von Q und $\varphi = (\varphi_v, v \in V): R \longrightarrow S$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass φ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn φ_v für alle Knoten $v \in V$ bijektiv ist, d.h. nach Bemerkung III.5.9 aus dem Skript zur Linearen Algebra I ein Isomorphismus von k-Vektorräumen.
b) Es seien R, S Darstellungen von Q und $\varphi: R \longrightarrow S$ ein Homomorphismus. Verwenden Sie Satz III.6.5 aus dem Skript zur Linearen Algebra I, um $R/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Bild}(\varphi)$ zu zeigen.