Benedikt Weygandt
Institut für Mathematik, AG Didaktik der Mathematik

Freie Universität Berlin

Spieltheorie oder die Mathematik der Zwischenmenschlichkeit

Vortrag für Schülerinnen und Schüler
zum Tag der Mathematik
an der Freien Universität Berlin
30.04.2016

weygandt@math.fu-berlin.de

Übersicht

Was wir heute lernen:

- was Spieltheorie ist
- Gefangene zu verhören
- Versicherungsbetrug
- bei Schere-Stein-Papier nicht unnötig zu verlieren
- wie man einen Euro gewinnt
- uneigennützig zu handeln (Steuern zahlen)

Was wir heute nicht lernen:

- Gefangene zu machen
- Versicherungen betrügen
- bei Schere-Stein-Papier zu gewinnen
- wie man reich wird
- Steuern zu hinterziehen
- wie man beim Poker gewinnt

  (Dafür benötigt man Geld, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Rechenkunst, Schätzkunst, Glück, Beobachtungsgabe, Psychologie, Interpretation, Verhaltensweisen, Theaterspielen sowie einen Affen – aber keine Spieltheorie)

Was ist Spieltheorie?

- Spieltheorie ist keine „Entscheidungstheorie".
- Spieltheorie beschäftigt sich (meistens) nicht mit „Gesellschaftsspielen".
- Spieltheorie benötigt mindestens zwei Spieler (Menschen) die jeweils aus ihrem Vorrat an möglichen *Optionen* eine auswählen.

  Ihre *Strategie* legt fest, wie sie sich für die Option entscheiden. Jeder Spieler erhält eine *Auszahlung*, die von den Entscheidungen *aller* Spieler abhängt.

Was ist Spieltheorie?

Freie Universität Berlin

- Spieltheorie ist keine „Entscheidungstheorie".
- Spieltheorie beschäftigt sich (meistens) nicht mit „Gesellschaftsspielen".
- Spieltheorie benötigt mindestens zwei Spieler (Menschen) die jeweils aus ihrem Vorrat an möglichen *Optionen* eine auswählen.

  Ihre *Strategie* legt fest, wie sie sich für die Option entscheiden. Jeder Spieler erhält eine *Auszahlung*, die von den Entscheidungen *aller* Spieler abhängt.

Am Beispiel:

Bei Schere-Stein-Papier sind die drei *Optionen* SCHERE, STEIN und PAPIER.

Eine *Strategie* ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, mit der man sich für die jeweiligen Optionen entscheidet:

$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	(spiele alle drei Optionen gleich wahrscheinlich)
$(0, 0, 1)$	(spiele immer PAPIER, egal was passiert)
$(19\%, 48\%, 33\%)$	(spiele SCHERE nicht so häufig, da die Geste so kompliziert ist, dafür STEIN häufig, da das so bequem zu greifen ist)

Was kann Spieltheorie?

Spieltheorie dient zur mathematischen Beschreibung und Modellierung von Konfliktsituationen zwischen Akteurinnen.

Grundannahmen des Modells sind das rationale, gewinnmaximierende Handeln der Beteiligten (‚homo oeconomicus‘).

Die Akteurinnen können einzelne Menschen sein, aber auch Gruppen von Menschen (z. B. Börsenmaklerinnen, Unternehmen, Regierungen, …) oder auch eine Spezies.

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Alfred-Nobel-Gedächtnispreis_für_Wirtschaftswissenschaften#Preistr.C3.A4ger

Was kann Spieltheorie?

Spieltheorie dient zur mathematischen Beschreibung und Modellierung von Konfliktsituationen zwischen Akteurinnen.

Grundannahmen des Modells sind das rationale, gewinnmaximierende Handeln der Beteiligten (‚homo oeconomicus'‘).

Die Akteurinnen können einzelne Menschen sein, aber auch Gruppen von Menschen (z. B. Börsenmaklerinnen, Unternehmen, Regierungen, …) oder auch eine Spezies.

Dadurch ist Spieltheorie häufig im interdisziplinären Umfeld anzutreffen, gemeinsam mit Wirtschaftswissenschaften, Biologie, Psychologie oder Soziologie.

Und es ist eines der wenigen mathematischen Felder, dessen Errungenschaften zur Verleihung des *Preises der Schwedischen Reichsbank in Wirtschaftswissenschaft zur Erinnerung an Alfred Nobel* an Mathematiker geführt hat.

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Alfred-Nobel-Gedächtnispreis_für_Wirtschaftswissenschaften#Preistr.C3.A4ger

How-to: Gefangene verhören

Wir haben zwei Einbrecher, die gemeinsam ein Haus geplündert haben.

Leider wurden sie nicht auf frischer Tat erwischt, sie hatten also genügend Zeit, die Beute zu verstecken.

Wir haben nur einzelne Indizienbeweise; ein Geständnis wäre daher sehr hilfreich…

How-to: Gefangene verhören

Die Staatsanwältin überlegt sich folgendes, um die beiden zum Reden zu bringen:

- Die Gaunerinnen werden getrennt voneinander verhört.
- Sie bekommen beide unabhängig voneinander den folgenden „Deal“ angeboten:
  - Wenn beide weiterhin schweigen, muss jede für ein Jahr ins Gefängnis.
    (Aufgrund der Indizien ist leider nicht mehr möglich.)
  - Wenn nur eine von beiden gesteht, kommt sie frei (mildernde Umstände), die andere (ohne Geständnis) sitzt die volle Strafe von 10 Jahren alleine ab.
  - Gestehen beide, so müssen sie beide für 6 Jahre ins Gefängnis.

How-to: Gefangene verhören

Die Staatsanwältin überlegt sich folgendes, um die beiden zum Reden zu bringen:

- Die Gaunerinnen werden getrennt voneinander verhört.
- Sie bekommen beide unabhängig voneinander den folgenden „Deal“ angeboten:
  - Wenn beide weiterhin schweigen, muss jede für ein Jahr ins Gefängnis. (Aufgrund der Indizien ist leider nicht mehr möglich.)
  - Wenn nur eine von beiden gesteht, kommt sie frei (mildernde Umstände), die andere (ohne Geständnis) sitzt die volle Strafe von 10 Jahren alleine ab.
  - Gestehen beide, so müssen sie beide für 6 Jahre ins Gefängnis.

	SCHWEIGEN	GESTEHEN
SCHWEIGEN	-1 -1	
GESTEHEN		

How-to: Gefangene verhören

Die Staatsanwältin überlegt sich folgendes, um die beiden zum Reden zu bringen:

- Die Gaunerinnen werden getrennt voneinander verhört.
- Sie bekommen beide unabhängig voneinander den folgenden „Deal“ angeboten:
  - Wenn beide weiterhin schweigen, muss jede für ein Jahr ins Gefängnis. (Aufgrund der Indizien ist leider nicht mehr möglich.)
  - Wenn nur eine von beiden gesteht, kommt sie frei (mildernde Umstände), die andere (ohne Geständnis) sitzt die volle Strafe von 10 Jahren alleine ab.
  - Gestehen beide, so müssen sie beide für 6 Jahre ins Gefängnis.

	SCHWEIGEN	GESTEHEN
SCHWEIGEN	-1 -1	0 -10
GESTEHEN		

How-to: Gefangene verhören

Die Staatsanwältin überlegt sich folgendes, um die beiden zum Reden zu bringen:

- Die Gaunerinnen werden getrennt voneinander verhört.
- Sie bekommen beide unabhängig voneinander den folgenden „Deal“ angeboten:
  - Wenn beide weiterhin schweigen, muss jede für ein Jahr ins Gefängnis.
    (Aufgrund der Indizien ist leider nicht mehr möglich.)
  - Wenn nur eine von beiden gesteht, kommt sie frei (mildernde Umstände), die andere (ohne Geständnis) sitzt die volle Strafe von 10 Jahren alleine ab.
  - Gestehen beide, so müssen sie beide für 6 Jahre ins Gefängnis.

	SCHWEIGEN	GESTEHEN
SCHWEIGEN	-1 -1	0 -10
GESTEHEN	-10 0	

How-to: Gefangene verhören

Die Staatsanwältin überlegt sich folgendes, um die beiden zum Reden zu bringen:

- Die Gaunerinnen werden getrennt voneinander verhört.
- Sie bekommen beide unabhängig voneinander den folgenden „Deal“ angeboten:
  - Wenn beide weiterhin schweigen, muss jede für ein Jahr ins Gefängnis. (Aufgrund der Indizien ist leider nicht mehr möglich.)
  - Wenn nur eine von beiden gesteht, kommt sie frei (mildernde Umstände), die andere (ohne Geständnis) sitzt die volle Strafe von 10 Jahren alleine ab.
  - Gestehen beide, so müssen sie beide für 6 Jahre ins Gefängnis.

	SCHWEIGEN	GESTEHEN
SCHWEIGEN	-1 -1	0 -10
GESTEHEN	-10 0	-6 -6

How-to: Gefangene verhören

Die beiden Verbrecher wollten tatsächlich zusammenhalten und das eine Jahr absitzen – haben sich aber letzten Endes verpfiffen…

Was ist hier passiert?

How-to: Gefangene verhören

Die beiden Verbrecher wollten tatsächlich zusammenhalten und das eine Jahr absitzen – haben sich aber letzten Endes verpfiffen…

Was ist hier passiert?

Jeder der beiden Einbrecher weiß, dass (unabhängig vom Verhalten des anderen) die Option GESTEHEN besser ist als SCHWEIGEN.

- *„Hält der andere (Trottel!) die Klappe, so komme ich frei!“*
  (Null Jahre Gefängnis sind besser als ein Jahr…)

- *„Verrät mich der andere, dann sollte ich aber auch gestehen – ich bin doch nicht so blöd, und sitze die Strafe alleine ab!“* (6 Jahre sind besser als 10 Jahre…)

How-to: Gefangene verhören

Die beiden Verbrecher wollten tatsächlich zusammenhalten und das eine Jahr absitzen – haben sich aber letzten Endes verpfiffen…

Was ist hier passiert?

Jeder der beiden Einbrecher weiß, dass (unabhängig vom Verhalten des anderen) die Option GESTEHEN besser ist als SCHWEIGEN.

- *„Hält der andere (Trottel!) die Klappe, so komme ich frei!“*
  (Null Jahre Gefängnis sind besser als ein Jahr…)

- *„Verrät mich der andere, dann sollte ich aber auch gestehen – ich bin doch nicht so blöd, und sitze die Strafe alleine ab!“* (6 Jahre sind besser als 10 Jahre…)

Mathematisch gesprochen ist GESTEHEN eine *dominante Strategie*:

Die Auszahlung ist in allen Fällen „besser oder gleich gut“.

Das Nash-Gleichgewicht

Die Kombination „GESTEHEN–GESTEHEN“ stellt zudem ein *Nash-Gleichgewicht* dar.

Definition:
„Ein *Nash-Gleichgewicht* ist eine Situation, in der keine der Spielerinnen ihre Option nachträglich wechseln möchte, sobald sie die Optionen der anderen Spielerinnen sieht.“

weygandt@math.fu-berlin.de

Das Nash-Gleichgewicht

Die Kombination „GESTEHEN–GESTEHEN" stellt zudem ein *Nash-Gleichgewicht* dar.

Definition:
„Ein *Nash-Gleichgewicht* ist eine Situation, in der keine der Spielerinnen ihre Option nachträglich wechseln möchte, sobald sie die Optionen der anderen Spielerinnen sieht."

Bei einem Nash-Gleichgewicht sagt sich also jede Spielerin:

„*Ich sehe, wofür sich die anderen entschieden haben und ich bereue meine Wahl nicht.*"

weygandt@math.fu-berlin.de

Das Nash-Gleichgewicht

Die Kombination „GESTEHEN–GESTEHEN“ stellt zudem ein *Nash-Gleichgewicht* dar.

Definition:
„Ein *Nash-Gleichgewicht* ist eine Situation, in der keine der Spielerinnen ihre Option nachträglich wechseln möchte, sobald sie die Optionen der anderen Spielerinnen sieht.“

Bei einem Nash-Gleichgewicht sagt sich also jede Spielerin:

„Ich sehe, wofür sich die anderen entschieden haben und ich bereue meine Wahl nicht.“

weygandt@math.fu-berlin.de

Das Nash-Gleichgewicht

Die Kombination „GESTEHEN–GESTEHEN“ stellt zudem ein *Nash-Gleichgewicht* dar.

> **Definition:**
> „Ein *Nash-Gleichgewicht* ist eine Situation, in der keine der Spielerinnen ihre Option nachträglich wechseln möchte, sobald sie die Optionen der anderen Spielerinnen sieht.“

Bei einem Nash-Gleichgewicht sagt sich also jede Spielerin:

„Ich sehe, wofür sich die anderen entschieden haben und ich bereue meine Wahl nicht.“

BENEDIKT WEYGANDT
weygandt@math.fu-berlin.de

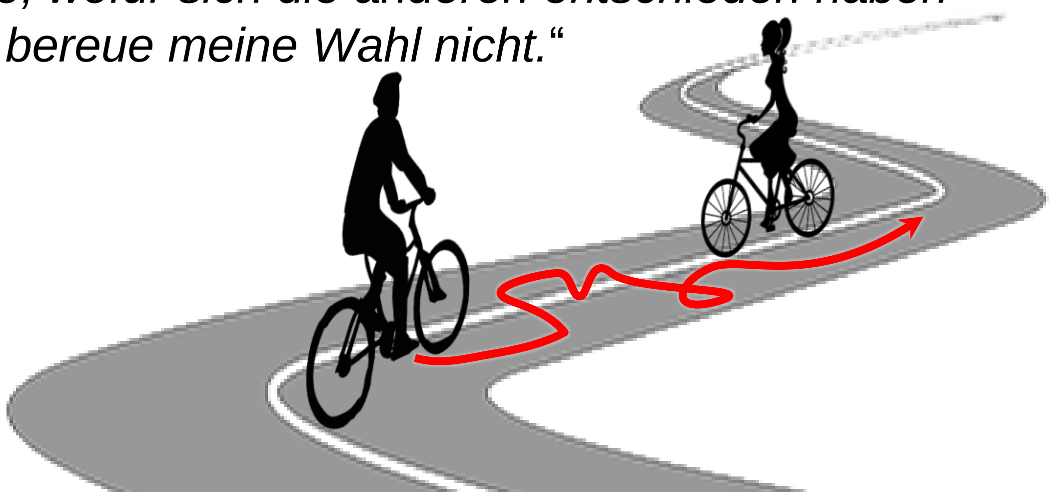
Das Nash-Gleichgewicht

Die Kombination „GESTEHEN–GESTEHEN“ stellt zudem ein *Nash-Gleichgewicht* dar.

Definition:
„Ein *Nash-Gleichgewicht* ist eine Situation, in der keine der Spielerinnen ihre Option nachträglich wechseln möchte, sobald sie die Optionen der anderen Spielerinnen sieht.“

Bei einem Nash-Gleichgewicht sagt sich also jede Spielerin:

„Ich sehe, wofür sich die anderen entschieden haben und ich bereue meine Wahl nicht.“



Versicherungsmathematik für Dummies

Ihr kommt aus dem Urlaub wieder, steigt aus dem Flugzeug, und müsst feststellen, dass beim Beladen des Fliegers eure frisch erfeilschte antike Nippes-Vase zu Bruch ging. Die Versicherung der Fluglinie ersetzt euch den Schaden (jedenfalls bis 100€).

Allerdings war diese Vase von einem Trödelmarkt – ihr habt leider keine Quittung.

Lustigerweise ist einer unbekannten, anderen Person genau dasselbe passiert. Gleicher Markt, gleiche Vase, gleiches Flugzeug, ergo gleicher Scherbenhaufen.

Ihr kommt aus dem Urlaub wieder, steigt aus dem Flugzeug, und müsst feststellen, dass beim Beladen des Fliegers eure frisch erfeilschte antike Nippes-Vase zu Bruch ging. Die Versicherung der Fluglinie ersetzt euch den Schaden (jedenfalls bis 100€).

Allerdings war diese Vase von einem Trödelmarkt – ihr habt leider keine Quittung.

Lustigerweise ist einer unbekannten, anderen Person genau dasselbe passiert. Gleicher Markt, gleiche Vase, gleiches Flugzeug, ergo gleicher Scherbenhaufen.

Die Versicherung versucht, den wahren Wert der Vase herauszufinden:

Dazu nennt jeder den Wert der Vase (eine Zahl zwischen 2€ und 100€).

- Sind die Angaben gleich, so zahlt die Versicherung beiden diesen Preis aus.
- Sind die Angaben unterschiedlich, so geht die Versicherung davon aus, dass die niedrigere Zahl (X) als Preis stimmt. Die „ehrliche" Person erhält als Belohnung $(X + 2)$€, der andere für seinen Betrugsversuch entsprechend weniger, $(X - 2)$€.

Welches Verhalten ist sinnvoll?

weygandt@math.fu-berlin.de

Pareto-Optimum

Ein alternative „erstrebenswerte Situation“ stellt das Pareto-Optimum dar:

Definition:
„Wir bezeichnen eine Situation als *Pareto-optimal*, wenn kein Spieler mehr verbessert werden kann – oder dies nur auf Kosten eines anderen Spielers geschieht.“

Pareto-Optimum

Ein alternative „erstrebenswerte Situation“ stellt das Pareto-Optimum dar:

Definition:
„Wir bezeichnen eine Situation als *Pareto-optimal*, wenn kein Spieler mehr verbessert werden kann – oder dies nur auf Kosten eines anderen Spielers geschieht.“

Insbesondere lohnt die Betrachtung in Situationen, bei denen sich das Nash-Gleichgewicht als (für die Spieler) ungünstig herausstellt.

Pareto-Optimum

Freie Universität Berlin

Ein alternative „erstrebenswerte Situation“ stellt das Pareto-Optimum dar:

Definition:
„Wir bezeichnen eine Situation als *Pareto-optimal*, wenn kein Spieler mehr verbessert werden kann – oder dies nur auf Kosten eines anderen Spielers geschieht.“

Insbesondere lohnt die Betrachtung in Situationen, bei denen sich das Nash-Gleichgewicht als (für die Spieler) ungünstig herausstellt.

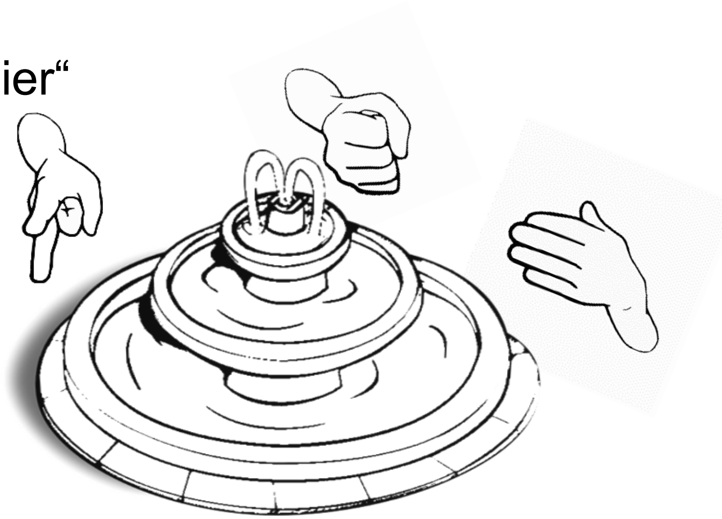
Beispiele:

Beim Gefangenendilemma ist jede Situation ein Pareto-Optimum – außer dem beidseitigen Verrat „GESTEHEN-GESTEHEN“. (Hier kann die Situation der beiden Spieler von je 6 Jahren auf 1 Jahr Gefängnis verbessert werden – ohne, dass einer dabei schlechter dasteht also zuvor.)

Beim Urlauber-Dilemma sind 100–100, 99–100 und 100–99 pareto-optimal.

weygandt@math.fu-berlin.de

Schere-Stein-Papier – und Brunnen!?



Bestimmt habt ihr schon einmal „Schere, Stein, Papier“ mit Brunnen gespielt…

Warum schlägt man sowas vor?

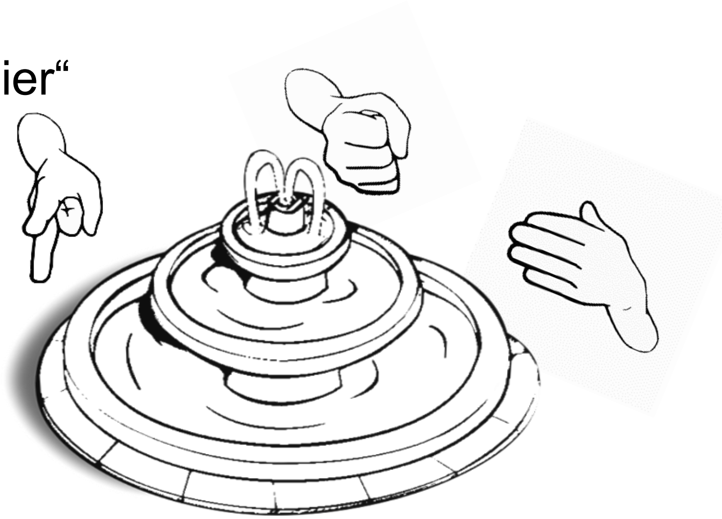
Bisher war die Auszahlungsmatrix ausgeglichen, (jeder gewinnt mal, jeder verliert mal):

			
	0 0	+1 -1	-1 +1
	-1 +1	0 0	+1 -1
	+1 -1	-1 +1	0 0

Schere-Stein-Papier – und Brunnen!?

Bestimmt habt ihr schon einmal „Schere, Stein, Papier“ mit Brunnen gespielt…

Warum schlägt man sowas vor?

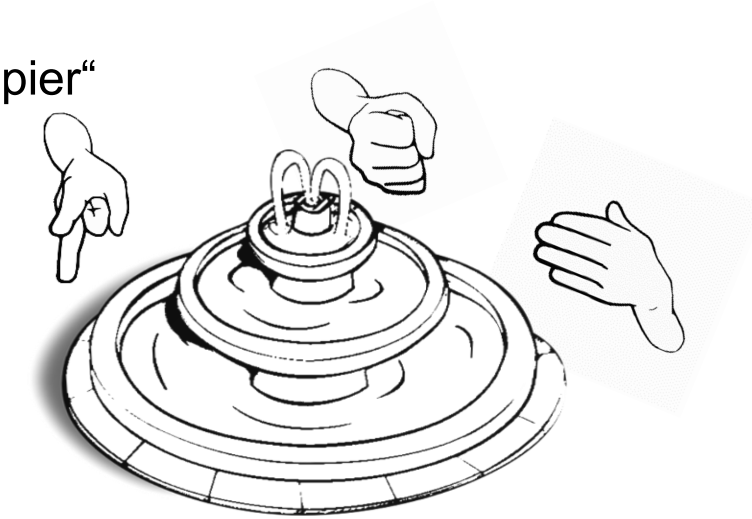


Bisher war die Auszahlungsmatrix ausgeglichen, (jeder gewinnt mal, jeder verliert mal):

			
	0 0	+1 -1	-1 +1
	-1 +1	0 0	+1 -1
	+1 -1	-1 +1	0 0

Hier gibt es übrigens kein Nash-Gleichgewicht – und jede Situation ist Pareto-optimal!

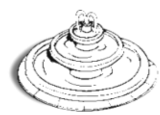
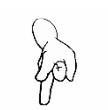
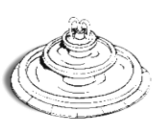
Schere-Stein-Papier – und Brunnen!?



Bestimmt habt ihr schon einmal „Schere, Stein, Papier“ mit Brunnen gespielt…

Warum schlägt man sowas vor?

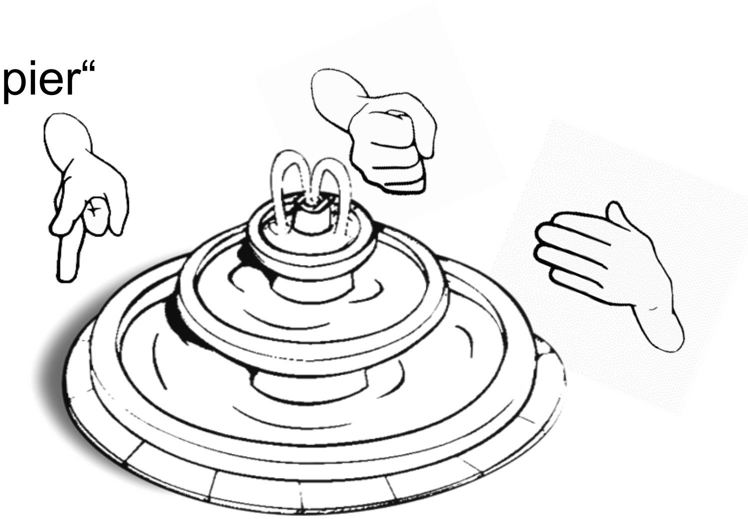
Nun betrachten wir die neue Auszahlungsmatrix:

				
	0 0	+1 -1	-1 +1	+1 -1
	-1 +1	0 0	+1 -1	+1 -1
	+1 -1	-1 +1	0 0	-1 +1
	-1 +1	-1 +1	+1 -1	0 0

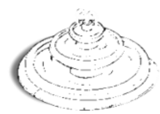
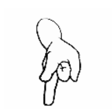
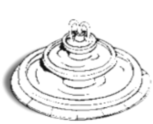
Schere-Stein-Papier – und Brunnen!?

Bestimmt habt ihr schon einmal „Schere, Stein, Papier“ mit Brunnen gespielt…

Warum schlägt man sowas vor?



Nun betrachten wir die neue Auszahlungsmatrix:

				
	0 0	+1 -1	-1 +1	+1 -1
	-1 +1	0 0	+1 -1	+1 -1
	= +1 -1	> -1 +1	= 0 0	> -1 +1
	-1 +1	-1 +1	+1 -1	0 0

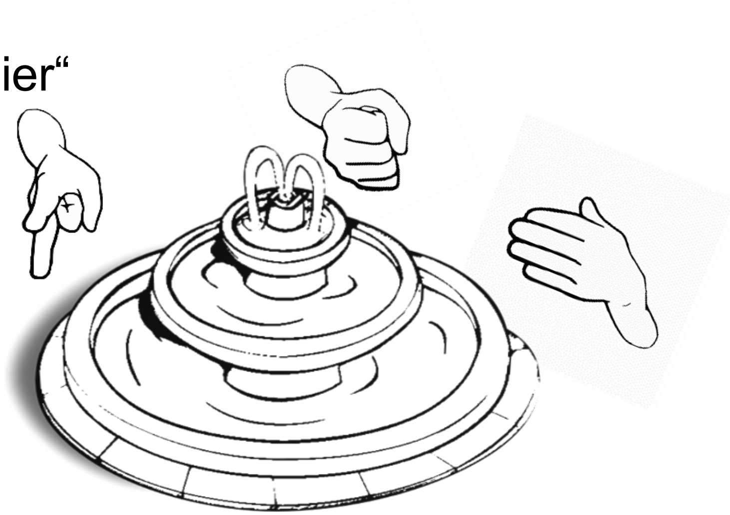
weygandt@math.fu-berlin.de

Schere-Stein-Papier – und Brunnen!?

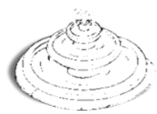
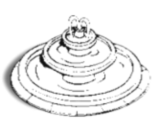
Freie Universität Berlin

Bestimmt habt ihr schon einmal „Schere, Stein, Papier“ mit Brunnen gespielt…

Warum schlägt man sowas vor?



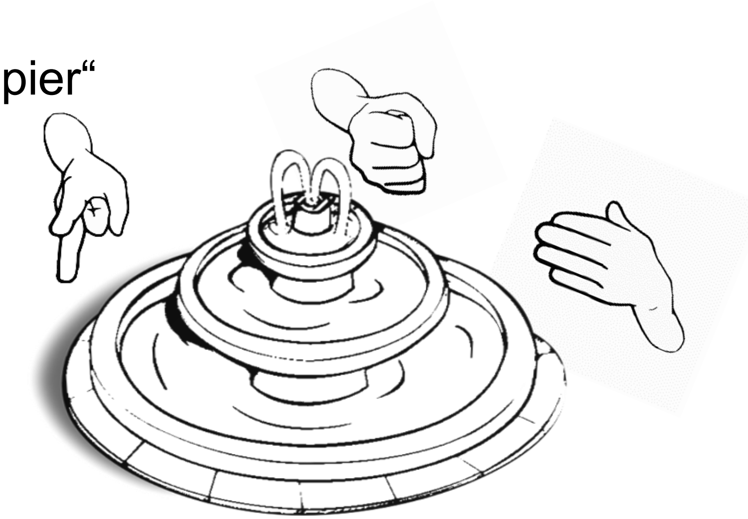
Nun betrachten wir die neue Auszahlungsmatrix:

				
	0 0	+1 -1	-1 +1	+1 -1
	-1 +1	0 0	+1 -1	+1 -1
	+1 -1	-1 +1	0 0	-1 +1
	-1 +1	-1 +1	+1 -1	0 0

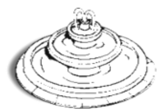
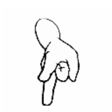
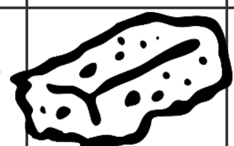
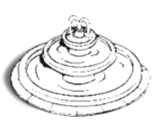
Schere-Stein-Papier – und Brunnen!?

Bestimmt habt ihr schon einmal „Schere, Stein, Papier“ mit Brunnen gespielt…

Warum schlägt man sowas vor?



Nun betrachten wir die neue Auszahlungsmatrix:

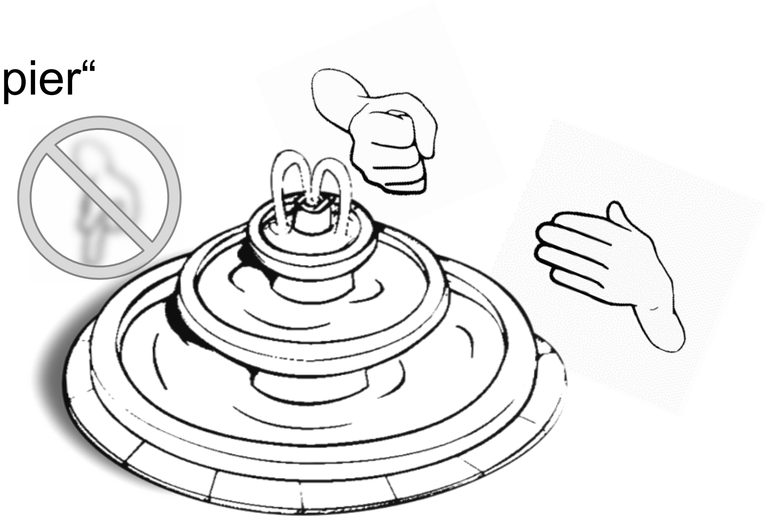
				
	0 0	+1 -1	-1 +1	+1 -1
	-1 +1		+1 -1	+1 -1
	+1 -1	-1 +1	0 0	-1 +1
	-1 +1	-1 +1	+1 -1	0 0

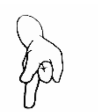
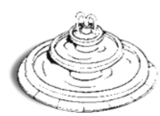
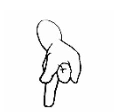
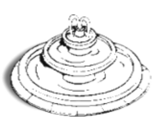
Nachdem Brunnen eine dominante Strategie für Stein ist, spielen wir Stein von nun an nicht mehr.

Schere-Stein-Papier – und Brunnen!?

Bestimmt habt ihr schon einmal „Schere, Stein, Papier“ mit Brunnen gespielt…

Warum schlägt man sowas vor?



				
	0 0		-1 +1	+1 -1
	+1 -1		0 0	-1 +1
	-1 +1		+1 -1	0 0

Nachdem Brunnen eine dominante Strategie für Stein ist, spielen wir Stein von nun an nicht mehr.

Als Ergebnis erhalten wir das (neue) Spiel Schere, Brunnen, Papier:

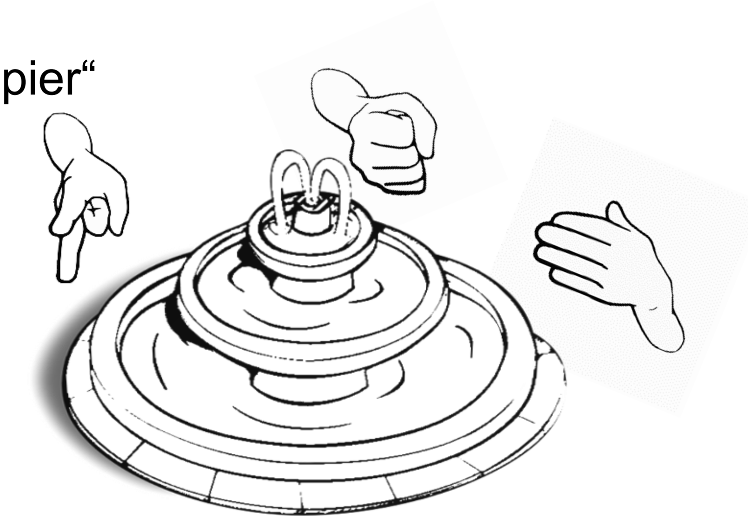
Jeder gewinnt mal, jeder verliert mal, und nichts ändert sich…

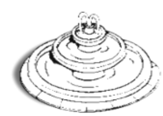
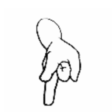
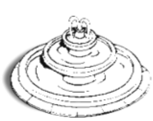
(solange Mathematikerinnen gegeneinander spielen!)

Schere-Stein-Papier – und Brunnen!?

Bestimmt habt ihr schon einmal „Schere, Stein, Papier“ mit Brunnen gespielt…

Warum schlägt man sowas vor?



				
	0 0		-1 +1	+1 -1
				
	+1 -1		0 0	-1 +1
	-1 +1		+1 -1	0 0

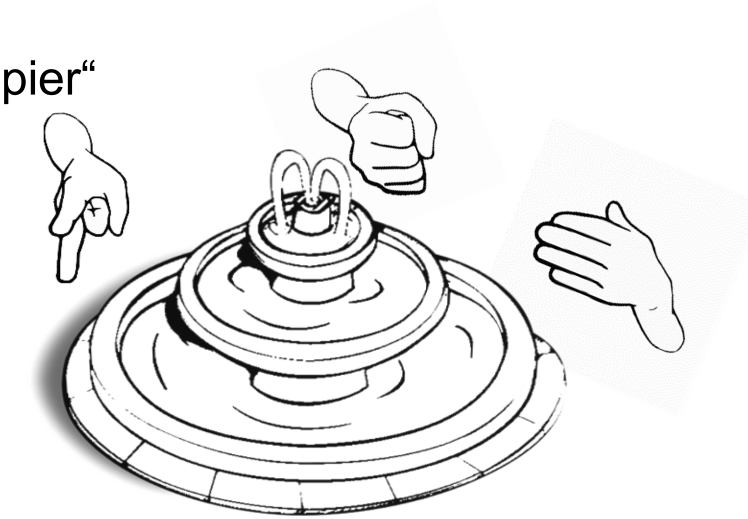
Was hat uns das nun gebracht?

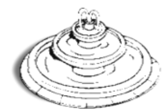
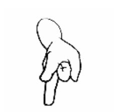
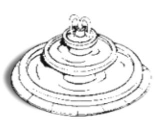
Irgendeinen Zweck muss der Brunnen doch erfüllen…

Schere-Stein-Papier – und Brunnen!?

Bestimmt habt ihr schon einmal „Schere, Stein, Papier“ mit Brunnen gespielt…

Warum schlägt man sowas vor?



				
	0 0		-1 +1	+1 -1
				
	+1 -1		0 0	-1 +1
	-1 +1		+1 -1	0 0

Was hat uns das nun gebracht?

Irgendeinen Zweck muss der Brunnen doch erfüllen…

Wir können unserem mathematisch-ahnungslosen Gegenüber das Spiel mit Brunnen vorschlagen.

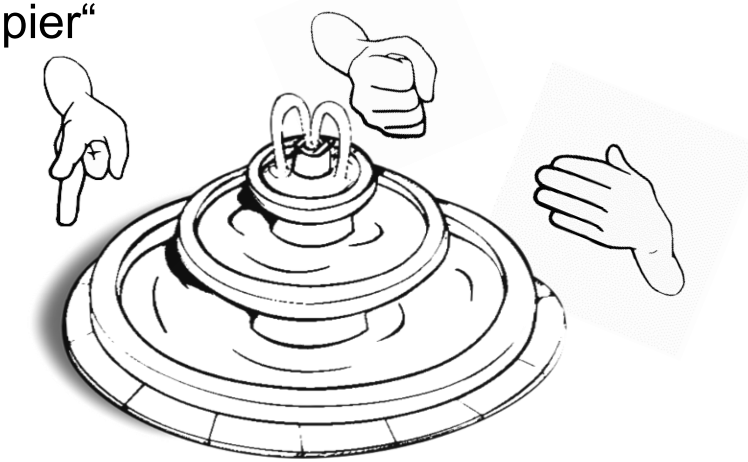
(Dafür eignen sich eure kleinen Geschwister!)

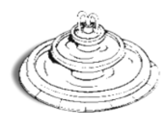
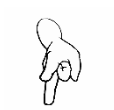
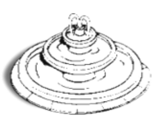
BENEDIKT WEYGANDT
weygandt@math.fu-berlin.de

Schere-Stein-Papier – und Brunnen!?

Bestimmt habt ihr schon einmal „Schere, Stein, Papier“ mit Brunnen gespielt…

Warum schlägt man sowas vor?



				
	0 0		-1 +1	+1 -1
				
	+1 -1		0 0	-1 +1
	-1 +1		+1 -1	0 0

Was hat uns das nun gebracht?

Irgendeinen Zweck muss der Brunnen doch erfüllen…

Wir können unserem mathematisch-ahnungslosen Gegenüber das Spiel mit Brunnen vorschlagen.

(Dafür eignen sich eure kleinen Geschwister!)

Dann spielen wir die Strategie $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ und freuen uns über jeden „Stein“!

Aus Eins mach Zwei

Die Analyse von Auktionen ist ein Teilbereich der Spieltheorie. Hier hat jede der *n* Personen als wählbare Optionen ihren bei der Auktion gemachten Einsatz.

Nun suche ich zwei Freiwillige, die einen Euro ersteigern wollen!

Hauptgewinn (Abb. ähnlich)

Aus Eins mach Zwei

Die Analyse von Auktionen ist ein Teilbereich der Spieltheorie. Hier hat jede der *n* Personen als wählbare Optionen ihren bei der Auktion gemachten Einsatz.

Nun suche ich zwei Freiwillige, die einen Euro ersteigern wollen!

Die Regeln dieser Auktion lauten:

- Die oder der Höchstbietende erhält den Preis (1€).
- Es wird abwechselnd und sequentiell geboten.
- Das Mindestgebot beträgt $\frac{1}{100}$ € (und man kann auch nur in ganzzahligen Centbeträgen bieten).
- Jeder zahlt sein oder ihr letztes Gebot.

Hauptgewinn (Abb. ähnlich)

Aus Eins mach Zwei

Die Analyse von Auktionen ist ein Teilbereich der Spieltheorie. Hier hat jede der *n* Personen als wählbare Optionen ihren bei der Auktion gemachten Einsatz.

Nun suche ich zwei Freiwillige, die einen Euro ersteigern wollen!

Die Regeln dieser Auktion lauten:

- Die oder der Höchstbietende erhält den Preis (1€).
- Es wird abwechselnd und sequentiell geboten.
- Das Mindestgebot beträgt $\frac{1}{100}$ € (und man kann auch nur in ganzzahligen Centbeträgen bieten).
- Jeder zahlt sein oder ihr letztes Gebot.

Hauptgewinn (Abb. ähnlich)

Moral: Centauktionen im Internet lohnen sich *ausschließlich* für die Verkäuferin.

War‘s das?

Freie Universität Berlin

Spieltheorie ist noch viel mehr… aber in einer halben Stunde kann man nur einen ersten Eindruck gewinnen. Tatsächlich kann man sich auch 40 Stunden lang mit Spieltheorie beschäftigen, ohne dass es langweilig wird.

mehr unter *hsaka.de* ⟶ „Dokumentation der Hessischen Schülerakademie 2015“
(Mathematikkurs zur Spieltheorie mit weiteren Spielen & Anregungen für Lehrkräfte)

DANKE

an die ca. 427.953 beteiligten Helferinnen und Helfer, die diesen Tag organisieren!

Noch Fragen?

Zusammenfassung für Generation Z:

#nettsein

#aufdemFahrradentwedernachrechtsodernachlinksausweichen

#aufdemBasarandieQuittungdenken

#SchereSteinPapiermitBrunnennurgegenGeschwisterspielen

#nichtaufCentauktionenimNetzreinfallen

weygandt@math.fu-berlin.de

Zugabe

Onkel Dagobert hat seinen spendablen Tag ($\widehat{=}$ den Verstand verloren).

Er bietet Tick, Trick und Track an, ihr Erspartes (je 30 Taler) zu vermehren:

- Jeder der drei kann in Onkel Dagoberts Sparschwein einzahlen.
- Der eingezahlte Betrag wird von ihm verdoppelt.
- Die verdoppelte Summe wird gleichmäßig an alle drei ausgezahlt.

Zugabe

Onkel Dagobert hat seinen spendablen Tag ($\widehat{=}$ den Verstand verloren).

Er bietet Tick, Trick und Track an, ihr Erspartes (je 30 Taler) zu vermehren:

- Jeder der drei kann in Onkel Dagoberts Sparschwein einzahlen.
- Der eingezahlte Betrag wird von ihm verdoppelt.
- Die verdoppelte Summe wird gleichmäßig an alle drei ausgezahlt.

Zahlen alle drei alles ein, so erhält jeder $\frac{(30+30+30)\cdot 2}{3} = 60$ Taler.

weygandt@math.fu-berlin.de

Zugabe

Onkel Dagobert hat seinen spendablen Tag ($\widehat{=}$ den Verstand verloren).

Er bietet Tick, Trick und Track an, ihr Erspartes (je 30 Taler) zu vermehren:

- Jeder der drei kann in Onkel Dagoberts Sparschwein einzahlen.
- Der eingezahlte Betrag wird von ihm verdoppelt.
- Die verdoppelte Summe wird gleichmäßig an alle drei ausgezahlt.

Zahlen alle drei alles ein, so erhält jeder $\frac{(30+30+30)\cdot 2}{3} = 60$ Taler.

- Jedoch kann Tick profitieren, indem er nichts einzahlt (d.h. seine 30 Taler behält).

  Dann hat er am Ende $30 + \frac{(0+30+30)\cdot 2}{3} = 70$ Taler, also 10 Taler mehr.

Zugabe

Onkel Dagobert hat seinen spendablen Tag ($\widehat{=}$ den Verstand verloren).

Er bietet Tick, Trick und Track an, ihr Erspartes (je 30 Taler) zu vermehren:

- Jeder der drei kann in Onkel Dagoberts Sparschwein einzahlen.
- Der eingezahlte Betrag wird von ihm verdoppelt.
- Die verdoppelte Summe wird gleichmäßig an alle drei ausgezahlt.

Zahlen alle drei alles ein, so erhält jeder $\frac{(30+30+30)\cdot 2}{3} = 60$ Taler.

- Jedoch kann Tick profitieren, indem er nichts einzahlt (d.h. seine 30 Taler behält).

  Dann hat er am Ende $30 + \frac{(0+30+30)\cdot 2}{3} = 70$ Taler, also 10 Taler mehr.
- Macht das jeder, so muss Dagobert überhaupt nichts verdoppeln (überrascht?).

  (Dieser Zustand ist übrigens ein Nash-Gleichgewicht, und Dagobert weiß das: Wenn ich das Ergebnis sehe, kann ich meine eigene Auszahlung immer erhöhen, wenn ich weniger einzahle – außer, ich habe bereits nichts eingezahlt.)

Zugabe

Onkel Dagobert hat seinen spendablen Tag ($\widehat{=}$ den Verstand verloren).
Er bietet Tick, Trick und Track an, ihr Erspartes (je 30 Taler) zu vermehren:

- Jeder der drei kann in Onkel Dagoberts Sparschwein einzahlen.
- Der eingezahlte Betrag wird von ihm verdoppelt.
- Die verdoppelte Summe wird gleichmäßig an alle drei ausgezahlt.

Zahlen alle drei alles ein, so erhält jeder $\frac{(30+30+30)\cdot 2}{3} = 60$ Taler.

- Jedoch kann Tick profitieren, indem er nichts einzahlt (d.h. seine 30 Taler behält).

  Dann hat er am Ende $30 + \frac{(0+30+30)\cdot 2}{3} = 70$ Taler, also 10 Taler mehr.
- Macht das jeder, so muss Dagobert überhaupt nichts verdoppeln (überrascht?).

  (Dieser Zustand ist übrigens ein Nash-Gleichgewicht, und Dagobert weiß das: Wenn ich das Ergebnis sehe, kann ich meine eigene Auszahlung immer erhöhen, wenn ich weniger einzahle – außer, ich habe bereits nichts eingezahlt.)

Moral: Steuerhinterziehung lohnt sich nicht mehr, wenn alle hinterziehen.
Der Einzelne kann zwar die Gesellschaft hintergehen und sich an ihr bereichern, allerdings muss er darauf hoffen, dass die anderen treudoof einzahlen…

Das war‘s!

Spieltheorie ist noch viel mehr… aber in einer halben Stunde kann man nur einen ersten Eindruck gewinnen. Tatsächlich kann man sich auch 40 Stunden lang mit Spieltheorie beschäftigen, ohne dass es langweilig wird.

mehr unter *hsaka.de* ⟶ „Dokumentation der Hessischen Schülerakademie 2015“
(Mathematikkurs zur Spieltheorie mit weiteren Spielen & Anregungen für Lehrkräfte)

DANKE

an die ca. 427.953 beteiligten Helferinnen und Helfer, die diesen Tag organisieren!

Noch Fragen?

Zusammenfassung für Generation Z:

#nettsein

#aufdemFahrradentwedernachrechtsodernachlinksausweichen

#aufdemBasarandieQuittungdenken

#ScheresteinPapiermitBrunnennurgegenGeschwisterspielen

#nichtaufCentauktionenimNetzreinfallen

#Steuererklärungabgeben

Bildquelle fast aller Grafiken: pixabay.com

weygandt@math.fu-berlin.de