

Dynamotheorie

Vorlesung im Rahmen des Graduiertenkollegs

'Nichtlineare Differentialgleichungen:
Modellierung, Theorie, Numerik, Visualisierung'

Universität Freiburg

WS 1997-1998

Mathieu Ossendrijver

Kiepenheuer-Institut für Sonnenphysik

Inhaltsverzeichnis

-1 Literaturhinweis	iv
0 Identitäten und Abkürzungen	v
0.1 Vektoridentitäten und Theoreme der Integration	v
0.2 Abkürzungen	v
1 Magnetfeld von Sonne und Erde	1
1.1 Magnetfeld der Sonne	1
1.2 Magnetfeld der Erde	4
2 Magnetohydrodynamik und das Dynamoproblem	7
2.1 Von den Maxwellgleichungen zur MHD	7
2.2 Definition des Dynamoproblems	9
3 Scheibendynamo	10
3.1 Kinematisch	10
3.2 Dynamisch	11
4 Grundlagen der MHD	14
4.1 Diffusion und magnetische Reynoldszahl	14
4.2 Magnetischer Fluss	15
4.3 Die Energiegleichung	16
4.4 Toroidale und poloidale Vektoren	17
5 (Anti)dynamotheoreme	19
5.1 Mindestforderung für Dynamowirkung	19
5.2 Cowling-Theorem	21
5.3 Cowling-Theorem (2)	23
5.4 Toroidaltheorem	24
5.5 Dipolmoment des Dynamos	26
6 Fast dynamos	29
6.1 Schnelle und langsame Dynamos	29
6.2 Der <i>stretch-twist-fold</i> -Mechanismus	29
6.3 Exponentielle Streckung	30
6.4 Beispiele	31
6.4.1 Beltramiwelle	31
6.4.2 MW+ Strömung	32
6.5 Abbildungen	33
6.6 Nichtexistenz glatter instabiler Lösungen in der idealen MHD	35
7 Statistische Dynamotheorie	37
7.1 Reynolds-Regeln und Mittelung der Induktionsgleichung	37
7.2 Räumliche Mittelung	37
7.3 Ensemblemittelung	41
7.3.1 Stochastische Differentialgleichungen	41
7.3.2 Dynamogleichung, α -Effekt und turbulente Diffusivität	43
7.4 Korrekturen zur MF-Dynamotheorie	46
7.5 Ergebnisse der MF-Dynamotheorie	48
7.5.1 Flache MF-Dynamos: Parkerwelle	48
7.5.2 Spherische MF-Dynamos	52
7.6 Nichtlineare MF-Dynamos	56
7.6.1 α -Quenching	57
7.6.2 Dynamisches Ω -Quenching	59
7.6.3 Flusseruption	62
8 MHD-Turbulenz	64
8.1 Hydrodynamische Turbulenz	64
8.2 MHD-Turbulenz	66

9	Sonnendynamo	70
9.1	Ort des Sonnendynamos	70
9.2	Zwei-Schichten-Dynamo	71
9.3	Flussröhrendynamo	72
9.4	Dynamowirkung in der solaren Konvektionsschicht	76
10	Erddynamo	81

-1 Literaturhinweis

Als Quelle für diese Vorlesung haben u.A. folgende Skripte gedient:

- P. Hoyng, *Plasma-astrofysica*, Universiteit van Amsterdam, 1994
- M. Schüssler, *Die Entstehung kosmischer Magnetfelder I-III*, Universität Göttingen, WS 1979/80–WS 1980/81
- M. Schüssler und D. Schmitt, *Dynamotheorie*, Universität Göttingen, SS 1997
- M. Stix, *Dynamo-Theorie*, Universität Tübingen, WS 1977/78

Dynamotheorie wird ausführlich behandelt in folgenden Büchern:

- Krause, F. und Rädler, K.-H., 1980, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*, Pergamon Press (*Krause und Rädler*)
- Moffatt, H.K., 1978, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, Cambridge (*Moffatt*)
- Proctor, M.R.E. und Gilbert, A.D. (Her.), 1994, *Lectures on Solar and Planetary Dynamos*, Cambridge University Press (*Lectures*)
- Roberts, P.H., 1967, *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Longman, London (*Roberts*)

Zu den einzelnen Kapiteln seien auch erwähnt

- 1.1 Merrill, R.T. und McElhinny M.W., 1983, *The Earth's Magnetic Field*, Academic Press (neuer verbesserter Druck: 1989)
- 1.2 Stix, M., 1989, *The Sun, An Introduction*, Springer-Verlag
 - 2 Jackson, J.D., 1975, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Kapitel 10 (*Jackson*)
 - 6 Childress, S. und Gilbert, A.D., 1995, *Stretch, Twist, Fold: The Fast Dynamo*, Springer-Verlag (*Stretch, Twist, Fold*)
 - 8 Biskamp, D., 1993, *Nonlinear Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press
- 10 Ghil, M. und Childress, S., 1987, *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory, and Climate Dynamics*, Applied Mathematical Sciences **60**, Springer-Verlag, Kapitel 7-9.

0 Identitäten und Abkürzungen

0.1 Vektoridentitäten und Theoreme der Integration

Folgende Vektoridentitäten und Theoreme der Integration werden oft gebraucht (Quelle: *Jackson*):

$$\text{J1) } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\text{J2) } \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

$$\text{J3) } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

$$\text{J4) } \nabla \times \nabla \psi = 0$$

$$\text{J5) } \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$$

$$\text{J7) } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

$$\text{J8) } \nabla \times \psi \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{a}$$

$$\text{J9) } \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

$$\text{J10) } \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$$

$$\text{J11) } \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$$

Sei V ein Volumen mit Rand S , dessen Normalvektor \mathbf{n} nach aussen gerichtet ist, dann gilt

$$\text{J12) } \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{A} = \int_S dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \text{ (Gauss)}$$

Sei S eine offene Oberfläche mit Normalvektor \mathbf{n} und Rand \mathcal{C} , wobei ein Linienintegral entlang \mathcal{C} rechtshändig bezüglich \mathbf{n} orientiert sei. Dann gilt

$$\text{J13) } \int_S dS \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} \text{ (Stokes).}$$

0.2 Abkürzungen

A&A	<i>Astronomy and Astrophysics</i>
ApJ	<i>Astrophysical Journal</i>
EMK	Elektromotorische Kraft
FD	Fast Dynamo
FOSA	First Order Smoothing Approximation
GAFD	<i>Geophysical Astrophysical Fluid Dynamics</i>
KS	Konvektionsschicht
MF	Mean Field
MNRAS	<i>Monthly Notices of the Royal Astronomical Society</i>
OS	Overshootschicht

1 Magnetfeld von Sonne und Erde

1.1 Magnetfeld der Sonne

- 1) Das Magnetfeld (B) in der Sonne ist nicht direkt messbar; auf der Sonnenoberfläche ist B sehr unregelmässig verteilt: während eines Sonnenmaximums ist $B \approx 0.1$ T in $\lesssim 1\%$ der Oberfläche (Flecken + *network* = Muster bestehend aus magnetischen Elementen (Flussröhren) entlang die Grenzen der Granulation) und $B \lesssim 10^{-4}$ T auf der übrigen Oberfläche;
- 2) Die Häufigkeit der Sonnenflecken variiert zyklisch mit einer Periode von etwa 11.1 Jahren, auch Schwabe-Zyklus genannt (Entdecker: der Apotheker Heinrich Samuel Schwabe in 1843¹) (Abb. 1; aus Kippenhahn 1994²). Nach jedem Schwabe-Zyklus kehrt die Polarität des Feldes um; so entsteht der 22.2-jährige magnetische Zyklus (auch Hale-Zyklus genannt).

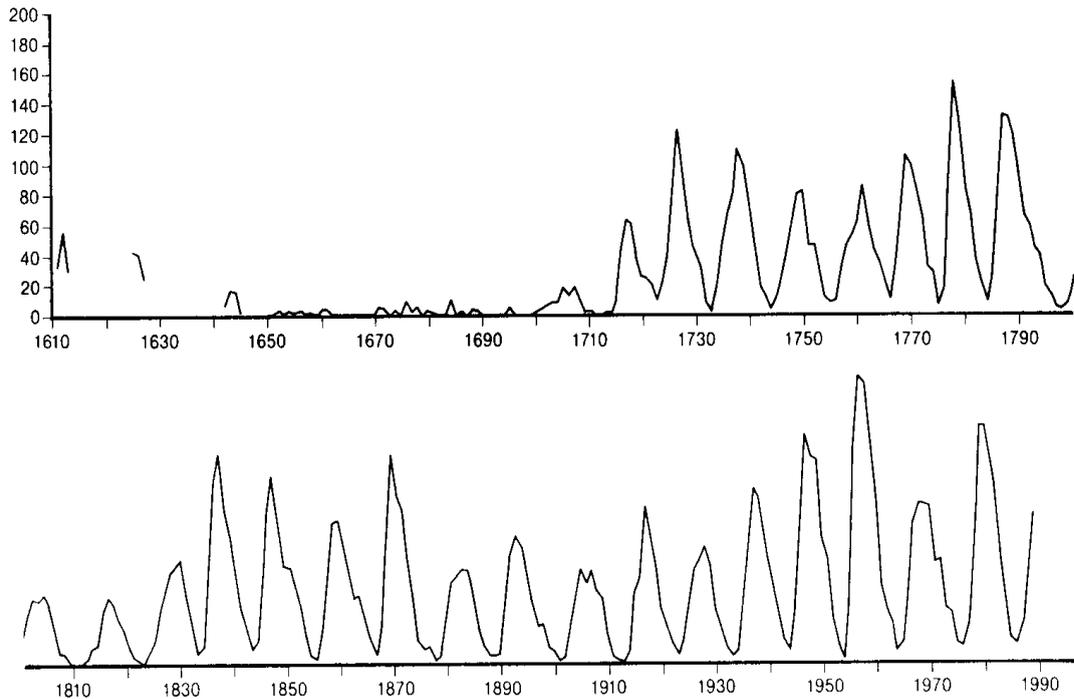


Abbildung 1: Jährliche Sonnenfleckenzahl R (Kippenhahn 1994)

- 3) Schmetterlingsdiagramm (Abb. 2; aus Zirin³): Sonnenflecken sind verteilt in zwei Gürteln entlang den Äquator, die während des Zyklus zuerst breiter und dann schmaler werden, wobei die mittlere Breite der Flecken sich zum Äquator bewegt (Breitenwanderung der Sonnenaktivität).
- 4) Hale'sche Gesetze: Sonnenflecken treten meistens in bipolaren Paaren auf, wobei die führenden Flecke (bez. der Rotation) auf jeder Halbkugel fast ausnahmslos die gleiche Polarität haben aber eine unterschiedliche für N und S. Joy'sche Gesetz: die Achse zwischen den beiden Flecken eines bipolaren Paares macht einen kleinen Winkel mit dem Äquator von etwa 10° , leicht abhängig von der Breite und von der Phase des Zyklus (Abb. 3; aus Hoyng 1992⁴).
- 5) Amplitude (R = Sonnenfleckenzahl) und Zyklusdauer (P) der magnetischen Sonnenaktivität variieren (R bis zu $\approx 100\%$; P bis zu $\approx 10\%$) und sind schwach antikorreliert.

¹Schwabe, H.S., 1843, *Astron. Nachr.* **20**

²Kippenhahn, R., 1994, *Discovering the Secrets of the Sun*, John Wiley & Sons, Chichester

³Zirin, H., 1989, *Astrophysics of the Sun*, Cambridge University Press

⁴Hoyng, P., 1992, in *The Sun, a Laboratory for Astrophysics*, J.T. Schmelz und J.C. Brown (Her.), Kluwer, 99-138

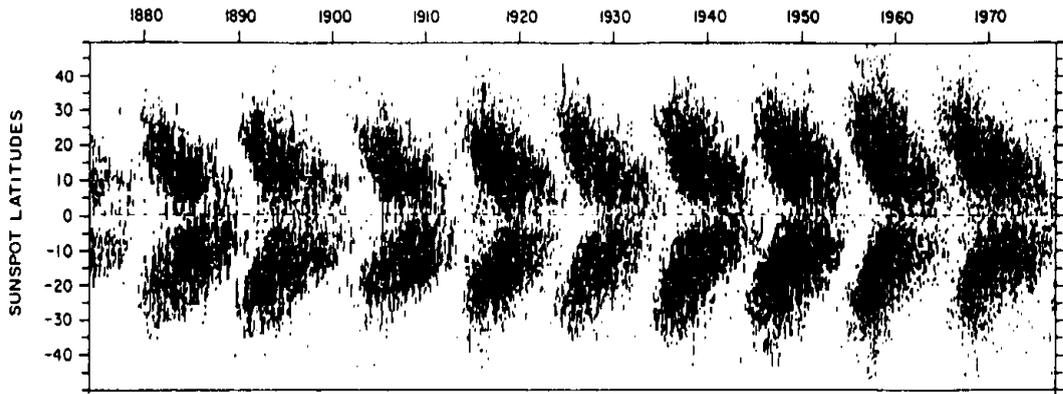


Abbildung 2: Schmetterlingsdiagramm (Zirin 1989)

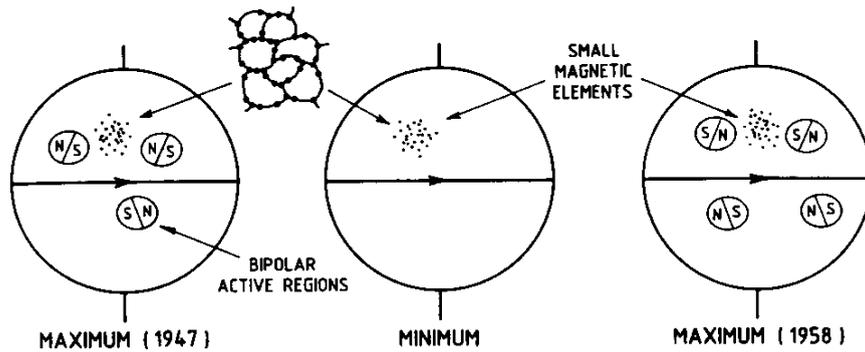


Abbildung 3: Bipolare Fleckenpaare; magnetisches *network*; Hale'sche Gesetze (Hoyng 1992)

- 6) Neben dieser gewöhnlichen Variabilität war die magnetische Aktivität auch manchmal sehr viel geringer, z.B. das *Maunderminimum* ($\approx 1645-1715$). Aus Messungen der B -korrelierten ^{14}C -Konzentration in datierbaren Holzproben geht hervor dass die Sonne sich vielleicht 20%-30% ihrer Zeit in einer solchen Phase (typische Dauer 100-300 Jahre) befunden hat⁵ (Abb. 4). Weil ^{14}C etwa 40 Jahre in der Erdatmosphäre bleibt bis es von Bäumen und Pflanzen aufgenommen wird, ist in der ^{14}C -Konzentration der 11-jährige Sonnenzyklus kaum wahrnehmbar, nur die langsamen Variationen. Die ^{10}Be -Konzentration in Eisschichten aus Grönland dagegen zeigt deutlich den Sonnenzyklus, weil ^{10}Be nur wenige Jahre in der Atmosphäre bleibt bis es in Niederschlägen den Erdboden erreicht⁶ (Abb. 5).
- 7) Eine Zerlegung des radialen Magnetfeldes auf der Sonnenoberfläche in Kugelfunktionen,

$$B_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell}^m(t) Y_{\ell}^m(\theta, \phi), \quad (1)$$

(Abb. 6; aus Stenflo und Gödel 1988⁷) zeigt dass

- antisymmetrische Modes (bez. des Äquators; ℓ ungerade) viel stärker sind als symmetrische (ℓ gerade), was vielleicht nur eine Ausdrückung der strengen Einhaltung der Hale'schen Gesetze ist;
- die Feldkomponenten mit ℓ ungerade fast nur eine Periode von etwa 22 Jahren haben, während die Feldkomponenten mit ℓ gerade diese Periode kaum aufweisen (nicht zusammen mit dem Sonnenzyklus variieren).

⁵Stuiver, M. und Braziunas, T.F., 1988, in *Secular Solar and Geomagnetic Variations in the Last 10,000 Years*, Her. F.R. Stephenson und A.W. Wolfendale, NATO ASI 236, Kluwer, Dordrecht

⁶Beer, J. et al, 1994, in *The Sun as a Variable Star: Solar and Stellar Irradiance Variations*, Her. J.M. Pap, C. Fröhlich, H.S. Hudson und S.K. Solanki, Cambridge University Press, S. 291-350

⁷Stenflo, J.O., Gödel, M., 1988, A&A 191, 137-48

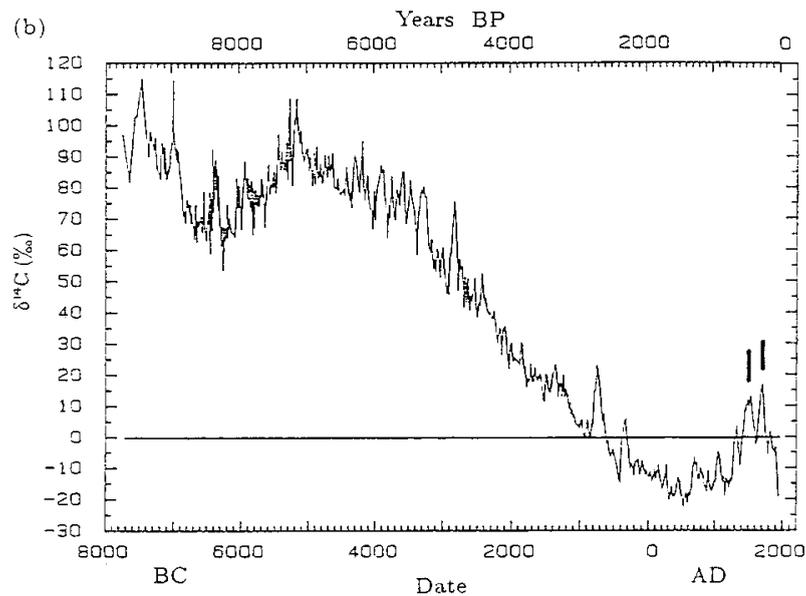


Abbildung 4: ^{14}C -Konzentration in organischem Material. Die rechts angedeuteten positiven Ausweichungen sind das Maunderminimum (rechts) und das Spörerminimum (links) (Stuiver und Braziunas 1988)

- 8) Magnetische Aktivität wird auch in sonnenähnlichen Sternen beobachtet (durch Intensitätsmessungen von B -korrelierten Spektrallinien⁸ (Abb. 7). Die wichtigsten Ergebnisse sind:
- In Hauptreihensternen (wie der Sonne) wird magnetische Aktivität nur beobachtet im Massenbereich wo stellare Modelle die Existenz einer konvektiven Schicht an der Sternoberfläche vorhersagen.
 - Man unterscheidet flache (F), langsam variierende (L), unregelmässige (U) und zyklische Aktivität (Z). Sterne der Klassen F, L, Z (darunter die Sonne) haben geringere Aktivität als die der Klasse U, rotieren vergleichsweise langsam und sind alt (Korrelation zwischen Alter, Rotation und Aktivitätslevel).
 - Die Periode der Z-Sterne ist typisch $P_{\text{Zyk}} \approx 7 - 20$ Jahre und ist schwach korreliert mit der *Rossby-Zahl* $\text{Ro} = P_{\text{rot}}/\tau_{\text{c}}$, das Verhältnis der Rotationsperiode und der konvektiven Turnoverzeit: $P_{\text{Zyk}} \propto \text{Ro}^{-1}$.

⁸Baliunas, S.L. *et al.*, 1995, *ApJ* **438**, 269

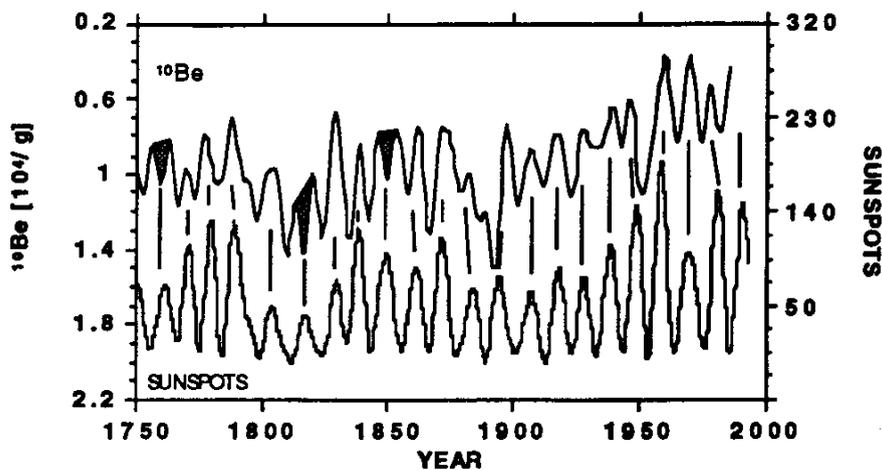


Abbildung 5: ^{10}Be -Konzentration in Eisschichten (Beer *et al* 1994)

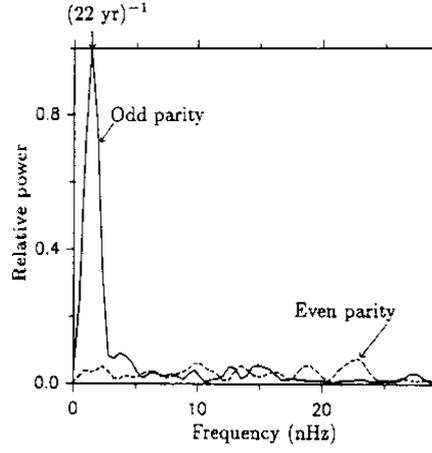


Abbildung 6: Zerlegung des radialen Magnetfeldes auf der Sonnenoberfläche in Kugelfunktionen (Stenflo und Gödel 1988)

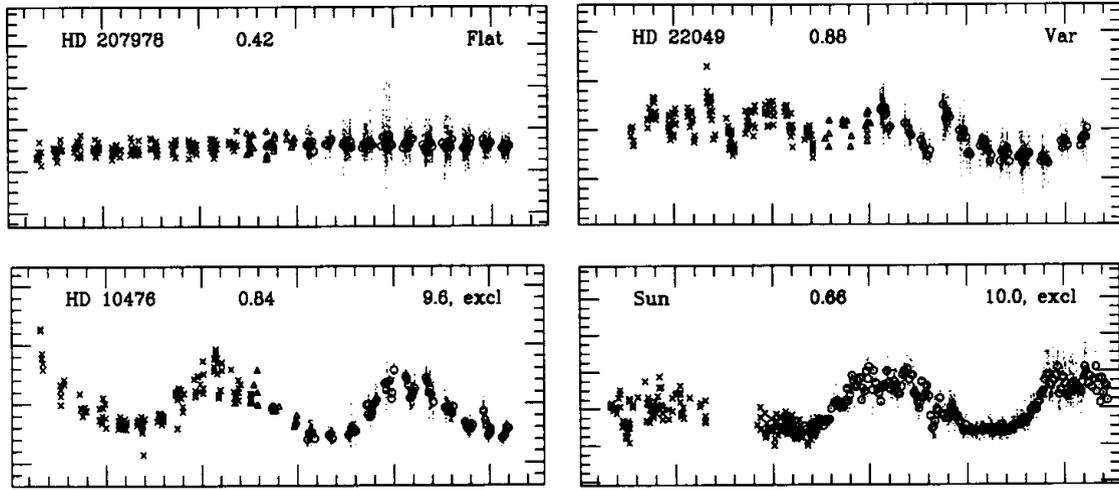


Abbildung 7: Magnetische Aktivität in sonnenähnlichen Sternen. Jede Abbildung enthält Sternennamen, Farbindex $B - V$ und eine Klassifizierung der Aktivitätskurve (Baliunas *et al* 1995)

1.2 Magnetfeld der Erde

- 1) Eine Zerlegung des Magnetfeldes auf der Erdoberfläche (wie ein Potentialfeld, d.h. definiert durch $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} = -\nabla\Psi$),

$$\Psi = R \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^{-\ell-1} \left\{ g_{\ell}^{m, \text{int}} \cos m\phi + h_{\ell}^{m, \text{int}} \sin m\phi \right\} + \left(\frac{r}{R} \right)^{\ell} \left\{ g_{\ell}^{m, \text{ext}} \cos m\phi + h_{\ell}^{m, \text{ext}} \sin m\phi \right\} \right] P_{\ell}^m(\cos \theta), \quad (2)$$

wo $R = 6400$ km der Erdradius ist, erlaubte zuerst Gauss (1838) festzustellen dass das Magnetfeld innerhalb der Erde erzeugt wird ($|g_{\ell}^{m, \text{int}}|, |h_{\ell}^{m, \text{int}}| \gg |g_{\ell}^{m, \text{ext}}|, |h_{\ell}^{m, \text{ext}}|$). Die Bestimmung dieser Koeffizienten durch Inversion erfordert Messungen der drei Feldkomponenten

$$\mathbf{B} = -\nabla\Psi \quad \Rightarrow \quad (B_r, B_{\theta}, B_{\phi}) = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\Psi}{\partial \phi} \right) \quad (3)$$

auf einer Anzahl von Orten, die abhängt vom höchsten Wert ℓ der noch bestimmt werden soll. Ab jetzt werden die Bezeichnungen 'ext' und 'int' weggelassen weil immer 'int' gemeint

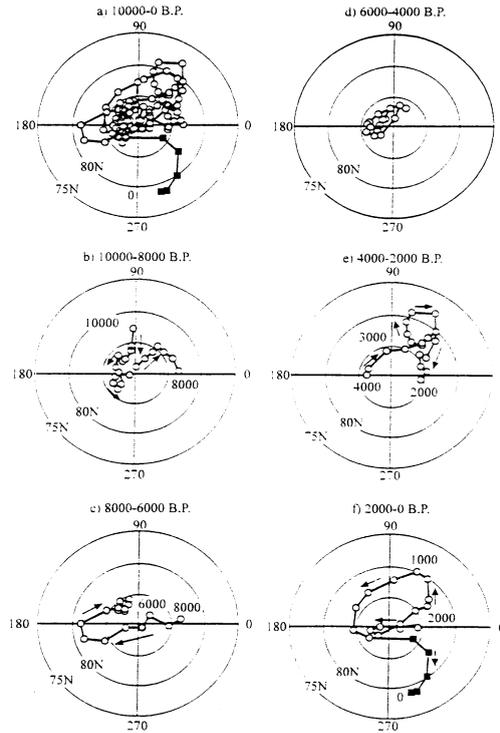


Abbildung 8: Ort des magnetischen Nordpols (Merrill und McElhinny 1989)

sein wird.

- 2) Das Magnetfeld auf der Erdoberfläche wird dominiert vom Dipolfeld ($\ell = 1$):
 $B_1(R) \approx 3 \cdot 10^{-5}$ T und $B_{\text{Rest}}(R) \approx 0.25 B_1$.
- 3) Das magnetische Dipolmoment der Erde \mathbf{m} wird definiert durch

$$\mathbf{B}_1 = -\nabla \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (r \geq R) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m} = R^3 \left(-g_1^1 \mathbf{e}_x - h_1^1 \mathbf{e}_y + g_1^0 \mathbf{e}_z \right) \quad (4)$$

(verwende $P_1^0(\theta) = \cos \theta$, $P_1^1(\theta) = -\sin \theta$ und $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \phi + \mathbf{e}_z \cos \theta$). Die Dipolkoeffizienten (gemessen in T) betragen in 1980

$$g_1^0 = -3.0 \cdot 10^{-5}; \quad g_1^1 = -1.95 \cdot 10^{-6}; \quad h_1^1 = 5.634 \cdot 10^{-6}. \quad (5)$$

Es folgt $m = |\mathbf{m}| \approx 8 \cdot 10^{22}$ A m². Die Dipolachse macht einen Winkel $\theta \approx 11^\circ$ mit der Rotationsachse $\boldsymbol{\Omega}$ ($\tan \theta = [(g_1^1)^2 + (h_1^1)^2]^{1/2} / g_1^0$). Beobachtungen bez. des Dipolmomentes:

- a) \mathbf{m} wandert ständig um die Rotationsachse, bleibt gemittelt aber parallel zu $\boldsymbol{\Omega}$ (Abb. 8). Auch der Betrag $|\mathbf{m}|$ variiert (z.B. -7% in den letzten 100 Jahren; siehe Abb. 9).
 - b) Umpolungen des Erdfeldes: innerhalb kurzer Zeit ($10^3 - 10^4$ Jahre) und auf unregelmässigen Zeiten (typisches Intervall zwischen zwei Umpolungen etwa $5 \cdot 10^5$ Jahre) verändert \mathbf{m} seine Orientierung um etwa 180° (siehe Abb. 10);
 - c) Das Nicht-Dipolfeld \mathbf{B}_{Rest} bewegt sich um 0.18° jährlich westwärts relativ zum Dipolfeld.
- 4) Die Erde besteht aus einem leitenden metallischen (hauptsächlich Fe) Kern (Radius 3500 km) und einem nicht-leitenden (hauptsächlich Si) Mantel (Dicke 2900 km). Der Kern besteht aus einem festen inneren Kern (Radius 1400 km) und einem flüssigen äusseren Kern (Dicke 2100 km). Rezente seismologische Messungen haben ergeben dass der innere Kern um etwa $2-3^\circ$ pro Jahr schneller dreht als der äussere Kern⁹.

⁹Song, X., Richards, P.G., 1996, *Nature* **382**, 221 und Su, W., Dziewonski, A.M., Jeanloz, R., 1996, *Science* **274**, 1883-7

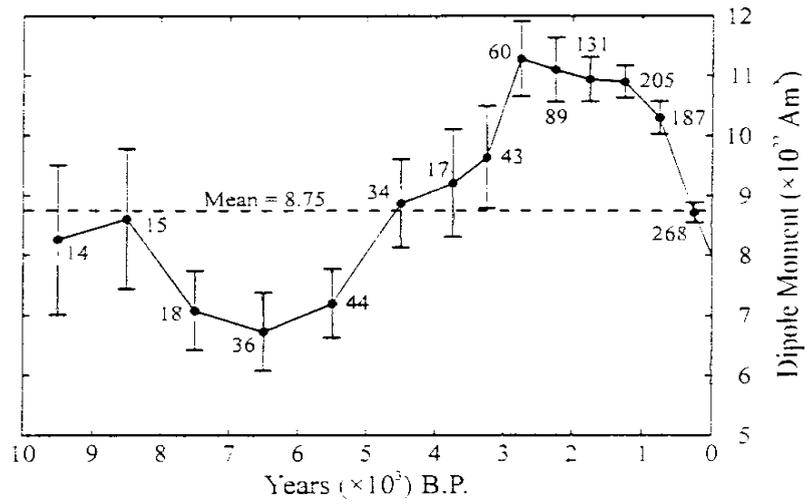


Abbildung 9: Dipolmoment $|\mathbf{m}|$ des Erdmagnetfeldes (Merrill und McElhinny 1989)

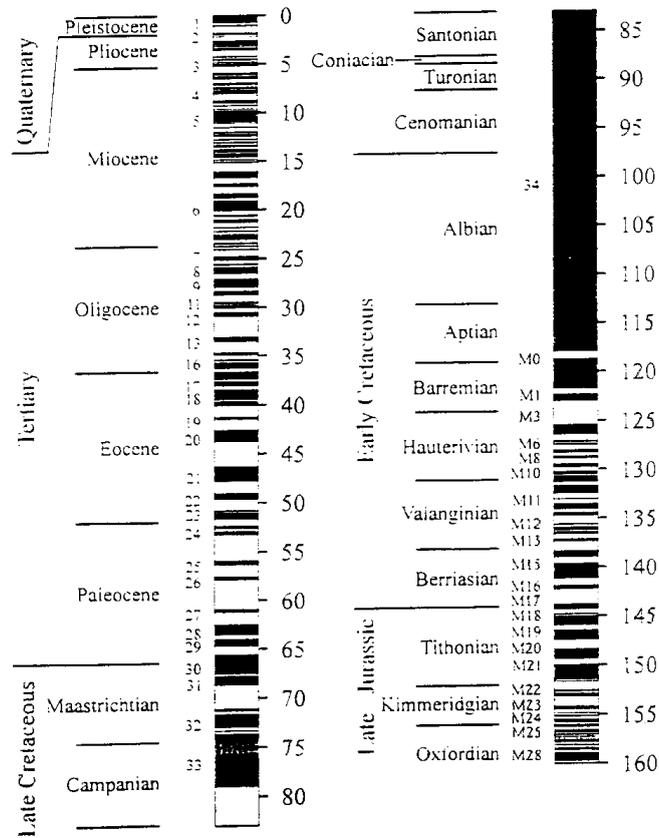


Abbildung 10: Polarität des Erdmagnetfeldes (Merrill und McElhinny 1989)

2 Magneto hydrodynamik und das Dynamoproblem

2.1 Von den Maxwellgleichungen zur MHD

Die Maxwellgleichungen für die elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} lauten in MKS-Einheiten:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell-Faraday}) \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell-Ampère}) \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = q/\epsilon. \quad (9)$$

Bemerkungen:

- 1) Im MKS-System wird das elektrische Feld \mathbf{E} gemessen in V m^{-1} , das Magnetfeld \mathbf{B} in tesla (T) oder Wb m^{-2} , die Stromdichte \mathbf{J} in A m^{-2} und die elektrische Ladungsdichte q in C m^{-3} .
- 2) $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ ($=\text{Wb A}^{-1}\text{m}^{-1}=\text{V s A}^{-1}$) ist die Permeabilität des Vakuums; $\epsilon = \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ f m}^{-1}$ ist die dielektrische Konstante; $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ist die Lichtgeschwindigkeit.
- 3) In einem Inertialsystem das mit relativer Geschwindigkeit \mathbf{u} bewegt werden Felder \mathbf{E}' und \mathbf{B}' wahrgenommen, die durch die Lorentztransformation mit \mathbf{E} und \mathbf{B} zusammenhängen [$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = u/c$]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma \left\{ \mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}}{c^2} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

Der Term $\mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ in der Maxwell-Ampère-Gleichung wird Verschiebungsstrom genannt. Die relative Grösse dieses Terms in Vergleich zur linken Seite kann man wie folgt abschätzen: verwende $|\nabla| \approx 1/L$, $|\partial/\partial t| \approx 1/T$, $L/T \approx u$ und $E/B \approx u$ wegen (6), so dass

$$\left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| / |\nabla \times \mathbf{B}| \approx \frac{E}{B} \frac{u}{c^2} \approx \beta^2. \quad (11)$$

In der MHD-Annäherung werden dieser und andere Terme von relativer Grösse β^2 vernachlässigt. Die Konsequenzen sind:

- 1) Gleichung (7) reduziert zu

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (12)$$

In der MHD gibt es daher keine elektromagnetische Wellen mehr.

- 2) Aus (6) folgt $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial q / \partial t = 0$ (Ladungserhaltung) $\Rightarrow q \approx 0$ (Neutralität).
- 3) Die Lorentztransformationen für \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{J} reduzieren zu

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (13)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}' = \mathbf{J} \quad (14)$$

Zu den Maxwellgleichungen kommt noch das Ohmsche Gesetz,

$$\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (15)$$

Bemerkungen:

- 1) σ ist die elektrische Leitfähigkeit ($\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$).
- 2) (15) ist ein fenomenologisches Gesetz das nur gültig ist wenn innerhalb eines für unser Problem typischen Zeitintervalls $2\pi/\omega$ genügend Kollisionen zwischen den geladenen Teilchen stattfinden, also Kollisionsfrequenz $\nu \gg \omega$. Wenn dies nicht der Fall ist, entsteht Ladungstrennung (Bereich der Plasmaphysik).

3) Durch (15) wird auch $\nabla \cdot \mathbf{E}$ festgelegt und ist (9) überflüssig geworden.

Durch Substitution erhält man aus den 'prä-Maxwell'-Gleichungen (6, 8, 12 und 15) die **MHD-Induktionsgleichung**:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}), \quad (16)$$

wo $\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] die magnetische Diffusivität ist. Falls η konstant ist, gilt

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (\eta \text{ konstant}). \quad (17)$$

Zu der Induktionsgleichung kommen noch die hydrodynamischen Gleichungen für ein nichtrelativistisches Gas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (\text{Kontinuität}) \quad (18)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}_{\text{lor}} + \mathbf{f}_{\text{visk}} \quad (\text{Navier-Stokes}) \quad (19)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \lambda \nabla T + \epsilon \quad (\text{Energieerhaltung}) \quad (20)$$

Bemerkungen:

- 1) $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ ist die materielle Ableitung.
- 2) in einem Koordinatensystem das mit Winkelfrequenz $\boldsymbol{\Omega}$ rotiert entstehen auf der rechten Seite von (19) die zusätzlichen Terme $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ (Corioliskraft) und $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2/2$ (Zentrifugalkraft).
- 3) die Lorentzkraft ist $\mathbf{f}_{\text{lor}} = q\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \approx \mathbf{J} \times \mathbf{B}$, denn $|q\mathbf{E}|/|\mathbf{J} \times \mathbf{B}| \approx \mu_0 \epsilon_0 E^2/B^2 \approx \beta^2$ (9). Eine alternative Ausdrückung lautet [verwende 12, 8 und $\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla B^2/2 - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ (J9)]:

$$f_{\text{lor},i} = \nabla_j m_{ij}; \quad m_{ij} = \frac{1}{\mu_0} \left\{ B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} \right\}. \quad (21)$$

\mathbf{m} ist der magnetische Spannungstensor. Der erste Teil beschreibt Spannungskräfte (Komponenten von $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}/\mu_0$ die $\parallel \mathbf{B}$ sind) und Krümmungskräfte (Komponenten von $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}/\mu_0$ die $\perp \mathbf{B}$ sind); der zweite Teil ist der magnetische Druck.

- 4) die visköse Kraft ist $f_{\text{visk},i} = \nabla_j \Pi_{ij}$, wo

$$\Pi_{ij} = \rho (\zeta - 2\nu/3) \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \nu \left\{ \nabla_j u_i + \nabla_i u_j \right\}. \quad (22)$$

Π ist der Viskositätsspannungstensor; ν [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] ist die kinematische Viskosität und ζ [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] ist die *bulk*-Viskosität.

- 5) e [J kg^{-1}] ist die interne Energie; λ [$\text{J m}^{-1} \text{s}^{-1} \text{K}^{-1}$] ist die thermische Konduktivität.
- 6) ϵ enthält die verschiedenen Energiequellen wie zugeführte Wärme und Dissipation von kinetischer und magnetischer Energie.
- 7) Die Energiedichte des elektrischen Feldes ist $\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2/2 \approx \epsilon_0 u^2 B^2/2 = \beta^2 B^2/2\mu_0$ und kann in der MHD vernachlässigt werden gegenüber der magnetischen Energiedichte.

2.2 Definition des Dynamoproblems

Gleichungen (16,18-20) bestimmen zusammen das Magnetfeld im Dynamo. Bemerkungen und Randbedingungen:

- D1) die leitende Flüssigkeit (Plasma) befindet sich in einem endlichen Volumen V mit Rand S ; der Aussenbereich $\hat{V} = R^3/V$ ist ein Isolator \Rightarrow in V gilt (16), in \hat{V} gilt $\mathbf{J} = 0$;
- D2) \mathbf{B} wird völlig in V erzeugt: $B \rightarrow r^{-3}$ für $r \rightarrow \infty$;
- D3) \mathbf{u} ist regulär (z.B. $\nabla_i u_j$ endlich und $\int_V dV \rho u^2/2$ endlich für alle t) und $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ auf S ;
- D4) \mathbf{B} ist kontinuierlich über S (kein Oberflächenstrom auf S).

Die magnetische Energie des Dynamofeldes ist

$$M(t) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V \cup \hat{V}} dV B^2. \quad (23)$$

Das Dynamoproblem ist dann so definiert: **gibt es Lösungen von (16,18-20) mit der Eigenschaft $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) \neq 0$?** Im *dynamischen Fall* werden die (nichtlinearen) Gleichungen (16,18-20) konsistent gelöst. Im *kinematischen Fall* wird \mathbf{u} vorgeschrieben und wird nur die Induktionsgleichung (16) gelöst, die dann linear ist.

3 Scheibendynamo

3.1 Kinematisch

Als anschauliches mechanisches Beispiel für Dynamowirkung betrachten wir den Scheibendynamo. Betrachte zuerst eine leitende Scheibe ohne Verbindungsdraht in der Anwesenheit eines vertikalen externen Magnetfeldes $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$. Wenn die Scheibe sich dreht mit Frequenz Ω dann entsteht im rotierenden System der Scheibe ein Elektrisches Feld $\mathbf{E}' = \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \Omega r B_0 \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_z = \Omega r B_0 \mathbf{e}_r$, so dass ein Strom von der Achse zur Rand fließt (bis sich durch Ladungstrennung ein elektrisches Feld der Grösse $-\mathbf{E}'$ gebildet hat). Wenn man jetzt eine leitende Verbindung zwischen Rand und Achse anlegt, fließt ein Strom I . Dieser Strom erzeugt ein zusätzliches Magnetfeld, das durch geschickte Orientierung des Drahtes das ursprüngliche verstärken kann, wie in Abb. (11a). Das auferlegte Feld wird dann nur gebraucht als *Saatfeld* und darf infinitesimal klein sein.

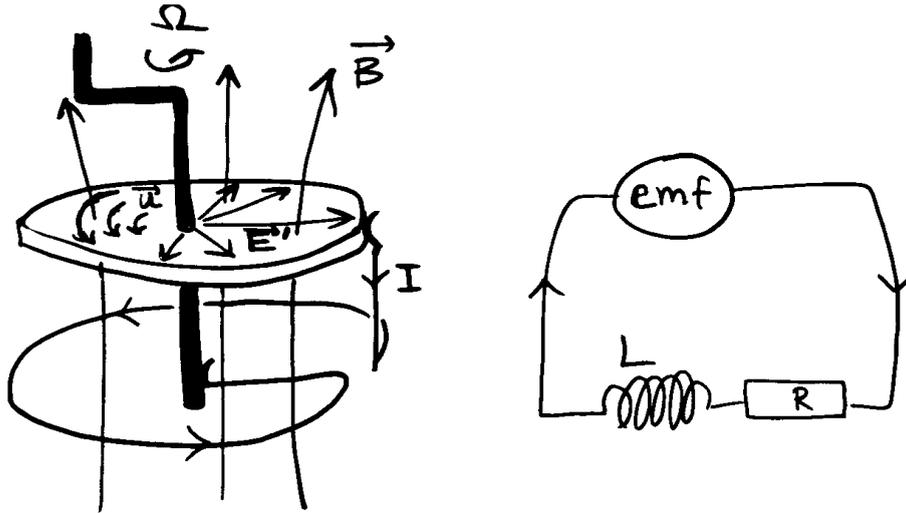


Abbildung 11: a) Scheibendynamo b) Stromkreis des Scheibendynamos

Die Spannung zwischen Achse und Rand folgt aus dem Induktionsgesetz. Sei $d\Phi_1$ der magnetische Fluss im Scheibensegment dS (Abb. 12) und $\Phi_s = BS = MI$ der magnetische Fluss in der Scheibe (M ist die *Induktivität*). Es folgt $d\Phi_1 = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -BS\Omega dt/2\pi = -MI\Omega dt/2\pi$, so dass die induzierte elektromotorische Kraft (EMK)¹⁰

$$V_{\text{emk}} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\Omega MI}{2\pi} \quad (24)$$

beträgt. Ebenso folgt für die Spannung im Spuhl (magnetischer Fluss $\Phi_2 = LI$; L ist die *Selbstinduktion* des Spuhles)

$$V_{\text{sp}} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (25)$$

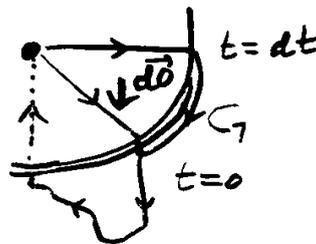


Abbildung 12: EMK der Scheibe

¹⁰In der Dynamotheorie wird, anders als üblich in der Elektrodynamik, oft $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ als EMK bezeichnet

Um den Strom I zu bestimmen wenden wir das Kirchhoff'sche Gesetz an (Abb. 11b):

$$V_{\text{emk}} + V_{\text{sp}} = RI. \quad (26)$$

Es folgt

$$L \frac{dI}{dt} = \left(\frac{M\Omega}{2\pi} - R \right) I \quad \Rightarrow \quad I(t) = I(0) \exp \left\{ \frac{R}{L} \left(\frac{M\Omega}{2\pi R} - 1 \right) t \right\}. \quad (27)$$

Abhängig von den Parametern erhalten wir eine exponentiell wachsende oder gedämpfte Lösung. Es finden in diesem Dynamo aber keine Umpolungen des Stromes statt. Wichtige Eigenschaften die auch bei kosmischen Dynamos zurückkehren sind:

- 1) Dynamowirkung erfordert dass eine dimensionslose *Dynamoszahl* eine Schwelle überschreitet: in diesem Fall $M\Omega/2\pi R \geq 1$;
- 2) Der Scheibendynamo funktioniert nur mit einem Schleifkontakt (differentielle Rotation);
- 3) Die Anordnung muss einen bestimmten Schraubensinn haben.

3.2 Dynamisch

Die lineare Behandlung des Scheibendynamos führt zu exponentiellem Wachstum von I wenn die Dynamoszahl superkritisch ist. In Wirklichkeit spielt die nicht-lineare Lorentzkraft eine immer grössere Rolle wenn I anwächst und dies führt laut dem Lenz'schen Gesetz zu einem entgegengesetzten Effekt (Abb. 13): die Lorentzkraft $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ bremst die Rotation ab. Betrachte die Gleichung

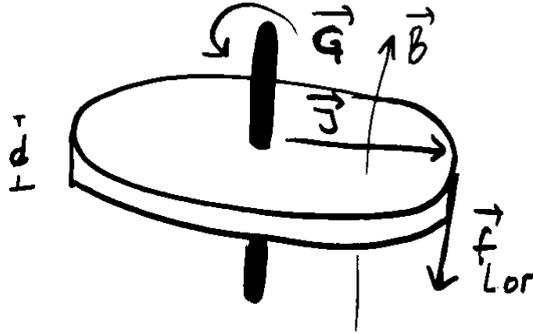


Abbildung 13: Die Lorentzkraft

für das Drehmoment der Scheibe,

$$C \frac{d\Omega}{dt} = G + M_{\text{lor}}, \quad (28)$$

wobei C das Trägheitsmoment der Scheibe, G das auferlegte (konstante) Drehmoment und M_{lor} das Moment der Lorentzkraft sind. Wenn die Scheibe dünn ist (Dicke d ; Radius $D \gg d$), gilt $\mathbf{r} \approx \mathbf{B}$, so dass [verwende (J2)] $\mathbf{r} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = -rJB \mathbf{e}_z$, wo r der Abstand zur Achse und $J = I/2\pi rd$ die Stromdichte sind. Es folgt

$$\mathbf{M}_{\text{lor}} = \int_V dV \mathbf{r} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = - \int_0^D dr rIB \mathbf{e}_z = - \frac{D^2 IB}{2} \mathbf{e}_z = - \frac{MI^2}{2\pi} \mathbf{e}_z, \quad (29)$$

wobei $\pi D^2 B = \Phi_s = MI$ und $dV = 2\pi r dr$ substituiert worden sind. Gleichung (28) lautet jetzt

$$C \frac{d\Omega}{dt} = G - \frac{M}{2\pi} I^2. \quad (30)$$

Es gibt jetzt keine unbeschränkt wachsende Lösungen mehr. Die stationären Lösungen sind definiert durch

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Omega = \Omega_0 = \frac{2\pi R}{M} \\ I = I_0^\pm = \pm \left(\frac{2\pi G}{M} \right)^{1/2} \end{cases} \quad (31)$$

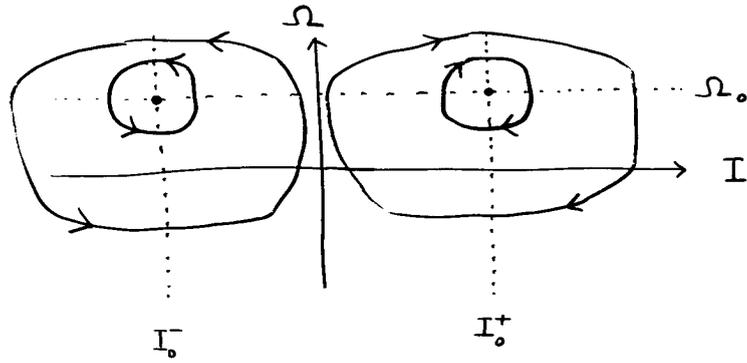


Abbildung 14: Verhalten des Scheibendynamos mit Lorentzkraft in der $I\Omega$ -Ebene

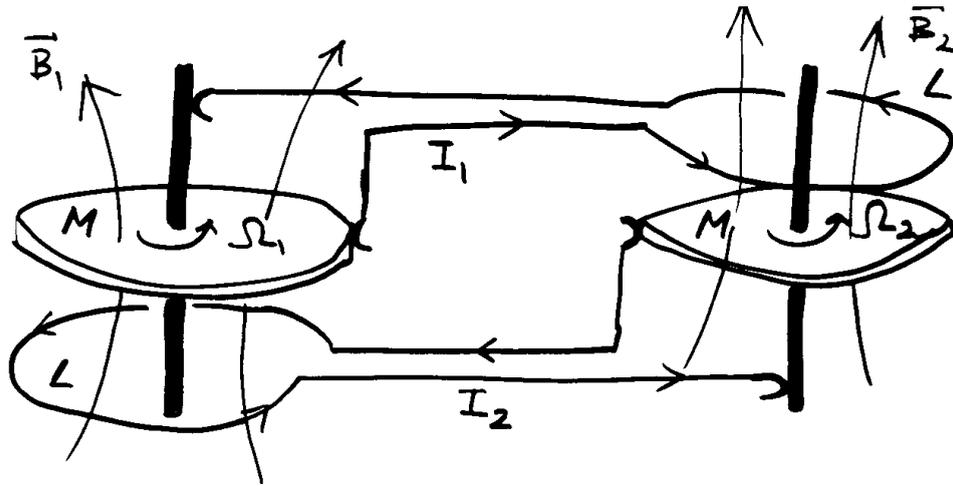


Abbildung 15: Zwei gekoppelte Scheibendynamos

Die übrigen Lösungen bilden geschlossene Kurven in der $I\Omega$ -Ebene um die beiden Punkte (I_0^\pm, Ω_0) , verlassen aber die Halbebene $I < 0$ oder $I > 0$ nicht (Abb. 14). Es gibt also weiterhin keine Umpolungen.

Eine Möglichkeit Umpolungen zu erzeugen bieten gekoppelte Scheibendynamos (Abb. 15). Wir nehmen an dass beide Scheiben die gleiche Induktivität M , das gleiche Trägheitsmoment C und auferlegtes Drehmoment G , beide Spühe die gleiche Selbstinduktion L und beide Drähte den gleichen Widerstand R haben. Die Gleichungen für Strom und Drehmoment lauten jetzt

$$L \frac{dI_1}{dt} = \frac{M}{2\pi} \Omega_1 I_2 - R I_1 \quad (32)$$

$$L \frac{dI_2}{dt} = \frac{M}{2\pi} \Omega_2 I_1 - R I_2 \quad (33)$$

$$C \frac{d\Omega_1}{dt} = G - \frac{M}{2\pi} I_1 I_2 \quad (34)$$

$$C \frac{d\Omega_2}{dt} = G - \frac{M}{2\pi} I_1 I_2. \quad (35)$$

Abb. (16) zeigt das Ergebnis einer numerischen Integration dieser Gleichungen, inklusive Umpolungen.

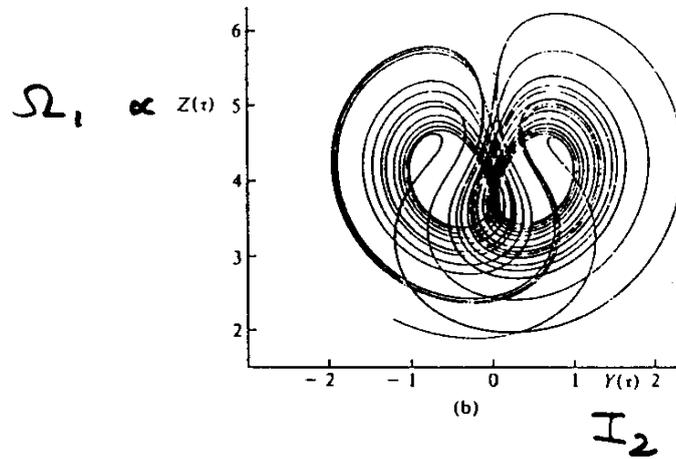
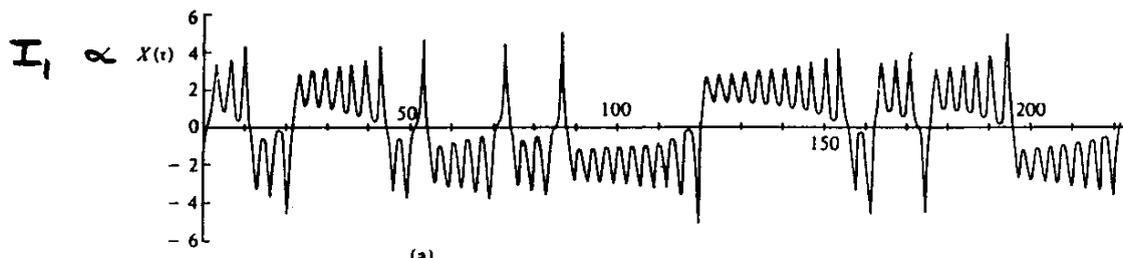


Abbildung 16: Verhalten von zwei gekoppelten Scheibendynamos (*Moffat*, §12.4)

4 Grundlagen der MHD

4.1 Diffusion und magnetische Reynoldszahl

Wenn $\mathbf{u} = 0$ und η konstant ist, reduziert die Induktionsgleichung zu einer Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (\mathbf{u} = 0, \eta = \text{konstant}). \quad (36)$$

Wir wollen diese Gleichung in einer einfachen Situation lösen: $\mathbf{B} = B_x(y, t) \mathbf{e}_x$ mit Randbedingungen $B_x(0, t) = B_x(L, t) = 0$. Durch Trennung von Variablen erhält man

$$B_x(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \exp(-n^2 \pi^2 t / \tau_d), \quad (37)$$

wo

$$\tau_d = L^2 / \eta \quad (38)$$

die Diffusionszeit ist. Die Eigenfunktionen haben jeweils $n - 1$ Nulldurchgänge entlang die y -Achse. Die typische Länge der räumlichen Variierungen einer Eigenfunktion ist $l_n \approx L/n$ und die Abklingzeit ist $\propto l_n^2 / \eta = \tau_d / n^2$. Die Koeffizienten c_n werden festgelegt durch eine Anfangsbedingung für $B_x(y, 0)$. Für $t \gtrsim \tau_d$ dominiert $n = 1$, unabhängig von den Anfangsbedingungen (falls $c_1 \neq 0$).

In einem Dynamo muss die Diffusion (mindestens) kompensiert werden von der *Advektion* $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ (17). Das Verhältnis Advektion/Diffusion definiert die magnetische Reynoldszahl:

$$\left. \begin{array}{l} |\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})| \approx uB/L \\ |\eta \nabla^2 \mathbf{B}| \approx \eta B/L^2 \end{array} \right\} R_m = \frac{uB/L}{\eta B/L^2} = \frac{uL}{\eta}. \quad (39)$$

Wenn $R_m \ll 1$ dominiert Diffusion (36); wenn $R_m = \infty$ ($\Leftrightarrow \sigma = \infty \Leftrightarrow \eta = 0$) dominiert Advektion und erhält man die Induktionsgleichung der *idealen MHD*:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (\eta = 0) \quad (40)$$

Tabelle 1: Diffusionszeiten und Reynoldszahlen von diversen Objekten

Objekt	L [m]	u [m s ⁻¹]	σ [Ω^{-1} m ⁻¹]	η [m ² s ⁻¹]	τ_d	R_m
Hg (l)	1	1	$1 \cdot 10^6$	0.8	1.2 s	1.2
Erdkern	$3.5 \cdot 10^6$	10^{-4}	$3 \cdot 10^5$	3	10^5 jr	100
Sonne (Konv.-Schicht)	$2 \cdot 10^8$	10	$3 \cdot 10^6$	0.3	$4 \cdot 10^9$ jr	$7 \cdot 10^9$

Bemerkungen:

- 1) Möglicherweise hat L nicht einen Wert sondern gibt es einen Bereich von Werten zwischen L_{\max} und L_{\min} . Streng genommen ist $\eta = 0$ setzen dann nur erlaubt wenn auch $R_{m, \min} = uL_{\min}/\eta \gg 1$.
- 2) Dynamowirkung fordert zumindest $R_m \gtrsim 1$, was im Labor problematisch ist, aber nicht in der Astrophysik (L sehr gross).
- 3) Das Alter des Erdmagnetfeldes ($\gtrsim 10^4 \tau_d$) lässt sofort auf Dynamowirkung schliessen.
- 4) Für die Sonne ist τ_d vergleichbar zu ihrem Alter. Dass in der Sonne ein Dynamo funktioniert geht aber aus der Periodizität ihres Magnetfeldes vor.

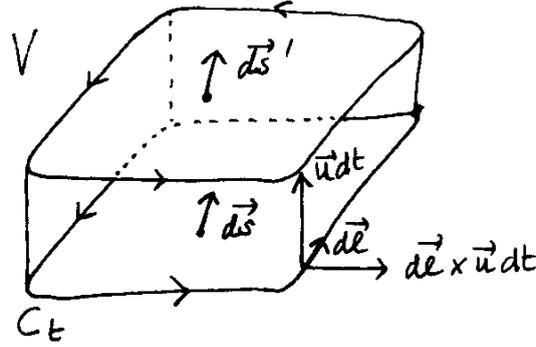


Abbildung 17: Flusserverhaltung

4.2 Magnetischer Fluss

Der magnetische Fluss durch eine materielle Oberfläche S_t ist

$$\Phi(t) = \int_{S_t} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}. \quad (41)$$

Um zu wissen wie sich Φ verändert verwenden wir zuerst $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und das Theorem von Gauss auf das Volumen V zur Zeit $t + dt$ (siehe Abb. 17):

$$\int_V dV \nabla \cdot \mathbf{B}(t + dt) = \Phi_{\text{unten}} + \Phi_{\text{oben}} + \Phi_{\text{Seite}} = 0. \quad (42)$$

Die Flächenintegrale entwickeln wir für $dt \rightarrow 0$:

$$\Phi_{\text{unten}} = - \int_{S_t} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}(t + dt) = -\Phi(t) - \int_{S_t} d\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt \quad (43)$$

$$\Phi_{\text{oben}} = \int_{S_{t+dt}} d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{B}(t + dt) = \Phi(t + dt) \quad (44)$$

$$\Phi_{\text{Seite}} = \int_{C_t} (d\mathbf{l} \times \mathbf{u} dt) \cdot \mathbf{B}(t + dt) = \int_{C_t} (d\mathbf{l} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{B}(t) dt \quad (45)$$

Anwendung von $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$ und des Theorems von Stokes auf (45) und Substitution von (43-45) in (42) liefern

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S_t} d\mathbf{S} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right\} = - \int_{S_t} d\mathbf{S} \cdot \left\{ \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) \right\}. \quad (46)$$

Die magnetischen Feldlinien sind für $\eta = 0$ (ideale MHD) auch materielle Linien und werden von der Strömung \mathbf{u} mitgeschleppt (sind 'eingefroren').

Für ein besseres Verständnis betrachten wir noch mal den Fall $\eta > 0$. Substitution der Faraday-Gleichung (6) in (46) und Anwendung des Theorems von Stokes liefern die Faraday-Gleichung in Integralform:

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \int_{C_t} d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = - \int_{C_t} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}'. \quad (47)$$

Die rechte Seite ist die induzierte Spannung und wird auch *elektromotorische Kraft* genannt. In der idealen MHD gilt $\mathbf{E}' = \mathbf{J}/\sigma = 0$ so dass die elektromotorische Kraft verschwindet. Der Scheibendynamo funktioniert nur wenn $\eta \neq 0$, weil sonst kein magnetischer Fluss in die Scheibe eindringen kann!

Auf Grund des Prinzips der Flusserverhaltung ist leicht einzusehen wie es zu einer Verstärkung des Magnetfeldes kommen kann. Drei wichtige Mechanismen sind Kontraktion, *shearing*, und *stretching*. Betrachten wir die Kontraktion eines Kugels mit Radius $R_1 \propto \rho_1^{-1/3}$ (ρ_1 ist die mittlere Dichte) und Magnetfeld B_1 . Der magnetische Fluss in der Equatorebene, $\pi R_1^2 B_1$, ist konstant, so dass

$$B_2 = B_1 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 = B_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{2/3}. \quad (48)$$

Zwei Beispiele:

- 1) Für die Kontraktion einer interstellaren Wolke zu einem $1 M_{\odot}$ -Stern findet man mit $\rho_1 \approx 10^{-20} \text{ kg m}^{-3}$, $B_1 \approx 10^{-10} \text{ T}$ und $\rho_2 \approx 10^3 \text{ kg m}^{-3}$: $B_2 \approx 2 \cdot 10^5 \text{ T}$, viel stärker als das typische Magnetfeld auf der Sonnenoberfläche (0.1 T).
- 2) Für die Kontraktion eines $5 M_{\odot}$ -Sterns zu einem Neutronenstern findet man mit $\rho_1 \approx 10 \text{ kg m}^{-3}$, $B_1 \approx 10^{-2} \text{ T}$ und $\rho_2 \approx 10^{18} \text{ kg m}^{-3}$: $B_2 \approx 2 \cdot 10^9 \text{ T}$, etwa in Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

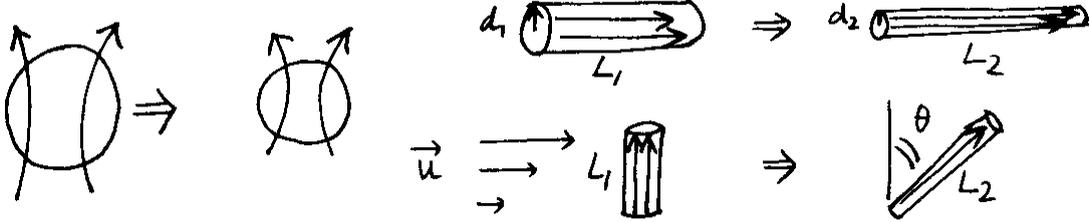


Abbildung 18: Feldverstärkung durch Kontraktion, *shearing* und *stretching*.

Kontraktion ist ein kompressibeler Mechanismus der Feldverstärkung, aber nicht sehr relevant für Dynamowirkung. Kontrahierende Phasen haben eine begrenzte Dauer, während ein Dynamofeld auch für $t \rightarrow \infty$ existieren soll. Relevanter für z.B. Erde und Sonne sind inkompressibele Mechanismen, bei denen die Dichte ρ eines mitbewegenden Volumenelements konstant bleibt (siehe 18):

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (49)$$

Inkompressibilität gilt sicher nicht für vertikale Strömungen in der Sonne wegen der starken Dichteschichtung $\rho = \rho(r)$, wohl aber für Strömungen auf Kugelflächen $r = \text{konstant}$, wie z.B. differentielle Rotation $\mathbf{u}_0 = \Omega(r, \theta) r \sin \theta \mathbf{e}_\phi$. Zwei mögliche Effekte der differentiellen Rotation sind *stretching* (Streckung) und *shearing* (Scherung). Bei *stretching* wird ein Volumenelement entlang die Feldrichtung gestreckt, bei *shearing* wird ein Volumenelement senkrecht zur Feldrichtung geschert. In beiden Fällen gelten (Abb. 18) Volumenerhaltung $L_1 d_1^2 = L_2 d_2^2$ und Flussenerhaltung $B_1 d_1^2 = B_2 d_2^2 \Rightarrow B_1/B_2 = L_1/L_2$ ($= 1/\cos \theta$ bei Streckung).

4.3 Die Energiegleichung

Die Energiedichte eines MHD-Dynamos hat drei unterschiedliche Beiträge: eine magnetische, eine kinetische und eine interne. Um die Gleichung für die magnetische Energiedichte $B^2/2\mu$ ab zu leiten differenzieren wir nach t :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{2\mu_0} \stackrel{6}{=} -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \stackrel{15, J10}{=} -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) - \frac{J^2}{\sigma}. \quad (50)$$

Bemerkungen:

- 1) $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ ist die Flussdichte der elektromagnetischen Energie, oder Poynting-Fluss.
- 2) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{\text{lor}}$, die von der Lorentzkraft auf die Flüssigkeit verrichtete Arbeit.
- 3) J^2/σ ist die Ohmsche Dissipation (Erhitzung).
- 4) Für die gesamte Energie des Dynamofeldes gilt

$$E_M = \int_{V \cup \hat{V}} dV \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad \frac{dE_M}{dt} = - \int_V dV \left\{ \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{\text{lor}} + J^2/\sigma \right\}, \quad (51)$$

denn (verwende Gauss)

$$\int_{V \cup \hat{V}} dV \nabla \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (52)$$

Die Gleichung für die kinetische Energiedichte $\rho u^2/2$ erhalten wir durch Differenzierung nach t und Substitution der Kontinuitätsgleichung (18) und der Navier-Stokes-Gleichung (19):

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho u^2}{2} = \frac{u^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (53)$$

$$= -\frac{u^2}{2} \nabla \cdot \rho \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \left\{ -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}_{\text{lor}} + \mathbf{f}_{\text{visk}} \right\}. \quad (54)$$

Schliesslich gilt für die interne Energie (20):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho e = \rho \frac{de}{dt} - \nabla \cdot \rho e \mathbf{u} = -\nabla \cdot \left\{ \rho e \mathbf{u} - \lambda \nabla T \right\} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \epsilon, \quad (55)$$

wo

$$\epsilon = \epsilon_s + \epsilon_{\text{visk}} + J^2/\sigma \quad (56)$$

die gesamte Rate der Energieproduktion in der Flüssigkeit bezeichnet; ϵ_s beschreibt die Energieproduktion durch chemische oder nukleare Reaktionen. Wenn wir (50), (54) und (55) addieren erhalten wir eine Gleichung für die gesamte Energiedichte

$$g = \frac{B^2}{2\mu} + \rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right). \quad (57)$$

Zwei der drei magnetischen Terme aus (50) fallen jetzt weg. Das lässt sich folgendermassen erklären:

- 1) die Arbeit der Lorentzkraft $\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{\text{Lor}}$ stellt die Umwandlung von magnetischer in kinetische Energie (oder andersum) da;
- 2) J^2/σ beschreibt die irreversible Umwandlung von magnetischer Energie in interne Energie.

4.4 Toroidale und poloidale Vektoren

In den meisten Fällen werden wir Dynamos in sphärischen Körpern betrachten. Dann ist eine Zerlegung der Vektorfelder in toroidale und poloidale Komponenten bequem. Jeder divergenzfreie Vektor, wie z.B. das Magnetfeld \mathbf{B} , ist zu schreiben als $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, wobei der Vektorpotential \mathbf{A} lautet

$$\mathbf{A} = \nabla \Phi + T \mathbf{r} + \nabla \times P \mathbf{r}. \quad (58)$$

Es folgt

$$\mathbf{B} = \nabla \times T \mathbf{r} + \nabla \times \nabla \times P \mathbf{r} = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_p, \quad (59)$$

wo \mathbf{B}_t die toroidale Komponente und \mathbf{B}_p die poloidale Komponente sind. Eigenschaften:

- 1) $\mathbf{B}_t = \nabla \times T \mathbf{r} = \nabla T \times \mathbf{r}$ steht senkrecht auf \mathbf{r} (liegt auf Kugelschalen $r = \text{konstant}$).
- 2) Man kann zu T eine Funktion $f(r)$ addieren ohne B_t zu ändern, so dass man immer annehmen darf dass der Mittelwert von T über eine Kugelschale verschwindet,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi T \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 0. \quad (60)$$

- 3) $\nabla \times \mathbf{B}_t = \nabla \times \nabla \times T \mathbf{r}$ ist ein poloidaler Vektor.
- 4) $\nabla \times \mathbf{B}_p = \nabla \times \nabla \times \nabla \times P \mathbf{r} = -\nabla \times \nabla^2 P \mathbf{r}$ ist ein toroidaler Vektor (verwende J6).
- 5) Die Zerlegung in T und P ist immer möglich wenn $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, denn T und P können gelöst werden aus folgenden partiellen Differentialgleichungen:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_p = \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \nabla P \mathbf{r}), \quad (61)$$

$$\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}_t) = \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \nabla T \mathbf{r}). \quad (62)$$

- 6) $\mathbf{B}_t \times \mathbf{B}'_t = -\mathbf{r} \{ \mathbf{r} \cdot (\nabla T \times \nabla T') \}$ ist $\parallel \mathbf{r}$ und daher ein poloidaler Vektor (verwende J1); $\mathbf{B}_t \times \mathbf{B}'_p$ und $\mathbf{B}_p \times \mathbf{B}'_p$ sind im Allgemeinen gemischte Vektoren.

7) Wenn \mathbf{B} axialsymmetrisch ist ($\partial/\partial\phi = 0$) gilt

$$\mathbf{B}_t = \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \times T\mathbf{r} = B_\phi \mathbf{e}_\phi, \quad (63)$$

$$\nabla \times P\mathbf{r} = \nabla P \times \mathbf{r} = A_\phi \mathbf{e}_\phi \Rightarrow \mathbf{B}_p = \nabla \times A_\phi \mathbf{e}_\phi. \quad (64)$$

Das toroidale Feld liegt jetzt auf Kreisen $r = \text{konstant}$ und $\theta = \text{konstant}$, das poloidale Feld in Meridianebenen.

5 (Anti)dynamotheoreme

5.1 Mindestforderung für Dynamowirkung

Wir betrachten das Dynamoproblem mit folgenden *zusätzlichen* Annahmen:

- A1) V ist ein Kugel mit Radius R ,
- A2) $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (Inkompressibilität),
- A3) $\mathbf{u} = 0$ auf S (S ist die Oberfläche $r = R$),
- A4) η ist konstant,

und wollen aus der Gleichung für die gesamte magnetische Energie (51) eine Mindestforderung für die magnetische Reynoldszahl R_m ableiten. Der Beweis geht zurück auf Backus¹¹. Zuerst suchen wir eine Obergrenze für den Beitrag der Lorentzkraft $-\int_V dV \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{\text{lor}}$. Nach Substitution von $\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{\text{lor}} = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) / \mu_0 = -(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) / \mu_0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} -\int_V dV \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{\text{lor}} &= \frac{1}{\mu_0} \int_V dV (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &\stackrel{\text{J10}}{=} \frac{1}{\mu_0} \int_V dV \left\{ \nabla \cdot [\mathbf{B} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] + \mathbf{B} \cdot [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] \right\}. \end{aligned} \quad (65)$$

Nach Verwendung von Gauss und (A3) verschwindet der erste Term zur rechten Seite von (65). Wir substituieren $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ (J11, A2) und $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{1}{2} \nabla \cdot B^2 \mathbf{u}$ (A2), wonach

$$-\int_V dV \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{\text{lor}} = \frac{1}{\mu_0} \int_V dV \left\{ \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{2} \nabla \cdot B^2 \mathbf{u} \right\} \quad (66)$$

$$\stackrel{\text{Gauss, A3}}{=} \frac{1}{\mu_0} \int_V dV B_i B_j \nabla_j u_i = \frac{1}{\mu_0} \int_V dV B_i B_j e_{ij}, \quad (67)$$

wo

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i). \quad (68)$$

[Im kompressibelen Fall kommt in (66) auf der rechten Seite ein Term $-B^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) / 2$, in (67) auf der rechten Seite ein Term $-(\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} / 2$ hinzu.] Sei ω der grösste Eigenwert von \mathbf{e} , dann folgt

$$-\int_V dV \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{\text{lor}} \leq \omega \int_V dV \frac{B^2}{\mu_0} \leq 2\omega E_M, \quad (69)$$

Als Nächstes wollen wir eine Untergrenze für $\int_V dV J^2 / \sigma$ ableiten. Dazu bestimmen wir die Stromdichte \mathbf{J} für die $\int_V dV J^2 / \sigma$ den minimalen Wert erreicht unter den folgenden Bedingungen:

- a) $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ in V ;
- b) $E_M = E_M^0$ ist konstant.

Bedingung a) folgt aus (12) und führt zu der Randbedingung $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0$ auf S (wende Gauss an auf einer kleinen Schachtel die von S durchschnitten wird). Die Minimalisierung erfolgt durch Variationsrechnung. Ähnlich wie in der klassischen Mechanik betrachten wir dazu das Integral

$$A[\mathbf{J}] = \int_V dV \left\{ \frac{J^2}{\sigma} + \lambda_a(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{J} \right\} + \lambda_b \left\{ \int_{V \cup \hat{V}} dV \frac{B^2}{2\mu_0} - E_M^0 \right\}, \quad (70)$$

wo λ_b (eine Konstante) und $\lambda_a(\mathbf{r})$ (eine Funktion) die Multiplikatoren sind. Innerhalb V setzen wir $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J} + \delta \mathbf{J}$ und auf S $\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{J} = 0$. Der erste Term von (70) ergibt als Variation $2 \int_V dV \mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{J} / \sigma$. Die Variation des zweiten Terms ist (verwende $\nabla \cdot f \mathbf{a} = f \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla f$):

$$\int_V dV \lambda_a \nabla \cdot \delta \mathbf{J} = \int_V dV \left\{ \nabla \cdot \lambda_a \delta \mathbf{J} - \delta \mathbf{J} \cdot \nabla \lambda_a \right\} = - \int_V dV \delta \mathbf{J} \cdot \nabla \lambda_a. \quad (71)$$

¹¹Backus, G.E., 1958, *Ann. Phys.* **4**, 372-447

($\int_V dV \nabla \cdot \lambda_a \delta \mathbf{J} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{J} \lambda_a = 0$ wegen $\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{J} = 0$). Die Variation des letzten Terms ist

$$\lambda_b \delta E_M = \frac{\lambda_b}{\mu_0} \int_{V \cup \hat{V}} dV \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B}. \quad (72)$$

Wir substituieren $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ und verwenden (J10):

$$\lambda_b \delta E_M = \frac{\lambda_b}{\mu_0} \int_{V \cup \hat{V}} dV \left\{ \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \delta \mathbf{B}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{B}) \right\} = \lambda_b \int_V dV \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{J}. \quad (73)$$

In (73) haben wir Gauss angewendet und so den ersten Term zur rechten Seite verschwinden lassen. Wenn wir die Variationen addieren, erhalten wir

$$\delta A = \int_V dV \delta \mathbf{J} \cdot \left\{ \frac{2}{\sigma} \mathbf{J} - \nabla \lambda_a + \lambda_b \mathbf{A} \right\} = 0 \quad (\text{für alle } \delta \mathbf{J}). \quad (74)$$

Es folgt

$$\mathbf{J} = \frac{\sigma}{2} \nabla \lambda_a - \frac{\sigma \lambda_b}{2} \mathbf{A} \quad (75)$$

und wenn wir zu beiden Seiten die Rotation nehmen erhalten wir

$$\eta \nabla^2 \mathbf{B} = -s \mathbf{B} \quad (\text{in } V). \quad (76)$$

Dies ist die Induktionsgleichung für ein frei zerfallendes Feld (setze $\mathbf{u} = 0$ in 17); die Konstante $s = \lambda_b/2$ entspricht $1/\text{Abklingzeit}$. Für die Dissipationsrate ergibt sich

$$\int_V dV J^2/\sigma = \int_V dV \mathbf{J} \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla \lambda_a - s \mathbf{A} \right) \stackrel{\text{a}}{=} \int_V dV \left(\frac{1}{2} \nabla \cdot \lambda_a \mathbf{J} - s \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \right). \quad (77)$$

Aus Gauss und (a) ergibt sich $\int_V dV \nabla \cdot \lambda_a \mathbf{J} = \int_S d\mathbf{s} \cdot \lambda_a \mathbf{J} = 0$. Wir substituieren $\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = B^2 - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ (J10) und verwenden Gauss:

$$\int_V dV J^2/\sigma = s \int_V dV \frac{B^2}{\mu_0} - \frac{s}{\mu_0} \int_S d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (78)$$

Das Integral $\int_S d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \int_S dS \mathbf{B} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{A})$ können wir umschreiben mit Hilfe der Randbedingung $[\mathbf{n} \times \mathbf{A}] = 0$ auf S . (Beweis: berechne für eine kleines Rechteck das von S durchschnitten wird $\int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ und verwende Stokes und Kontinuität von \mathbf{B} auf S .) Es folgt

$$\int_S dS \mathbf{B} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) = - \int_{\hat{S}} dS \mathbf{B} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) = - \int_{\hat{S}} d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (79)$$

$$= - \int_{\hat{V}} dV \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = - \int_{\hat{V}} dV B^2. \quad (80)$$

Substitution in (78) ergibt

$$\int_V dV J^2/\sigma = s \int_{V \cup \hat{V}} dV \frac{B^2}{\mu_0} = 2s E_M. \quad (81)$$

Es folgt [substituiere (69) und (81) in (51)]

$$\frac{dE_M}{dt} \leq 2(\omega - s) E_M. \quad (82)$$

Für unsere Kugelgeometrie lässt sich beweisen¹² $s \geq \eta(\pi/R)^2$. Eine notwendige (aber nicht zureichende) Bedingung für Dynamowirkung ist also

$$\omega \geq \eta \frac{\pi^2}{R^2}. \quad (83)$$

Wenn wir ω abschätzen als u/R dann muss die magnetische Reynoldszahl $R_m = uR/\eta \gtrsim \pi^2$ sein.

¹²Moffatt, §2.7

5.2 Cowling-Theorem

Das Cowling-Theorem besagt die Unmöglichkeit axisymmetrischer Dynamowirkung. Der Beweis dem wir hier folgen¹³ geht aus vom üblichen Dynamoproblem mit folgenden zusätzlichen Bedingungen:

- B1) \mathbf{B} und \mathbf{u} sind axisymmetrisch,
- B2) $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (Inkompressibilität),
- B3) η ist konstant.

Wir schreiben \mathbf{B} und \mathbf{u} als

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_p = B_t \mathbf{e}_\phi + \nabla \times \mathbf{A}_t, \quad (84)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_p. \quad (85)$$

Nach Substitution in der Induktionsgleichung (17) und Trennung der poloidalen und toroidalen Komponenten erhält man [$\mathbf{u}_t \times \mathbf{B}_t = 0$ wegen Axialsymmetrie]

$$\frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_t \times \mathbf{B}_p + \mathbf{u}_p \times \mathbf{B}_t) - \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}_t), \quad (86)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_p \times \mathbf{B}_p) - \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}_p). \quad (87)$$

Zuerst beweisen wir dass $\mathbf{B}_p \rightarrow 0$. Dazu substituieren wir in (87) $\mathbf{B}_p = \nabla \times \mathbf{A}_t$:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial t} = \mathbf{u}_p \times (\nabla \times \mathbf{A}_t) - \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_t). \quad (88)$$

Im Allgemeinen kann man zu dieser Gleichung noch ein willkürlicher Gradient $\nabla \Phi$ addieren, aber $\partial \Phi / \partial \phi = 0$ wegen Axialsymmetrie. Wir verwenden Kugelkoordinaten und definieren

$$s = r \sin \theta. \quad (89)$$

Die Rotation eines axisymmetrischen Vektors ist

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mathbf{e}_r}{s} \frac{\partial}{\partial \theta} A_t \sin \theta - \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_t + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r A_\theta - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\}. \quad (90)$$

Beachte dass die Einheitsvektoren \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_ϕ Funktionen der Koordinaten sind. Es folgt

$$\nabla \times \mathbf{A}_t = \left\{ \frac{\mathbf{e}_r}{sr} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\mathbf{e}_\theta}{s} \frac{\partial}{\partial r} \right\} s A_t \quad (91)$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}_p \times (\nabla \times \mathbf{A}_t) = -\mathbf{e}_\phi \left\{ \frac{u_{p\theta}}{sr} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{u_{pr}}{s} \frac{\partial}{\partial r} \right\} s A_t = -\frac{\mathbf{e}_\phi}{s} (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) s A_t \quad (92)$$

und

$$\begin{aligned} -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_t) &= \mathbf{e}_\phi \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right\} A_t \\ &= \mathbf{e}_\phi \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{sr} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{s^2} \right\} A_t \\ &= \mathbf{e}_\phi \left\{ \nabla^2 - \frac{1}{s^2} \right\} A_t, \end{aligned} \quad (93)$$

wo $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ der Laplace-Operator ist. Substitution in (88) ergibt

$$\frac{\partial A_t}{\partial t} = -\frac{1}{s} (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) s A_t + \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{s^2} \right) A_t \quad (\text{in } V), \quad (94)$$

während $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ in \hat{V} :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{s^2} \right) A_t = 0 \quad (\text{in } \hat{V}). \quad (95)$$

¹³Braginskii, S.I., *Sov. Phys. JETP* **20**, 726-35 und Moffat §6.4

Wir multiplizieren (94) mit $s^2 A_t$:

$$\frac{1}{2} s^2 \frac{\partial}{\partial t} A_t^2 = -s A_t (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) s A_t + \eta A_t (s^2 \nabla^2 - 1) A_t \quad (\text{in } V). \quad (96)$$

Diese Gleichung wollen wir integrieren über V . Dazu bemerken wir zuerst

$$s A_t (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) s A_t \stackrel{B1, B2}{=} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) s^2 A_t^2 = \frac{1}{2} \nabla \cdot s^2 A_t^2 \mathbf{u}_p, \quad (97)$$

$$A_t (s^2 \nabla^2 - 1) A_t = \nabla \cdot \left\{ s A_t \nabla s A_t - s A_t^2 \mathbf{e}_s \right\} - (\nabla s A_t)^2. \quad (98)$$

Der Beweis von (98) erfolgt mit $\nabla s = \mathbf{e}_s$ und $\nabla s A_t = s \nabla A_t + A_t \mathbf{e}_s$:

$$\begin{aligned} s^2 A_t \nabla \cdot \nabla A_t &= s^2 A_t \nabla \cdot \frac{1}{s} \left\{ \nabla s A_t - \mathbf{e}_s A_t \right\} \\ &= \nabla \cdot \left[s^2 A_t \frac{1}{s} \left\{ \nabla s A_t - \mathbf{e}_s A_t \right\} \right] - (\nabla s^2 A_t) \cdot \frac{1}{s} \left\{ \nabla s A_t - \mathbf{e}_s A_t \right\} \end{aligned} \quad (99)$$

$$= \nabla \cdot \left\{ s A_t \nabla s A_t - s A_t^2 \mathbf{e}_s \right\} - (\nabla s A_t)^2 + A_t^2. \quad (100)$$

[(100) folgt aus (99) nach Substitution von $\nabla s^2 A_t = s \nabla s A_t + s A_t \mathbf{e}_s$]. Wir integrieren (96) über V und addieren dazu das Integral des letzten Terms über \hat{V} (das ist erlaubt wegen 95). Wo möglich verwenden wir Gauss:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V dV s^2 A_t^2 = -\frac{1}{2} \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_p s^2 A_t + \eta \int_{S_\infty} d\mathbf{S} \cdot \left\{ s A_t \nabla s A_t - s A_t^2 \mathbf{e}_s \right\} \quad (101)$$

$$- \eta \int_{V \cup \hat{V}} dV (\nabla s A_t)^2, \quad (102)$$

wo S_∞ die Oberfläche eines unendlich grossen Kugels bezeichnet. Das erste Oberflächenintegral verschwindet weil $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ auf S ; das zweite weil $A \propto r^{-2}$ für $r \rightarrow \infty$. Es ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V dV s^2 A_t^2 = -\eta \int_{V \cup \hat{V}} dV (\nabla s A_t)^2 \leq 0, \quad (103)$$

und wenn wir absehen von unphysischen Singularitäten folgt $A_t, \mathbf{B}_p \rightarrow 0$.

Der Beweis für B_t geht auf ähnliche Weise. Wir setzen $\mathbf{B}_p = 0$ in (86) und substituieren $[\mathbf{u}_p \times \mathbf{B}_t = (u_{p\theta} \mathbf{e}_r - u_{pr} \mathbf{e}_\theta) B_t$; siehe (90) und (93)]:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{u}_p \times \mathbf{B}_t) &= -\frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r u_{pr} B_t + \frac{\partial}{\partial \theta} u_{p\theta} B_t \right\} \\ &= -\frac{s \mathbf{e}_\phi}{r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r^2 B_t u_{pr}}{r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta u_{p\theta} B_t}{s} \right\} \\ &= -s \mathbf{e}_\phi \left(\nabla \cdot \frac{B_t \mathbf{u}_p}{s} \right) = -s \mathbf{e}_\phi (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) \frac{B_t}{s} \end{aligned} \quad (104)$$

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}_t) = \mathbf{e}_\phi \left\{ \nabla^2 - \frac{1}{s^2} \right\} B_t. \quad (105)$$

Substitution in (86) ergibt

$$\frac{\partial B_t}{\partial t} = -s (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) \frac{B_t}{s} + \left\{ \nabla^2 - \frac{1}{s^2} \right\} B_t. \quad (106)$$

Wir multiplizieren (106) mit B_t/s^2 . Bemerke zuerst (verwende $\nabla \cdot \mathbf{u}_p = 0$)

$$\frac{B_t}{s} (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) \frac{B_t}{s} = \mathbf{u}_p \cdot \frac{1}{2} \nabla \frac{B_t^2}{s^2} = \frac{1}{2} \nabla \cdot \frac{B_t^2 \mathbf{u}_p}{s^2}. \quad (107)$$

Dann folgt

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{B_t^2}{s^2} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot \frac{B_t^2 \mathbf{u}_p}{s^2} + \eta \frac{B_t}{s^2} \left(\nabla^2 - \frac{1}{s^2} \right) B_t \quad \text{in } V. \quad (108)$$

Wir substituieren [verwende $\nabla(B_t/s) = (1/s)\nabla B_t - \mathbf{e}_s B_t/s^2$]

$$\begin{aligned}
\frac{B_t}{s^2} \nabla \cdot \nabla B_t &= \frac{B}{s^2} \nabla \cdot \left\{ s \nabla \frac{B_t}{s} + \mathbf{e}_s \frac{B_t}{s} \right\} \\
&= \nabla \cdot \left[\frac{B_t}{s^2} \left\{ s \nabla \frac{B_t}{s} + \mathbf{e}_s \frac{B_t}{s} \right\} - \left(\nabla \frac{B_t}{s^2} \right) \cdot \left\{ s \nabla \frac{B_t}{s} + \mathbf{e}_s \frac{B_t}{s} \right\} \right] \\
&= \nabla \cdot \left\{ \frac{B_t}{s} \nabla \frac{B_t}{s} + \mathbf{e}_s \frac{B_t^2}{s^3} \right\} - \left(\nabla \frac{B_t}{s} \right)^2 + \frac{B_t^2}{s^4}
\end{aligned} \tag{109}$$

und integrieren (108) über V ; den letzten Term in (108) aber über $V \cup \hat{V}$. Die Oberflächenintegrale verschwinden aus den gleichen Gründen wie bei B_p und es ergibt sich

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V dV \frac{B_t^2}{s^2} = -\eta \int_{V \cup \hat{V}} dV \left(\nabla \frac{B_t}{s} \right)^2 \leq 0. \tag{110}$$

Damit folgt $\mathbf{B}_t \rightarrow 0$.

5.3 Cowling-Theorem (2)

Der ursprüngliche Beweis von Cowling¹⁴ geht aus von einer zusätzlichen Annahme:

$$\text{B4) } \frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (\text{Stationarität}).$$

Die Unmöglichkeit der Dynamowirkung folgt aus einem *lokalen* Argument. Die Feldlinien von \mathbf{B}_p liegen in Meridianebenen und sind alle geschlossen; weil $\mathbf{J} = 0$ in \hat{V} gibt es in V eine *neutrale Linie* \mathcal{C}_N , wo $\mathbf{B}_p = 0$ (Abb. 19).

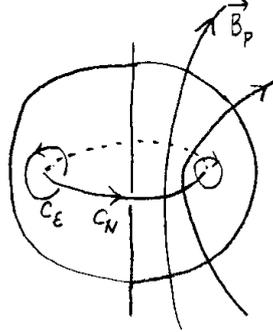


Abbildung 19: Die neutrale Linie

Es gibt zwei Varianten des 'Beweises'. Die erste fängt an mit der Bemerkung dass im Allgemeinen $\mathbf{J}_t = \nabla \times \mathbf{B}_p / \mu_0 \neq 0$ auf \mathcal{C}_N , weil \mathbf{B}_p geschlossene Kurven um \mathcal{C}_N bildet. Jetzt integrieren wir \mathbf{J} entlang \mathcal{C}_N und verwenden Ohm (15) und Stokes. Wegen Faraday (6) und (B4) gilt $\mathbf{E} = \nabla \Phi$; Anwendung von (B1) liefert

$$\mathbf{E}_t = 0, \tag{111}$$

und wegen $(\mathbf{u} \times \mathbf{B})_t = \mathbf{u}_p \times \mathbf{B}_p = 0$ auf \mathcal{C}_N ergibt sich

$$\int_{\mathcal{C}_N} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{J} = \sigma \int_{\mathcal{C}_N} d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0. \tag{112}$$

Wegen Axialsymmetrie folgt aus (112) $\mathbf{J}_t = 0$: die elektromotorische Kraft (47) ist nicht im Stande entlang \mathcal{C}_N den Strom in Stand zu halten. Wenn $\mathbf{J}_t \neq 0$ auf \mathcal{C}_N richtig ist, haben wir einen Widerspruch und damit wäre die Unmöglichkeit stationärer axisymmetrischer Dynamowirkung bewiesen. Diese Annahme ist aber nicht so offensichtlich wie sie erscheinen mag; wenn \mathcal{C}_N eine neutrale Linie zweiter Ordnung ist, dann gilt dort auch $\nabla_i \mathbf{B}_p = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_p = \mathbf{J}_t = 0$ auf \mathcal{C}_N .

¹⁴Cowling, T.G., 1934, MNRAS **94**, 39-48

In der zweiten Variante wird diese Schwäche aufgehoben. Wir integrieren \mathbf{B} entlang \mathcal{C}_ϵ und verwenden (111) (siehe Abb. 19):

$$\int_{\mathcal{C}_\epsilon} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \int_{S_\epsilon} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\eta} \int_{S_\epsilon} d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (113)$$

$$= \frac{1}{\eta} \int_{S_\epsilon} d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{u}_p \times \mathbf{B}_p) \leq \frac{U}{\eta} \int_{S_\epsilon} dS |\mathbf{B}_p|, \quad (114)$$

wo $U = \max_V u_p$. Aus dieser Ungleichheit ist ein Widerspruch ab zu leiten. Weil $\mathbf{B}_p \rightarrow 0$ für $\epsilon \rightarrow 0$ gilt

$$\frac{1}{S_\epsilon} \int_{S_\epsilon} dS |\mathbf{B}_p| \leq \frac{1}{L_\epsilon} \int_{\mathcal{C}_\epsilon} |d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}_p|, \quad (115)$$

wo L_ϵ die Länge von \mathcal{C}_ϵ bezeichnet. Substitution in (114) ergibt

$$1 \leq \frac{U S_\epsilon}{\eta L_\epsilon} = \frac{U}{\eta} \mathcal{O}(\epsilon). \quad (116)$$

Für $\epsilon \rightarrow 0$ entsteht ein Widerspruch. Der physische Hintergrund ist die Unmöglichkeit des Induktionsterms $\mathbf{u}_p \times \mathbf{B}_p$ um in der Nähe der neutralen Linie die Diffusion $-\eta \nabla \times \mathbf{B}_p$ zu kompensieren. Damit ist das Cowling-Theorem unter Bedingungen (B1-B4) bewiesen. Bemerkungen:

- 1) Durch Mittelung der Induktionsgleichung (16) über ϕ sieht man dass nur die axisymmetrische Komponente von \mathbf{u} am axialsymmetrischen Teil von \mathbf{B} beiträgt.
- 2) Das Cowling-Theorem schliesst keine Dynamowirkung aus für \mathbf{u} axisymmetrisch und \mathbf{B} nicht-axisymmetrisch.
- 3) Ein allgemeiner Beweis des Cowling-Theorems, insbesondere für kompressible Strömung ist noch immer nicht geliefert; siehe Ivers und James¹⁵. Ein alternativer Beweis für inkompressible Strömung (durch eine Zerlegung in spherisch-harmonische Funktionen, den *Bullard-Gellman-Formalismus*) ist zu finden bei James *et al*¹⁶.

5.4 Toroidaltheorem

Ein Beispiel eines Antidynamotheorems das Bedingungen auf \mathbf{u} aber nicht auf \mathbf{B} stellt geht zurück auf Elsasser¹⁷ und wurde zuerst bewiesen von Bullard und Gellman¹⁸; der Beweis der hier behandelt wird stammt von Backus¹⁹. Die zusätzlichen Annahmen neben den üblichen (2.2) sind:

- C1) $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (Inkompressibilität);
- C2) η ist konstant;
- C3) $\mathbf{u}_p = 0 \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = 0$ (rein toroidale Bewegung);
- C4) V ist ein Kugel.

(C3) besagt dass die Strömung auf Kugeloberflächen stattfindet; (C4) ist davon die logische Folge. Zuerst verwenden wir (C1) $\Rightarrow \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ und substituieren das Ergebnis in die Induktionsgleichung (17):

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (117)$$

Wir werden beweisen dass $\mathbf{B}_p \rightarrow 0$ und definieren dazu

$$Q = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_p. \quad (118)$$

Ableitung nach t und Substitution von (117) ergeben

$$\frac{dQ}{dt} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \eta \mathbf{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (119)$$

¹⁵Ivers, D.J. und James, R.W., 1984, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **A 312**, 179-218

¹⁶James, R.W., Roberts, P.H. und Winch, D.E., 1980, *GAFD* **15**, 149-60

¹⁷Elsasser W.M., 1946, *Phys. Rev.* **69**, 106-16

¹⁸Bullard, E.C., Gellman, H., 1954, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A247**, 213-78

¹⁹Backus, G.E., 1958, *Ann. Phys.* **4**, 372-447

wo

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (120)$$

Wir vereinfachen (119) durch Substitution folgender Identitäten:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \\ \nabla^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} &\stackrel{J9}{=} \nabla \cdot \left\{ (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{r} + \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{r}) \right\} \\ &= \nabla \cdot \left\{ (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} + \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right\} \\ &= \nabla \cdot \left\{ \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right\} = -\mathbf{r} \cdot \left\{ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right\} \\ &= \mathbf{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (122)$$

[($\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{B}$, $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ und $\nabla \cdot (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.] Es ergibt sich

$$\frac{dQ}{dt} = \eta \nabla^2 Q + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \stackrel{C3}{=} \eta \nabla^2 Q \quad (\text{in } V), \quad (123)$$

$$\nabla^2 Q = 0 \quad (\text{in } \hat{V}). \quad (124)$$

Gleichung (123) beschreibt die Diffusion des poloidalen Feldes im mitbewegenden System. Weil ein Quellterm fehlt (C3), ist zu erwarten dass $Q \rightarrow 0$. Für den genauen Beweis multiplizieren wir mit Q und integrieren über V [verwende (C1) $\Rightarrow Q(\mathbf{u} \cdot \nabla)Q = \nabla \cdot Q^2 \mathbf{u}/2$ und $Q \nabla^2 Q = \nabla \cdot Q \nabla Q - (\nabla Q)^2$]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V dV Q^2 &= \int_V dV Q \frac{\partial Q}{\partial t} = \int_V dV \left\{ -Q(\mathbf{u} \cdot \nabla)Q + \eta Q \nabla^2 Q \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \int_V dV \nabla \cdot Q^2 \mathbf{u} + \eta \int_{V \cup \hat{V}} dV Q \nabla^2 Q \\ &= -\frac{1}{2} \int_S dS Q^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} + \eta \int_{S_\infty} dS Q(\mathbf{n} \cdot \nabla)Q - \eta \int_{V \cup \hat{V}} dV (\nabla Q)^2 \\ &= -\eta \int_{V \cup \hat{V}} dV (\nabla Q)^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (125)$$

Das Oberflächenintegral über S verschwindet weil $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ auf S . Wir haben zur rechten Seite das Integral von $\eta \nabla^2 Q$ über \hat{V} addiert, was erlaubt ist wegen (124); das Integral über S_∞ verschwindet weil $Q \propto r^{-2}$ für $r \rightarrow \infty$. Aus (125) folgt $Q \rightarrow 0$, wieder abgesehen von unphysischen Singularitäten: ohne poloidale Geschwindigkeiten kann \mathbf{B}_p nicht standhalten.

Es soll jetzt noch bewiesen werden dass auch $\mathbf{B}_t \rightarrow 0$. Dazu setzen wir $\mathbf{B}_p = 0$ und $\mathbf{B}_t = -\mathbf{r} \times \nabla T$ (§4.4) in der Induktionsgleichung für \mathbf{B}_t :

$$\frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_t \times \mathbf{B}_t) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}_t. \quad (126)$$

Bemerke dass

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t \times \mathbf{B}_t &\stackrel{C3}{=} -\mathbf{r}(\mathbf{u}_t \cdot \nabla) T \\ \Rightarrow \nabla \times (\mathbf{u}_t \times \mathbf{B}_t) &\stackrel{J8}{=} \mathbf{r} \times \nabla(\mathbf{u}_t \cdot \nabla) T, \end{aligned} \quad (127)$$

und

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla T)_i &= \epsilon_{ijk} \nabla_m \nabla_m r_j \nabla_k T = \epsilon_{ijk} \nabla_m (\delta_{mj} \nabla_k T + r_j \nabla_m \nabla_k T) \\ &= \epsilon_{ijk} (2 \nabla_j \nabla_k T + r_j \nabla_m \nabla_m \nabla_k T) = \epsilon_{ijk} r_j \nabla_k \nabla^2 T \\ &= (\mathbf{r} \times \nabla)_i \nabla^2 T. \end{aligned} \quad (128)$$

Die Induktionsgleichung (126) lautet jetzt:

$$-\mathbf{r} \times \nabla \frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{r} \times \nabla(\mathbf{u}_t \cdot \nabla) T - \eta (\mathbf{r} \times \nabla) \nabla^2 T. \quad (129)$$

Es folgt

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}_t \cdot \nabla)T = \eta \nabla^2 T + f(r), \quad (130)$$

wo $f(r)$ eine willkürliche Funktion ist. Wir multiplizieren mit T und integrieren über V . Laut (60) dürfen wir immer annehmen dass das Integral von T über eine Kugeloberfläche verschwindet. Aus (C4) folgt dann

$$\int_V dV T f(r) = 0, \quad (131)$$

und es ergibt sich [verwende (C1) und $T \nabla^2 T = \nabla \cdot T \nabla T - (\nabla T)^2$ (J7)]

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V dV T^2 = - \int_S dS T^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_t - \eta \int_V dV (\nabla T)^2 = -\eta \int_V dV (\nabla T)^2, \quad (132)$$

und somit $T, \mathbf{B}_t \rightarrow 0$. Bemerkungen:

- 1) Wenn es nur differentielle Rotation gibt ($\Rightarrow \mathbf{u}_p = 0$) dann keine Dynamowirkung, weil \mathbf{B}_p nicht regeneriert wird.
- 2) Das Theorem ist auch gültig wenn $\eta = \eta(r)$, aber nicht wenn $\eta = \eta(\theta, \phi)$ (siehe Bullard und Gellman). Für $\eta = \eta(r, \theta)$ ist es wahrscheinlich gültig²⁰.
- 3) Ein analoges Theorem gibt es für Strömung in einer Ebene (d.h. $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$)²¹.
- 4) Ein vergleichbares Theorem gibt es nicht wenn \mathbf{u} auf Zylinderoberflächen liegt. Der Grund ist dass der Diffusionsoperator in Zylinderkoordinaten Feldkomponenten senkrecht zur Rotationsachse ($\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{B}$) und azimuthale Feldkomponenten ($\mathbf{e}_s \times \mathbf{B}$) vermischt.

5.5 Dipolmoment des Dynamos

Wir betrachten das Dynamoproblem (2.2) mit der Annahme

D1) V ist ein Kugel mit Radius R .

Die formale Lösung der MHD-Ampère-Gleichung $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$ (12) ist

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (133)$$

Durch Substitution von

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma), \quad (134)$$

erhalten wir die Multipolentwicklung des Vektorpotentials, wo $r_{<} = \min(r, r')$, $r_{>} = \max(r, r')$, $\gamma = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $P_0 = 1$ und $P_1(\cos \gamma) = \cos \gamma$. Ausserhalb V gilt $r_{<} = r$, $r_{>} = r' \Rightarrow$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots, \quad (\text{in } \hat{V}). \quad (135)$$

Der erste Term liefert keinen Beitrag an \mathbf{A} weil

$$\int_V dV J_i = \int_V (\mathbf{J} \cdot \nabla) r_i = \int_V dV \nabla \cdot r_i \mathbf{J} = \int_S dS r_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (136)$$

Der zweite Term liefert den Dipolbeitrag \mathbf{A}_1 . Weil

$$\begin{aligned} \int_V dV r_i J_j &= \int_V dV r_i (\mathbf{J} \cdot \nabla) r_j = \int_V dV r_i \nabla \cdot r_j \mathbf{J} = \int_S dS r_i r_j \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} - \int_V dV r_j (\mathbf{J} \cdot \nabla) r_i \\ &= - \int_V dV r_j J_i = \frac{1}{2} \int_V dV (r_i J_j - r_j J_i) \end{aligned} \quad (137)$$

²⁰Donner und Brandenburg, 1991, GAFD **50**, 121-9

²¹Zel'dovich, Ya.B., 1957, *Sov. Phys. JETP* **4**, 460-2; *Moffat* §6.8

und $\mathbf{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) = -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{r}'$, ist \mathbf{A}_1 zu schreiben als

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V dV' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') = -\frac{\mu_0}{8\pi r^3} \mathbf{r} \times \int_V dV' \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \\ &= -\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{m}}{r^3} \quad (\text{in } \hat{V}) \\ \Rightarrow \mathbf{B}_1 &\stackrel{\text{J11}}{=} -\nabla \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \stackrel{\text{J9}}{=} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{m}}{r^3} \quad (\text{in } \hat{V}), \end{aligned} \quad (138)$$

wo $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ und \mathbf{m} das Dipolmoment des Dynamos ist,

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_V dV \mathbf{r} \times \mathbf{J}. \quad (139)$$

[Nebenbei sei aufgemerkt dass (138) ein Potentialfeld ist, d.h. $\mathbf{B}_1 = -\nabla \Phi_1$ mit

$$\Phi_1 = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{1}{r}.] \quad (140)$$

Wir wollen uns jetzt \mathbf{m} näher ansehen. Dazu beweisen wir zuerst die Identität

$$\mathbf{m} = \frac{3}{8\pi} \int_V dV \mathbf{B}. \quad (141)$$

Substitution von $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ und Anwendung von Gauss und (133) ergeben

$$\begin{aligned} \int_V dV \mathbf{B} &= \int_S dS \mathbf{n} \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S dS \mathbf{n} \times \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \int_S dS \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (142)$$

Im Integral über S substituieren wir (134), wobei $dS = R^2 d\Omega$ (D1):

$$\int_S dS \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{R^2 r_{<}^i}{r_{>}^{i+1}} \int d\Omega P_l(\cos \gamma) \mathbf{n}. \quad (143)$$

Der Normalvektor auf der Kugeloberfläche ist $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \phi + \mathbf{e}_z \cos \theta$; wegen Orthogonalität der Legendrepolynome bleibt nur $l = 1$ übrig. Wir substituieren $\cos \gamma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$, $r_{>} = r = R$ und $r_{<} = r'$:

$$\int_S dS \frac{n_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = r' \int d\Omega n_i \cos \gamma = r' n'_j \int d\Omega n_i n_j = \frac{4\pi}{3} r' n'_i = \frac{4\pi}{3} r'_i. \quad (144)$$

In (144) benützen wir $\int d\Omega n_i n_j = 4\pi \delta_{ij}/3$, was einfach nachzuprüfen ist durch Integration. Substitution von (144) in (142) ergibt

$$\int_V dV \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{3} \int_V dV \mathbf{J} \times \mathbf{r} = \frac{8\pi}{3} \mathbf{m}, \quad (145)$$

womit (141) bewiesen ist. Schliesslich schreiben wir \mathbf{m} noch mal in einer etwas anderen Form durch Anwendung folgender Identität:

$$\int_V dV B_i = \int_V dV (\mathbf{B} \cdot \nabla) r_i = \int_V dV \nabla \cdot r_i \mathbf{B} = \int_S dS r_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}, \quad (146)$$

und daher

$$\mathbf{m} = \frac{3}{8\pi} \int_S dS \mathbf{r} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}). \quad (147)$$

In der idealen MHD ($\eta = 0$) gilt Erhaltung des magnetischen Flusses für jede Oberfläche im Dynamo, also auch separat für die Teile von S wo $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} > 0$ (S_+) und die wo $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} < 0$ (S_-):

$$\Phi_+ = \int_{S_+} dS \cdot \mathbf{B} = \text{konstant} \quad \text{und} \quad \Phi_- = \int_{S_-} dS \cdot \mathbf{B} = \text{konstant}, \quad (148)$$

wo $\Phi_+ + \Phi_- = 0$ wegen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Es folgt dass auch

$$\Phi_0 = \Phi_+ - \Phi_- = \int_S dS |\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}| = 2\Phi_+ = \text{konstant.} \quad (149)$$

Feldlinien die sich anfänglich innerhalb V befinden können also später V nicht verlassen²². Die Flussserhaltung hat eine wichtige Folge für \mathbf{m} . Der Absolutwert von \mathbf{m} kann laut (147) jetzt so abgeschätzt werden:

$$|\mathbf{m}| \leq \frac{3R}{8\pi} \int_S dS |\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}| = \frac{3R\Phi_+}{4\pi} = m_{\max}. \quad (150)$$

Das magnetische Dipolmoment ist in der idealen MHD also begrenzt und erreicht seinen Maximalwert wenn Φ_+ auf dem einem und Φ_- auf dem anderen Pol konzentriert sind. Wenn wir (141) nach t ableiten ergibt sich [substituiere die Induktionsgleichung (16)]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}}{dt} &= \frac{3}{8\pi} \int_V dV \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{3}{8\pi} \int_V dV \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{3\eta}{8\pi} \int_V dV \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= \frac{3}{8\pi} \int_S dS \mathbf{u} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) - \frac{3\eta}{8\pi} \int_S dS \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (151)$$

Wenn $\eta = 0$ kann \mathbf{m} nicht weiter anwachsen als bis zum Maximalwert m_{\max} . Es wird dazu eine Strömung benötigt mit der Eigenschaft $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{m})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) \geq 0$ überall auf S , damit Φ_+ und Φ_- auf gegenseitige Polen konzentriert werden. Das Dipolmoment kann nur über m_{\max} hinaus wachsen wenn die magnetische Feldlinien nicht in V eingeschlossen sind ($\eta \neq 0$). Wenn $\eta = 0$ dann ist der Dynamo praktisch unsichtbar für einen äusseren Beobachter!

²²Bondi, H. und Gold, T., 1950, MNRAS **110**, 607-11

6 Fast dynamos

6.1 Schnelle und langsame Dynamos

Die Suche nach einer Lösung des Dynamoproblems kann man betrachten als eine Stabilitätsanalyse der Induktionsgleichung (16) um $\mathbf{B} = 0$. Ungenau formuliert: wenn \mathbf{B} eine instabile Lösung ist erfolgt Dynamowirkung; wenn $\mathbf{B} = 0$ stabil ist erfolgt keine Dynamowirkung. Es liegt nahe dazu eine Wachstumsrate γ für \mathbf{B} zu definieren. In Übereinstimmung mit der Definition des Dynamoproblems (2.2) geschieht dies mit Hilfe der magnetischen Energie:

$$\gamma(\eta) = \sup_{\mathbf{B}_0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E_M}{2t}, \quad (152)$$

das heisst γ ist das sup über alle Anfangsbedingungen $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$, wobei das $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup$ dazu dient um auch periodische Lösungen zuzulassen. Das Kriterium für Dynamowirkung ist also $\gamma(\eta) \geq 0$. Eine interessante Frage ist was geschieht wenn $\eta \downarrow 0$. Dazu definiert man

$$\gamma_0 = \liminf_{\eta \rightarrow 0} \gamma(\eta). \quad (153)$$

Man unterscheidet zwei Möglichkeiten. Wenn $\gamma_0 = 0$ spricht man von einem *slow dynamo*; wenn $\gamma_0 > 0$ von einem *fast dynamo* (FD). Durch das inf in der Definition kann auch ein Dynamo für den $\lim_{\eta \rightarrow 0} \gamma(\eta)$ nicht existiert als schnell eingestuft werden wenn $\gamma(\eta) \geq \gamma_0 > 0$. In einem FD nähert sich γ für η klein (R_M gross) also zu einer Konstante *unabhängig von η* . Der Gedanke ist dass im FD $\gamma_0 \propto u/L$, wo $(u/L)^{-1}$ die typische Advektionszeit der Strömung ist. Der Unterschied zwischen schnellen und langsamen Dynamos wird daher auch so formuliert: γ wird in einem FD bestimmt von der Advektionszeit, in einem SD von der Diffusionszeit ($\tau_d \approx L^2/\eta$). Die Motivation zu dieser Klassifizierung stammt aus der Beobachtung dass die typischen Zeitskalen des Sonnendynamos (Monate - Jahre) sehr viel kürzer sind als $\tau_d \approx 4 \cdot 10^9$ Jahre, aber vergleichbar zu den Zeitskalen der Konvektion und der differentiellen Rotation (Wochen - Monate). Durch eine Untersuchung von schnellen Dynamos hofft man vor allem besseres Verständnis der solaren Dynamowirkung zu erhalten.

In einer Stabilitätsanalyse spielen Terme zweiter Ordnung keine Rolle. Wir können daher die Rückkopplung von \mathbf{B} auf \mathbf{u} durch die Lorentzkraft vernachlässigen und uns beschränken auf eine kinematische Betrachtung der Induktionsgleichung (16). Das Dynamoproblem reduziert dann zu der Suche nach Strömungen \mathbf{u} für die $\gamma(\eta) \geq 0$.

Die Theorie des FD sucht eine Antwort auf folgende Fragen: Kann die Existenz von FDs bewiesen werden für bestimmte Strömungen? Welche Eigenschaften soll \mathbf{u} haben damit ein FD entsteht? Was ist die typische Struktur von \mathbf{B} in einem FD? Zur Zeit sind keine dieser Fragen endgültig beantwortet. Ein rezentes Buch über FD-Theorie aus dem das meiste in diesem Kapitel stammt ist *Stretch, Twist, Fold*. Bemerkungen:

- 1) Aus dem Ergebnis von §5.1 können wir eine Obergrenze für $\gamma(\eta)$ ableiten, indem wir in (82) \leq durch $=$ ersätzen und die Gleichung lösen:

$$\gamma(\eta) \leq \omega - s_0(\eta). \quad (154)$$

Die Ableitung in §5.1 galt für inkompressible Strömung in einem Kugel ($s_0 = \eta\pi^2/R^2$), aber ist einfach zu erweitern zum kompressibelen Fall und allgemeinen Volumen, so dass (154) gültig bleibt wenn man ω definiert als grösster Eigenwert von $e_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\nabla \cdot \mathbf{u}$ und s_0 als die geometrieabhängige kleinste Diffusionsrate eines frei zerfallendes Feldes.

- 2) Man soll γ_0 streng unterscheiden von $\gamma(0)$, die Wachstumsrate in der idealen MHD, denn es gilt nicht unbedingt $\lim_{\eta \rightarrow 0} \gamma(\eta) = \gamma(0)$!
- 3) Ein Beispiel eines langsamen Dynamos ist der Scheibendynamo.

6.2 Der *stretch-twist-fold*-Mechanismus

Ein elementarer Mechanismus der wahrscheinlich vielen FDs zugrundeliegt ist der *stretch-twist-fold* (STF)-Mechanismus. Betrachte einen magnetischen Flussring in einem inkompressibelen idealen Geleiter (Abb. 20). Zuerst wird der Ring gestreckt (S) und demzufolge das Magnetfeld verstärkt. Danach wird der Ring gedreht (T) und gefaltet (F) um die ursprüngliche Konfiguration möglichst

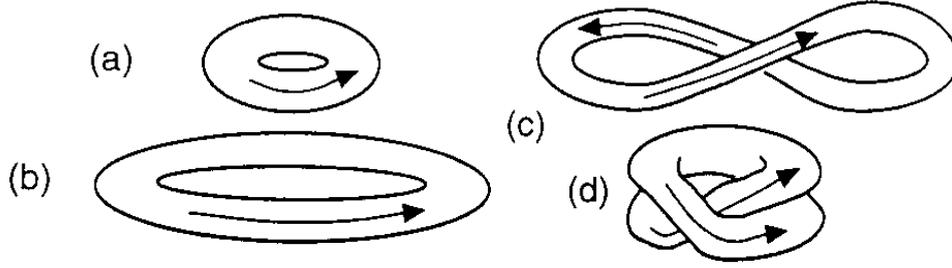


Abbildung 20: Der STF-Mechanismus. Ein Flussring wird gestreckt (S), gedreht (T) und gefaltet (F). (*Stretch, Twist, Fold*)

genau wieder herzustellen. Wenn $L \rightarrow 2L$ dann gilt wegen Inkompressibilität $S \rightarrow S/2$, so dass wegen Flußerhaltung $B \rightarrow 2B$ und daher $E_M \rightarrow 4E_M$. Wenn T die Periode des STF-Zyklus ist ergibt sich

$$E_M \propto 2^{2t/T} \quad \Rightarrow \quad \gamma(0) = \frac{\ln 2}{T}. \quad (155)$$

Stellt der STF-Mechanismus einen FD da? Betrachte dazu einen nicht-idealen aber guten Geleiter. Dort wo der Ring gefaltet wird entstehen starke Gradienten in \mathbf{B} und ist magnetische Diffusion $\eta \nabla^2 \mathbf{B}$ wichtig. Die magnetischen Feldlinien werden sich dort reorganisieren (*reconnection*) so dass ein gleichmässigeres Feld entsteht ohne scharfe Gradienten. Da dies nur in einem kleinen Bereich geschieht ist der damit verbundene Energieverlust wahrscheinlich gering. Wenn das stimmt ergibt sich indertat ein FD mit [siehe (152)]:

$$\gamma_0 \approx \frac{\ln 2}{T}. \quad (156)$$

Bemerkungen:

- 1) Der STF-Mechanismus ist essentiell dreidimensional;
- 2) Ein Beispiel einer Strömung \mathbf{u} die den STF-Mechanismus realisiert ist zu finden bei Moffat und Proctor²³.

6.3 Exponentielle Streckung

In der STF-Strömung wird ein materielles Linienelement exponentiell gestreckt. Es ist zu erwarten dass diese Eigenschaft in jedem FD eine wichtige Rolle spielt. Um dies genauer zu untersuchen betrachten wir ein infinitesimales Linienelement $d\mathbf{l}$. Es gilt

$$\begin{aligned} d\mathbf{l}(t + \delta t) - d\mathbf{l}(t) &= \{\mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{r})\} \delta t = \delta t (d\mathbf{l}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} d\mathbf{l} &= (d\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (157)$$

Wir markieren jetzt die Koordinaten unterschiedlicher Bahnen in der Flüssigkeit durch den Anfangsort:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t); \quad \mathbf{a} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, 0). \quad (158)$$

Die *Cauchy-Lösung* von (157) ist dann

$$dl_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial r_i(\mathbf{a}, t)}{\partial a_j} da_j, \quad (159)$$

wie man durch Substitution nachprüfen kann [verwende die Kettenregel $(\partial r_j / \partial a_k) \nabla_j = \partial / \partial a_k$]. Wir wissen bereits dass in der idealen MHD die Feldlinien \mathbf{B} auch materielle Linien sind (§4.2). Das können wir nochmals deutlich machen indem wir die Induktionsgleichung anders schreiben.

²³Moffat, H.K. und Proctor, M.R.E., 1985, *J. Fl. Mech.* **154**, 493-507

In einem inkompressibelen Medium gilt $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ (J11), so dass (16) reduziert zu

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (160)$$

Die Gleichungen für $d\mathbf{l}$ und für \mathbf{B} sind also identisch wenn $\eta = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$; die Lösung lautet daher

$$B_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial r_i(\mathbf{a}, t)}{\partial a_j} B_j(\mathbf{a}, 0). \quad (161)$$

[im kompressibelen Fall gilt das Gleiche für \mathbf{B}/ρ]. Diese Lösung ist formal exakt aber nicht sehr hilfreich denn das Lösen der Induktionsgleichung wird ersetzt durch das Lösen einer nichtlinearen Differentialgleichung für die Lagrangebahnen,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t); \quad \mathbf{r}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{a}. \quad (162)$$

Ein exponentielles Anwachsen von $d\mathbf{l}(\mathbf{a}, t)$ erfordert dass die Lösungen von (162) sehr stark abhängig sind von den Anfangsbedingungen, das heisst die Lagrangebahnen müssen chaotisch sein für bestimmte \mathbf{a} . Ein Mass für die Streckung der Linienelemente liefert die Jacobi-Matrize oder Dehnungstensor,

$$J_{ij}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial r_i(\mathbf{a}, t)}{\partial a_j}. \quad (163)$$

Betrachte einen normierten Vektor \mathbf{e} der sich zu $t = 0$ in \mathbf{a} befindet. Der Vektor wird in der Flüssigkeit mitgeführt und nach einer Zeit t ist seine Länge $|\mathbf{J}(\mathbf{a}, t)\mathbf{e}|$. Man definiert den *Lyapunov-Exponent* als

$$\Lambda_L(\mathbf{a}) = \max_{\mathbf{e}} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\mathbf{J}(\mathbf{a}, t)\mathbf{e}|}{t}. \quad (164)$$

Strömungen für die $\Lambda_L(\mathbf{a}) > 0$ sind gute Kandidaten für schnelle Dynamos.

6.4 Beispiele

Sind wir jetzt in der Lage zu entscheiden ob eine bestimmte Strömung ein FD ist? Dazu werden wir einige Beispiele betrachten, sowohl analytisch als numerisch.

Die numerische Untersuchung schneller Dynamos hat besondere Schwierigkeiten. Um einen FD zu identifizieren muss so lange integriert werden bis $\gamma(\eta)$ konvergiert (152). Dann muss die Integration wiederholt werden für möglichst kleine Werte von η , wobei hoffentlich Konvergenz $\gamma(\eta) \rightarrow \gamma_0$ beobachtet wird. Je kleiner aber η , desto feiner muss das Gitter sein damit auch die kleinste Länge in der Strömung (bei der $R_M \approx 1$) aufgelöst wird. Letztendlich kann aber keine numerische Simulation im mathematischen Sinne einen Beweis für schnelle Dynamowirkung liefern! Das erklärt warum die Existenz des FD noch immer unbewiesen ist.

6.4.1 Beltramiwelle

Eine elementare inkompressible Strömung ist die *Beltramiwelle*,

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{e}_y \sin qx + \mathbf{e}_z \cos qx, \quad (165)$$

mit der *Beltrami-Eigenschaft* $\nabla \times \mathbf{u} = q\mathbf{u}$. Wegen dieser Eigenschaft hat die Strömung eine nicht-verschwindende kinetische Helizität,

$$h = \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (166)$$

was wichtig ist für Dynamowirkung, wie sich herausstellen wird. Offensichtlich gilt $|h| \leq |\mathbf{u}||\nabla \times \mathbf{u}|$, aber für die Beltramiwelle gilt die Gleichheit: sie hat maximale Helizität. Die Beltramiwelle verursacht trotzdem keine Dynamowirkung, weil \mathbf{u} nur zwei Komponenten hat. Das Antidynamotheorem für inkompressible Bewegung in einer Ebene (§5.4, Bem. 3) besagt dass $\mathbf{B} \rightarrow$ für $\eta \neq 0$. Wir wollen trotzdem \mathbf{B} lösen für den Fall $\eta = 0$. Gleichung (162) kann in diesem speziellen Beispiel analytisch gelöst werden; die Lagrangebahnen sind

$$\mathbf{r}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{a} + \mathbf{e}_y t \sin qa_x + \mathbf{e}_z t \cos qa_x, \quad (167)$$

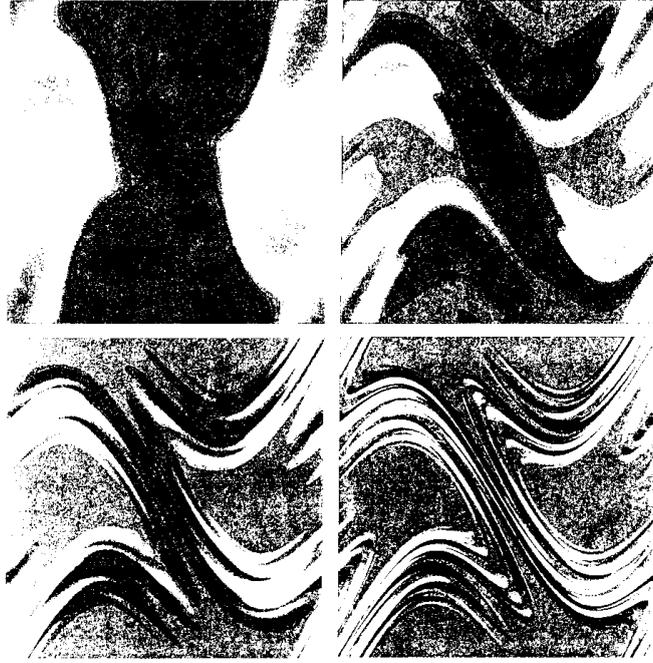


Abbildung 21: Eigenfunktionen $b_x(x, y)$ der MW+ Strömung im Viereck $0 \leq x, y \leq 2\pi$ für $k = 0.8$ und $R_M = 10$ (a), 10^2 (b), 10^3 (c) und 10^4 (d) (*Stretch, Twist, Fold*)

und der Jacobian (163) ist

$$\mathbf{J}(\mathbf{a}, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ qt \cos qa_x & 1 & 0 \\ -qt \sin qa_x & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (168)$$

Wie erwartet ist $\Lambda_L = 0$: die Beltramiwelle ist kein FD. Das Magnetfeld (161) ist

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{a}, 0) + qtB_x(\mathbf{a}, 0)(\mathbf{e}_y \cos qa_x - \mathbf{e}_z \sin qa_x). \quad (169)$$

B_x bleibt unverändert aber die Komponenten von \mathbf{B} in der yz -Ebene wachsen $\propto tB_x$. Das Beispiel der Beltramiwelle ist anschaulich aber funktioniert nicht als Dynamo wenn $\eta > 0$, weil dann $B_x \rightarrow 0$ und daher auch $\mathbf{B} \rightarrow 0$.

6.4.2 MW+ Strömung

Ein Beispiel das mehr Erfolg verspricht besteht aus pulsierenden Beltramiwellen:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = 2 \cos^2 t (\mathbf{e}_y \sin x + \mathbf{e}_z \cos x) + 2 \sin^2 t (\mathbf{e}_x \sin y - \mathbf{e}_z \cos y). \quad (170)$$

Diese Strömung enthält zwei modulierten Beltramiwellen mit $q = +1$ (daher der Name MW+) und unterschiedlichen Phasen. Sie ist periodisch in x, y und t und unabhängig von z . Gleichung (162) kann jetzt nicht mehr analytisch, nur noch numerisch gelöst werden. Abb. (21) zeigt das Ergebnis einer Simulation der Induktionsgleichung im Viereck $x, y \in [0, 2\pi]$, wobei die z -Abhängigkeit entfernt worden ist durch den Ansatz

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = e^{ikz} \mathbf{b}(x, y, t). \quad (171)$$

Aus Abb. (22) geht hervor dass der MW+ Dynamo wahrscheinlich schnell ist. Wir erwarten darum chaotische Lagrangebahnen. Um das zu untersuchen projiziert man für unterschiedliche \mathbf{a} die Lagrange-Koordinate $\mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$ auf die xy -Ebene, wo $t = 0, \pi, 2\pi \dots$. Der so entstandene *Poincaré-Durchschnitt* (Abb. 23) zeigt grosse chaotische Gebiete die auf scheinbar zufällige Weise von Bahnen gefüllt werden, womit der chaotische Charakter der Strömung bestätigt ist. Es gibt auch nicht-chaotische Bahnen die gelegen sind auf invarianten Kurven. Indertat ist \mathbf{B} stark in den chaotischen Gebieten während es schwach ist in der Nähe der Inseln.

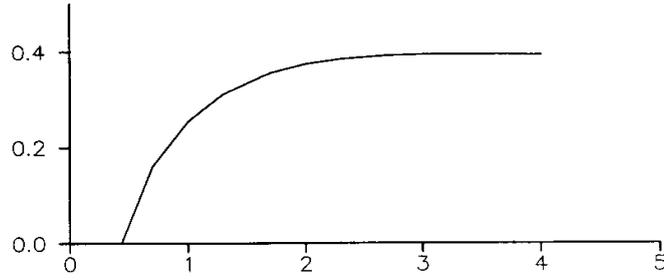


Abbildung 22: Wachstumsrate $\gamma(R_M, k = 0.8)$ als Funktion von $\log R_M$ für die MW+ Strömung (*Stretch, Twist, Fold*)

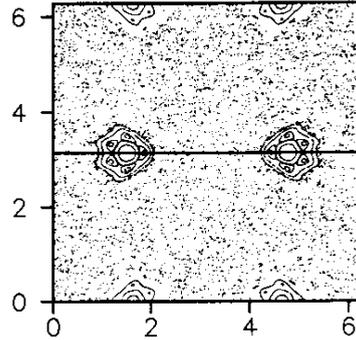


Abbildung 23: Poincaré-Durchschnitt in der xy -Ebene mit Zeitintervall π für die MW+ Strömung (*Stretch, Twist, Fold*)

6.5 Abbildungen

Die Lagrangebahnen der Strömung \mathbf{u} definieren eine Abbildung

$$M_t : \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{r}(\mathbf{a}, t). \quad (172)$$

Anstatt sich mit Strömungen zu beschäftigen kann man auch fragen welche Abbildungen zu schneller Dynamowirkung führen. Das hat Anlass gegeben zum Begriff der *map dynamos*. Eine Übersicht ist zu finden bei Bayly²⁴. In dieser neuen Variante der Dynamotheorie untersucht man die Dynamowirkung von (volumenerhaltenden) Abbildungen, auch von solchen die nicht zu einer realistischen (kontinuierlichen) Strömung korrespondieren. Die Zeit wird diskretisiert und eine

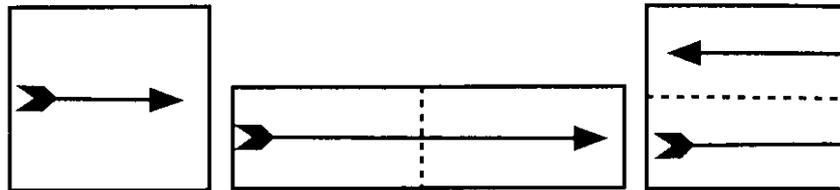


Abbildung 24: Die *folded-baker*-Abbildung (*Stretch, Twist, Fold*)

Abbildung M wird wiederholt auf alle Punkte in einem Volumen angewendet. Das Magnetfeld wird zu jedem Zeitschritt transformiert wie in der idealen MHD (161):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_{i+1}, t_{i+1}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}_i, t_{i+1}) \mathbf{B}(\mathbf{r}_i, t_i) = \mathbf{J}(M^{-1} \mathbf{r}_{i+1}, t_{i+1}) \mathbf{B}(M^{-1} \mathbf{r}_{i+1}, t_i). \quad (173)$$

Zwischen den diskreten Zeiten zu denen die Deformation stattfindet kann ein Diffusionsoperator auf das Magnetfeld losgelassen werden; siehe *Stretch, Twist, Fold* oder Bayly.

²⁴Bayly, B.J., 1994, in *Lectures*, S. 305-29

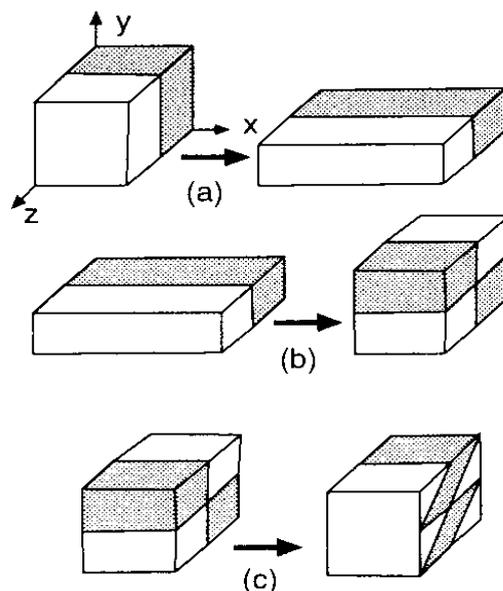


Abbildung 25: Die *stretch-fold-shear* (SFS)-Abbildung ($\alpha = 1$). **a)** *stretch*; **b)** *fold*; **c)** *shear*. Das Vorzeichen der x -Komponente des Feldes ist $+$ in den grauen Regionen und $-$ in den weissen (*Stretch, Twist, Fold*)

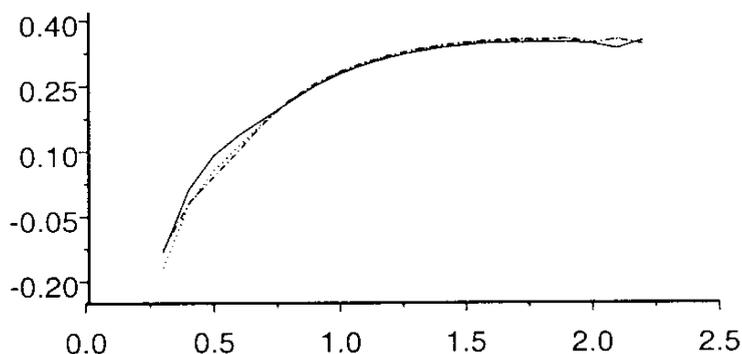


Abbildung 26: Wachstumsrate des Magnetfeldes für die SFS-Abbildung mit Diffusion, für $R_M = 10^5$ (durchgezogene Kurve) und $R_M = 10^5$ (punktierte Kurve) (*Stretch, Twist, Fold*)

Ein Beispiel ist die gefaltete Bäcker-Abbildung (*folded baker map*), im Viereck $x, y \in [0, 1]$ definiert durch

$$M_{\text{FB}} : (x, y) \rightarrow \begin{cases} (2x, y/2) & (0 \leq x \leq 1/2) \\ (2 - 2x, 1 - y/2) & (1/2 \leq x < 1) \end{cases} \quad (174)$$

Das Ergebnis dieser Abbildung wird gezeigt in Abb. (24). Diese Abbildung taugt nicht als Dynamo weil bei wiederholter Anwendung immer dünnere Streifen gebildet werden mit Magnetfeld von abwechselnder Polarität. Eine beliebig schwache Diffusion würde das Magnetfeld für $t \rightarrow \infty$ auslöschen. Überdies findet die Strömung in einer Ebene statt, so dass Dynamowirkung ausgeschlossen ist.

Ein Vergleich mit dem STF-Mechanismus zeigt dass M_{FB} zwar streckt und faltet aber nicht auf konstruktive Weise. Im STF-Mechanismus wird dies ermöglicht durch das Drehen des Flussringes. Ähnlich können wir die gefaltete Bäcker-Abbildung reparieren indem wir eine vertikale y -abhängige Translation hinzufügen (Abb. 25),

$$M_{\text{tr}} : (x, y, z) \rightarrow (x, y, z + \alpha f(y)), \quad (175)$$

wo $f(y) = y - 1/2$ und α ein freier Parameter ist. Sukzessive Anwendung von M_{FB} und M_{tr} liefert die *stretch-fold-shear* (SFS)- Abbildung $M_{\text{SFS}} = M_{\text{tr}}M_{\text{FB}}$,

$$M_{\text{SFS}} : (x, y, z) \rightarrow \begin{cases} (2x, y/2, z + \alpha f(y/2)) & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ (2 - 2x, 1 - y/2, z + \alpha f(1 - y/2)) & (\frac{1}{2} \leq x < 1) \end{cases} \quad (176)$$

Das Ergebnis einer numerischen Simulation der Induktionsgleichung (173) ist zu sehen in Abb. (26). Wahrscheinlich ist die SFS-Abbildung ein schneller Dynamo.

6.6 Nichtexistenz glatter instabiler Lösungen in der idealen MHD

Wenn $R_M \gg 1$ dann sind die magnetischen Feldlinien praktisch eingefroren. Advektion kann ein anfänglich homogenes Feld immer weiter aufwickeln, wobei immer kleinere Längenskalen und schärfere Gradienten entstehen. Da $\eta \neq 0$, verhindert Diffusion, wie schwach sie auch ist, die Bildung von Längen $L \lesssim \eta/u$ (für die $R_M \gtrsim 1$), so dass kontinuierliche Lösungen \mathbf{B} zu erwarten sind, die glatt aussehen bei genügend starker Vergrößerung. In der idealen MHD ($\eta = 0$) dagegen können *beliebig* kleine Längen entstehen. Moffat und Proctor²⁵ haben für den Fall

- E1) $\eta = 0$ (Ideale MHD);
- E2) $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0$ (Anelastische Annäherung);
- E3) $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ (Stationäre Strömung);
- E4) $\mathbf{u} \times \mathbf{B} \neq 0$ in V

bewiesen dass die Induktionsgleichung keine glatte wachsende Lösungen hat. Bedingung (E4) ist etwas merkwürdig aber wird im Beweis benötigt; sie schliesst aus dass $\mathbf{u} = 0$ oder $\mathbf{B} = 0$ oder $\mathbf{u} \parallel \mathbf{B}$. Wegen (E3) können wir die zeitliche und räumliche Abhängigkeit von \mathbf{B} trennen,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = e^{pt} \mathbf{b}(\mathbf{r}), \quad (177)$$

so dass die Induktionsgleichung (17) ein Eigenwertproblem darstellt:

$$p\mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + \eta \nabla^2 \mathbf{b}. \quad (178)$$

Beachte dass \mathbf{b} im allgemeinen komplex ist. Wegen (E1) reduziert (178) zu

$$p\mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}). \quad (179)$$

Weil $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ ist (179) äquivalent zu $p\mathbf{a} = \mathbf{u} \times \mathbf{b} - \nabla \phi$. Wir dürfen zu \mathbf{a} immer eine Eichtransformation $\nabla \phi/p$ addieren, so dass

$$p\mathbf{a} = \mathbf{u} \times \mathbf{b}. \quad (180)$$

Es folgt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$. Diese Eigenschaft, auch *Integrierbarkeitsbedingung von Frobenius* genannt, erlaubt im Fall $\mathbf{a} \neq 0$ (darum ist (E4) notwendig²⁶) folgende *globale* Representation von \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = f \nabla g \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = \nabla f \times \nabla g. \quad (181)$$

Substitution in (180) ergibt

$$\begin{aligned} pf \nabla g &= \mathbf{u} \times (\nabla f \times \nabla g) = (\nabla f) (\mathbf{u} \cdot \nabla) g - (\nabla g) (\mathbf{u} \cdot \nabla) f \\ \Rightarrow pf \nabla f \times \nabla g &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla f) \nabla f \times \nabla g \end{aligned}$$

Weil $\mathbf{b} \neq 0$ wegen (E4) ergibt sich

$$pf = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) f \quad \text{und} \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla) g = 0. \quad (182)$$

Multiplikation von pf mit f^* und Addierung der komplex konjugierten Gleichung liefert

$$(p + p^*) |f|^2 = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) |f|^2. \quad (183)$$

²⁵Moffatt, K. and Proctor, M.R.E., 1985, *Journ. Fluid Mech.* **154**, 493-507

²⁶Diese zusätzliche Bedingung der Globalität fehlt in Moffat und Proctor (1985); siehe *Stretch, Twist, Fold*

Wir multiplizieren (183) mit ρ und integrieren über V , was erlaubt ist weil f eine *global* definierte Funktion ist [verwende (E2) und Gauss]

$$(p + p^*) \int_V dV \rho |f|^2 = - \int_S dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} |f|^2 = 0. \quad (184)$$

Instabilität erfordert $p + p^* > 0$ und daher $f = 0$ in $V \Rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b} = 0$ in V . Die Schlussfolgerung ist dass es in V keine instabile Lösung gibt von (179). Dieses Ergebnis ist ziemlich schwach wegen Bedingung (E4). Die Vermutung ist aber dass die Nicht-Existenz glatter Eigenfunktionen in der idealen MHD allgemein gültig ist.

7 Statistische Dynamotheorie

Die Strömung in einer stellaren Konvektionsschicht enthält zeitlich und räumlich rasch variierende Beiträge und eine realistische Modellierung der Erzeugung des Magnetfeldes in einer stellaren Konvektionsschicht ist zur Zeit nicht möglich. Im vorigen Kapitel haben wir gesehen dass strecken und konstruktives Falten typische Eigenschaften sind von Strömungen die zu Dynamowirkung führen. Solche Strömungen sind kompliziert und eine analytische Lösung der Induktionsgleichung ist nur in speziellen Fällen möglich. Wir sind aber interessiert am grossskaligen Magnetfeld des Sternes. Dies liegt nahe dass wir versuchen zu mitteln über die rasch variierenden Beiträge der Strömung. Hoffentlich entsteht dann eine Gleichung für das mittlere Magnetfeld die analytisch besser zu hantieren ist. Als Einführung zum Mittelungsverfahren behandeln wir zuerst die Reynolds-Regeln und die Räumliche Mittelung; danach die Ensemblemittelung.

7.1 Reynolds-Regeln und Mittelung der Induktionsgleichung

Betrachte willkürliche Funktionen $f(\mathbf{r}, t)$ und $g(\mathbf{r}, t)$. Eine Mittelungsprozedur muss folgende Bedingungen, die *Reynolds-Regeln*, erfüllen:

$$\text{R1)} \quad \langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle,$$

$$\text{R2)} \quad \langle \langle f \rangle \langle g \rangle \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle,$$

$$\text{R3)} \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t}.$$

Aus (R2) folgt $\langle \langle f \rangle \rangle = \langle f \rangle$. Wenn wir schreiben $f = \langle f \rangle + f_1$ dann folgt aus (R1) und (R2) $\langle f_1 \rangle = 0$. Aus (R2) folgen auch noch $\langle \langle f \rangle \langle g \rangle \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle$ und $\langle \langle f \rangle g_1 \rangle = 0$. Wir mitteln jetzt die Induktionsgleichung (17) und verwenden dabei die Reynolds-Regeln. Wir schreiben

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \quad (185)$$

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \quad (186)$$

Anwendung der Reynoldsregeln ergibt

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times \left\{ \mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_0 + \langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle \right\} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}_0, \quad (187)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times \left\{ \mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 - \langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle \right\} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}_1. \quad (188)$$

Es ist die Aufgabe der Theorie der mittleren Felder um eine geschlossene Gleichung (oder ein geschlossenes Gleichungssystem) für \mathbf{B}_0 abzuleiten. Wie (187) zeigt, soll dazu der Term $\langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle$, auch mittlere elektromotorische Kraft (EMK) genannt, in \mathbf{B}_0 ausgedrückt werden²⁷.

7.2 Räumliche Mittelung

In diesem Kapitel wollen wir das Verfahren der Mittelung studieren am Beispiel eines einfachen räumlich periodischen Dynamos. Betrachte folgende vorgeschriebene Strömung $\mathbf{u}(x, y)$

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_x A \sin px \cos py - \mathbf{e}_y A \cos px \sin py + \mathbf{e}_z C \sin px \sin py. \quad (189)$$

Diese Strömung, auch bekannt als 'G.O. Roberts-Dynamo'²⁸, ist inkompressibel ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), periodisch in der xy -Ebene mit Wellenlänge $2\pi/p$ und zweidimensional (unabhängig von z). Die übliche Annahme dass der Dynamo sich in einem endlichen Volumen V befindet (§3) wird in diesem Modell ersetzt durch die Bedingung dass kein Energietransport stattfindet zwischen den Teilvolumina. Aus (189) folgt

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{e}_x pC \sin px \cos py - \mathbf{e}_y pC \cos px \sin py + \mathbf{e}_z 2pA \sin px \sin py, \quad (190)$$

so dass die Helizität h ist

$$h = \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = pAC(\sin^2 px + \sin^2 py). \quad (191)$$

²⁷Diese Definition der EMK, geläufig in der Dynamotheorie (siehe z.B. *Moffat*, S. 148) unterscheidet sich von der üblichen in der Elektrodynamik, nach der die EMK $= \int_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}' = \int_C d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$

²⁸Roberts, G.O., 1972, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **A271**, 411-54

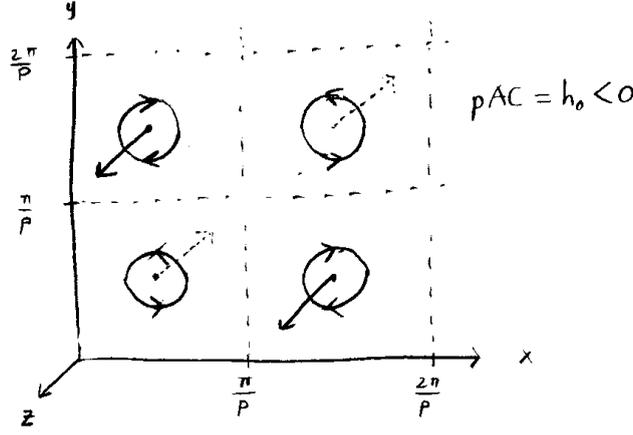


Abbildung 27: Räumlich periodische Strömung (189)

Helizität (Schraubensinn) ist eine Eigenschaft zyklonischer Strömungen. Bemerke dass \mathbf{u} das Zeichen wechselt in der xy -Ebene, h aber zeichenfest ist. Wenn $\mathbf{u} \parallel \nabla \times \mathbf{u}$ hat \mathbf{u} die Beltrami-Eigenschaft (maximale Helizität); das geschieht wenn $C = \pm A\sqrt{2}$. Wir mitteln jede Grösse über eine Zelle in der xy -Ebene,

$$\langle f \rangle(z, t) = \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi/p} dx \int_0^{2\pi/p} dy f(\mathbf{r}, t). \quad (192)$$

Diese Definition erfüllt die Reynolds-Regeln, so dass wir (187-188) verwenden dürfen. Die mittlere Helizität ist

$$\langle h \rangle = h_0 = pAC. \quad (193)$$

Für (189) gilt $\mathbf{u}_0 = 0$. Wir schreiben darum $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$ und es ergibt sich

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times \langle \mathbf{u} \times \mathbf{B}_1 \rangle + \eta \nabla^2 \mathbf{B}_0, \quad (194)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times \left\{ \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_1 - \langle \mathbf{u} \times \mathbf{B}_1 \rangle \right\} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}_1. \quad (195)$$

Wir möchten eine konsistente Gleichung für \mathbf{B}_0 ableiten und brauchen daher eine Ausdrückung für die mittlere elektromotorische Kraft (EMK) $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{B}_1 \rangle$. Dazu substituieren wir für \mathbf{B}_1 die Lösung von (195); das Ergebnis ist am einfachsten wenn der zweite und dritte Term zur rechten Seite von (195) vernachlässigt werden, was erlaubt ist wenn

$$B_1 \ll B_0. \quad (196)$$

Auf die Bedeutung dieser Forderung kommen wir noch zurück; wenn sie erfüllt ist reduziert (195) zu

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right\} \mathbf{B}_1 = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0, \quad (197)$$

wo wir $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ verwendet haben. Diese Gleichung lösen wir mit dem Ansatz

$$\mathbf{B}_0(z, t) = \text{Re } \tilde{\mathbf{B}}_0 = \text{Re } \mathbf{b}_0 e^{i(kz + \omega t)} \quad (\mathbf{b}_0 \text{ konstant}), \quad (198)$$

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) = \text{Re } \tilde{\mathbf{B}}_1 = \text{Re } \mathbf{b}_1(x, y) e^{i(kz + \omega t)}. \quad (199)$$

Substitution in (197) liefert

$$\left\{ i\omega - \eta[\nabla_x^2 + \nabla_y^2 - k^2] \right\} \mathbf{b}_1 = (\mathbf{b}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} - ik u_z \mathbf{b}_0. \quad (200)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist zu schreiben als homogener Beitrag plus spezielle Lösung. Der homogene Beitrag beschreibt den Zerfall der Anfangsbedingung und ist nach einigen Diffusionszeiten nicht mehr wichtig. Wir betrachten daher nur die spezielle Lösung [verwende $(\nabla_x^2 + \nabla_y^2) \mathbf{u} = -2p^2 \mathbf{u}$]:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{(\mathbf{b}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} - ik u_z \mathbf{b}_0}{i\omega + \eta(2p^2 + k^2)} \approx \frac{(\mathbf{b}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}}{2\eta p^2}. \quad (201)$$

Auf der rechten Seite von (201) haben wir angenommen dass die typische Länge und Zeit der Variierungen von \mathbf{B}_0 gross sind verglichen mit der Zellgrösse bzw. der Diffusionszeit für eine Zelle:

$$|k| \ll p, \quad |\omega| \ll \eta p^2 = 1/\tau_d \quad (2\text{-Skalen-Annäherung}). \quad (202)$$

Die 2-Skalen-Annäherung ist sinnvoll weil uns nur das grossskalige Verhalten von \mathbf{B}_0 interessiert, aber streng genommen nicht notwendig in diesem Fall. Nach Multiplikation mit $\exp\{i(kz + \omega t)\}$ ergibt sich aus dem reellen Teil

$$\mathbf{B}_1 = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}}{2\eta p^2}. \quad (203)$$

Der Betrag von \mathbf{B}_1 ist jetzt abzuschätzen als $B_1/B_0 \approx u/\eta p$, die magnetische Reynoldszahl $R_M(p)$ bei der typischen Länge der Strömung π/p . Bedingung (196) sagt also $R_M(p) \ll 1$ (Diffusion dominiert über Advektion). Die mittlere EMK wird jetzt

$$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{B}_1 \rangle = \frac{1}{2\eta p^2} \langle \mathbf{u} \times (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} \rangle, \quad (204)$$

und ist also proportional zum mittleren Feld \mathbf{B}_0 . Diese Abhängigkeit definiert den α -Tensor:

$$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{B}_1 \rangle_i = \frac{\epsilon_{ijk}}{2\eta p^2} \langle u_j (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) u_k \rangle = \frac{\epsilon_{ijk} B_{0l}}{2\eta p^2} \langle u_j \nabla_l u_k \rangle = \alpha_{il} B_{0l} \quad (l = x, y) \quad (205)$$

$$\Rightarrow \alpha_{il} = \begin{cases} \frac{\epsilon_{ijk} \langle u_j \nabla_l u_k \rangle}{2\eta p^2} & (l = x, y) \\ 0 & (l = z) \end{cases} \quad (206)$$

Nach Substitution von (189) und Anwendung von (192) verschwinden Terme wie $\langle \sin^2 px \sin py \cos py \rangle$, $\langle \sin px \cos px \sin^2 py \rangle$ und $\langle \sin px \cos px \sin py \cos py \rangle$; es bleiben nur übrig

$$\langle u_x \nabla_y u_z \rangle = pAC \langle \sin^2 px \cos^2 py \rangle = pAC/4, \quad (207)$$

$$\langle u_y \nabla_x u_z \rangle = -pAC \langle \cos^2 px \sin^2 py \rangle = -pAC/4, \quad (208)$$

$$\langle u_z \nabla_x u_y \rangle = pAC \langle \sin^2 px \sin^2 py \rangle = pAC/4, \quad (209)$$

$$\langle u_z \nabla_y u_x \rangle = -pAC \langle \sin^2 px \sin^2 py \rangle = -pAC/4. \quad (210)$$

Es ergibt sich für den α -Tensor

$$\alpha = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wo } \alpha_0 = -\frac{1}{4} h_0 \tau_d. \quad (211)$$

α ist proportional zur mittleren Helizität. In der Gleichung für das mittlere Feld (194) setzen wir $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{B}_1 \rangle = \alpha \mathbf{B}_0$:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times \alpha \mathbf{B}_0 + \eta \nabla^2 \mathbf{B}_0. \quad (212)$$

Um die Lösung zu erhalten verwenden wir (198),

$$\nabla \times \alpha \tilde{\mathbf{B}}_0 = \alpha_0 \nabla \times (\tilde{B}_{0x} \mathbf{e}_x + \tilde{B}_{0y} \mathbf{e}_y) = ik\alpha_0 \mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{B}}_0, \quad (213)$$

so dass (212) liefert

$$(i\omega + \eta k^2) \mathbf{b}_0 = ik\alpha_0 \mathbf{e}_z \times \mathbf{b}_0. \quad (214)$$

Diese drei Gleichungen sollen eine nicht-triviale Lösung \mathbf{b}_0 haben; dann muss folgender Determinant verschwinden:

$$\begin{vmatrix} i\omega + \eta k^2 & ik\alpha_0 & 0 \\ -ik\alpha_0 & i\omega + \eta k^2 & 0 \\ 0 & 0 & i\omega + \eta k^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (i\omega + \eta k^2) \left\{ (i\omega + \eta k^2)^2 - k^2 \alpha_0^2 \right\} = 0. \quad (215)$$

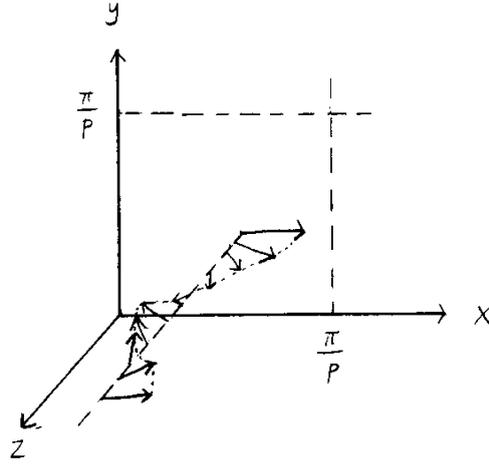


Abbildung 28: Anwachsende Lösung \mathbf{B}_0 für $\alpha_0 > 0$.

Die Lösungen und die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\begin{aligned} \omega &= i\eta k^2 & \mathbf{b}_0 &= b_{0z} \mathbf{e}_z, \\ \omega &= i\eta k^2 \pm ik\alpha_0 & \mathbf{b}_0 &= b_{0x}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y), \end{aligned} \quad (216)$$

wo b_{0x} eine reelle Konstante ist. Offensichtlich ist die Frequenz ω immer rein imaginär; wir schreiben daher

$$i\omega = \gamma. \quad (217)$$

Der erste Eigenzustand ($\gamma = -\eta k^2$) beschreibt keine Dynamowirkung aber den diffusiven Zerfall von B_{0z} , weil ein Quellterm für B_{0z} fehlt. Für Dynamowirkung soll $\gamma \geq 0$ d.h.

$$\gamma = -\eta k^2 \mp k\alpha_0 \geq 0. \quad (218)$$

Es gibt jetzt zwei Möglichkeiten für positives γ :

$$\alpha_0 > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_0 = b_{0x}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \Rightarrow \alpha_0 \geq \eta k \quad (219)$$

$$\alpha_0 < 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_0 = b_{0x}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \Rightarrow \alpha_0 \leq -\eta k. \quad (220)$$

Für Dynamowirkung muss α , also die Helizität, genügend gross sein oder k genügend klein sein. In unserem unbegrenzten Volumen können wir k beliebig klein wählen so dass es für jedes $h_0 \neq 0$ einen instabilen Bereich gibt. In einem begrenztem Volumen (typische Länge L) gibt es aber eine Untergrenze $k \gtrsim 1/L$, so dass es eine Schwelle gibt für h_0 über der Dynamowirkung erst auftritt. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind [verwende $\text{Re } i \exp\{ikz\} = -\sin kz$]

$$\mathbf{B}_0^\pm = \text{Re } b_{0x}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) e^{i(kz + \omega t)} = b_{0x}(\cos kz \mathbf{e}_x \mp \sin kz \mathbf{e}_y) e^{\gamma t} \quad (221)$$

Abb. (28) zeigt die anwachsende Lösung für $\alpha_0 > 0$ ($h_0 < 0$). Der Schraubensinn der anwachsenden Lösung wird bestimmt durch den Schraubensinn der Strömung. Betrachte dazu

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} B_0^2 = \alpha_0 \mathbf{B}_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{B}_0) + \eta \mathbf{B}_0 \cdot \nabla^2 \mathbf{B}_0. \quad (222)$$

Offensichtlich brauchen wir wenn $\alpha_0 > 0$ ($h_0 < 0$) für Dynamowirkung die Lösung mit positiver *magnetischer Helizität*²⁹:

$$H_M = \mathbf{B}_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{B}_0). \quad (223)$$

In unserem Fall gilt

$$\nabla \times \mathbf{B}_0^\pm = b_{0x} e^{\gamma t} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \times (\cos kz \mathbf{e}_x \mp \sin kz \mathbf{e}_y) = \mp k \mathbf{B}_0^\pm, \quad (224)$$

²⁹Auch $h_M = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ wird magnetische Helizität genannt; siehe §8.2

so dass $H_M^- > 0$ und $H_M^+ < 0$. Wenn $\alpha_0 > 0$ wirkt die Strömung für \mathbf{B}_0^- konstruktiv, für \mathbf{B}_0^+ destruktiv.

Ist dieser Dynamo schnell oder langsam? Um diese Frage zu beantworten betrachten wir $\lim_{\eta \rightarrow 0} \gamma(\eta)$. Leider sind dann sowohl FOSSA (196) als die 2-Skalen-Annäherung (202) nicht mehr gültig, wie (201) und (202) zeigen. Soward³⁰ hat abgeleitet $\gamma(\eta) \approx \mathcal{O}(1/\ln \eta)$, so dass dieser Dynamo zwar formal langsam ist, aber schon 'fast schnell' wegen der logarithmischen Abhängigkeit von η .

7.3 Ensemblemittelung

Aus Beobachtungen von magnetischer Aktivität in Sternen geht hervor dass stellare Dynamo-wirkung eng zusammenhängt mit der Existenz einer konvektiven Schicht. Konvektion ist eine räumlich und zeitlich stark veränderliche Strömung. In der solaren Konvektionsschicht gibt es eine Hierarchie von zellenartigen Strukturen unterschiedlicher Grösse L_c und Lebensdauer τ_c , von der Granulation ($L_c \approx 10^3$ km; $\tau_c \approx 5$ min) bis zu den (hypothetischen) *Riesenzellen* ($L_c \approx 10^5$ km; $\tau_c \approx 30$ d). Daneben gibt es grossskalige, nur langsam variierende Strömungen wie z.B. die differentielle Rotation $\Omega(r, \theta, t) r \sin \theta \mathbf{e}_\phi$. Trotz der unregelmässigen konvektiven Strömung hat das grossskalige Magnetfeld der Sonne ein sehr regelmässiges Verhalten. Daraus ist zu vermuten dass die Konvektion einen systematischen mittleren Effekt hat auf das Magnetfeld, der durch eine gemittelte Induktionsgleichung beschrieben werden kann.

Die Mittelungsprozedur soll wieder die Reynolds-Regeln erfüllen. Eine räumliche Mittelung über ein Teilvolumen in der Konvektionsschicht oder eine zeitliche Mittelung über ein endliches Zeitintervall kommt daher jetzt nicht in Frage, weil nicht alle Reynolds-Regeln erfüllt sind. Wir verwenden daher die *Ensemblemittelung*, definiert durch

$$\langle f \rangle(\mathbf{r}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{(i)}(\mathbf{r}, t), \quad (225)$$

wobei $f^{(i)}(\mathbf{r}, t)$ eine Funktion im i -ten Ensemblemitglied ist. Die Ensemblemittelung ist sinnvoll wenn im System eine 'zufällige' Grösse zu erkennen ist. Das Ensemble ist eine Sammlung von unendlich vielen Systemen die sich nur darin unterscheiden dass in jedem Ensemblemitglied die zufällige Grösse anders realisiert ist. Die Anwendung der Ensemblemittelung auf die Induktionsgleichung beruht also auf der Annahme dass \mathbf{u} als stochastische Grösse betrachtet werden darf. In Wirklichkeit wird \mathbf{u} festgelegt durch die Navier-Stokes-Gleichung (19), die nicht-linear aber an sich deterministisch ist. Wenn aber die hydrodynamische Reynoldszahl $R_h = uL/\nu$ genügend gross ist (wie in der solaren Konvektionsschicht), wird die Strömung turbulent, d.h. es bilden sich Wirbel (*eddies*) verschiedener Dimensionen und Lebensdauern. Die Lösungen der Navier-Stokesgleichung werden zeitlich und räumlich sehr variabel und stark abhängig von den Anfangsbedingungen. Aus diesem Grund ist turbulente Strömung im praktischen Sinn stochastisch. Um die Ensemblemittelung auszuführen brauchen wir dann nur die statistischen Eigenschaften der Turbulenz zu wissen.

7.3.1 Stochastische Differentialgleichungen

Wir betrachten die Induktionsgleichung als eine stochastische Differentialgleichung, wobei die konvektive Strömung \mathbf{u}_1 eine stochastische Funktion ist. Die statistischen Eigenschaften von \mathbf{u}_1 und auch die mittlere Strömung \mathbf{u}_0 behandeln wir als externe Grössen. Die Induktionsgleichung wird also weiterhin kinematisch gelöst, was aber bereits schwierig genug ist, weil wir es mit *multiplikativer* stochastischer Anregung zu tun haben. Die allgemeine Form einer homogenen linearen stochastischen Differentialgleichung multiplikativer Art lautet

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathcal{D}\mathbf{B} = (\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1)\mathbf{B}, \quad (226)$$

wo statt des Magnetfeldes \mathbf{B} auch ein beliebiger anderer Vektor, Skalar oder Tensor stehen kann, und $\mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$ ein stochastischer Differentialoperator ist, der zu schreiben ist als Summe eines (langsam variierenden) Mittelwertes $\mathcal{D}_0 = \langle \mathcal{D} \rangle$ und eines stochastischen Termes $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} - \mathcal{D}_0$. Wir werden durch eine Ensemblemittelung von (226) über die Realisierungen von \mathcal{D}_1 eine Gleichung für $\mathbf{B}_0 = \langle \mathbf{B} \rangle$ abzuleiten, die sogenannte *Dynamogleichung*. Die allgemeine Theorie dieses Verfahrens ist

³⁰Soward, A.M., 1986, *J. Fluid Mech.* **180**, 267-95

zu finden bei van Kampen³¹. Um die Mittelung durchzuführen brauchen wir Kenntnis über die statistischen Eigenschaften von \mathcal{D}_1 . Eine wichtige Annahme sei hier schon aufgemerkt, nämlich dass \mathcal{D}_1 eine endliche Korrelationszeit τ_c hat (d.h. Terme wie $\langle \mathcal{D}_1(t)\mathcal{D}_1(t') \rangle$ verschwinden wenn $|t - t'| \gtrsim \tau_c$).

Im Fall der Induktionsgleichung ist $\mathcal{D}_0\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}$ und $\mathcal{D}_1\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B})$. Die folgende Ableitung der Dynamogleichung beruht auf Hoyng³². Durch Mittelung von (226) ergibt sich

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \mathcal{D}_0\mathbf{B}_0 + \langle \mathcal{D}_1\mathbf{B}_1 \rangle, \quad (227)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \mathcal{D}_0\mathbf{B}_1 + \mathcal{D}_1\mathbf{B}_0 + G, \quad \text{wo} \quad G = \mathcal{D}_1\mathbf{B}_1 - \langle \mathcal{D}_1\mathbf{B}_1 \rangle. \quad (228)$$

Diese Gleichungen sind identisch zu (187)-(188). Wie dort ist auch hier Fortschritt nur einfach wenn $G = 0$. Der Unterschied ist dass wir die Vernachlässigung von G jetzt nicht rechtfertigen können durch die Annahme $|G| \ll |\mathcal{D}_1\mathbf{B}_0| \Leftrightarrow B_1 \ll B_0$, weil das sicher nicht richtig ist in der Sonne. Es bleiben dann noch zwei Möglichkeiten:

$$\text{M1)} \quad |G| \ll \left| \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \right|,$$

$$\text{M2)} \quad |G| \ll |\mathcal{D}_0\mathbf{B}_1|.$$

Für die Induktionsgleichung bedeutet dies ($|G| \approx u_1 B_1 / L_c$, $|\partial \mathbf{B}_1 / \partial t| \approx B_1 / \tau_c$ und $\mathcal{D}_0\mathbf{B}_1 \approx (u_0 / L_c + \eta / L_c^2) B_1$; τ_c ist die Korrelationszeit und L_c die Korrelationslänge der Turbulenz):

$$\text{M1)} \quad S = \frac{u_1 \tau_c}{L_c} \ll 1,$$

$$\text{M2a)} \quad R_{\text{mc}} = \frac{u_1 L_c}{\eta} \ll 1 \quad \text{oder} \quad \text{M2b)} \quad u_1 \ll u_0.$$

Bedingungen (M2a) und (M2b) sind nicht erfüllt in stellaren Konvektionsschichten, weil dort $R_{\text{mc}} \gg 1$ und $u_1 \approx u_0$. Die *Strouhalzahl* S ist das Verhältnis der Korrelationszeit zur konvektiven Turnoverzeit L_c / u_1 . Bedingung (M1) besagt also dass die Korrelationszeit viel kürzer sein muss als die Turnoverzeit. Auch diese Bedingung ist nicht erfüllt in der Sonne, weil dort $S \approx 1$. Trotzdem nehmen wir jetzt an dass $S \ll 1$ und vernachlässigen G . Diese Annäherung wird *First Order Smoothing Approximation* (FOSA), *Second Order Correlation Approximation* (SOCA) oder *Quasilineare Annäherung* genannt. Der Einfachheit halber nehmen wir auch an dass $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{r})$, unabhängig von t .

Die formale Lösung von (228) ist dann [wenn die \mathbf{r} -Abhängigkeit nicht ausgedrückt wird ist das Argument immer \mathbf{r} ; wenn die zeitliche Abhängigkeit von \mathbf{B}_1 oder \mathcal{D}_1 nicht gezeigt wird ist das Argument immer t]:

$$\mathbf{B}_1(t) = e^{(t-t_0)\mathcal{D}_0}\mathbf{B}_1(t_0) + \int_{t_0}^t d\tau e^{(t-\tau)\mathcal{D}_0}\mathcal{D}_1(\tau)\mathbf{B}_0(\tau) \quad (229)$$

$$= e^{(t-t_0)\mathcal{D}_0}\mathbf{B}_1(t_0) + \int_0^{t-t_0} d\sigma e^{\sigma\mathcal{D}_0}\mathcal{D}_1(t-\sigma)\mathbf{B}_0(t-\sigma), \quad (230)$$

wo jetzt als Integrationsvariable $\sigma = t - \tau$ verwendet worden ist. Das Ergebnis substituieren wir in den letzten Term von (227):

$$\langle \mathcal{D}_1\mathbf{B}_1 \rangle = \langle \mathcal{D}_1 e^{(t-t_0)\mathcal{D}_0}\mathbf{B}_1(t_0) \rangle + \int_0^{t-t_0} d\sigma \langle \mathcal{D}_1 e^{\sigma\mathcal{D}_0}\mathcal{D}_1(t-\sigma)\mathbf{B}_0(t-\sigma) \rangle. \quad (231)$$

Die Bezeichnung SOCA lässt sich nun erklären aus der Tatsache dass nur Korrelationen zweiter Ordnung in \mathcal{D}_1 auftreten. Diese Ausdrückung enthält noch die Anfangsbedingung $\mathbf{B}_1(t_0)$. Nach einer Zeit $t - t_0 \gtrsim \tau_c$, ist die Korrelation zwischen $\mathcal{D}_1(t)$ und $\mathbf{B}_1(t_0)$ aber verschwunden und somit

³¹ van Kampen, N.G., 1976, *Phys. Reports* **24C**, 171; van Kampen, N.G., 1981, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland, Amsterdam

³² Hoyng, P., 1992, in *The Sun, a Laboratory for Astrophysics*, J.T. Schmelz und J.C. Brown (Her.), Kluwer, 99-138

auch der erste Term. Überdies verschwindet der Integrand des zweiten Termes für $\sigma \gtrsim \tau_c$; wir dürfen daher $t_0 = -\infty$ setzen, und es ergibt sich

$$\langle \mathcal{D}_1 \mathbf{B}_1 \rangle = \int_0^\infty d\sigma \langle \mathcal{D}_1 e^{\sigma \mathcal{D}_0} \mathcal{D}_1(t - \sigma) \rangle \mathbf{B}_0(t - \sigma). \quad (232)$$

Jetzt müssen wir noch $\mathbf{B}_0(t - \sigma)$ ausdrücken in $\mathbf{B}_0(t)$. Weil der Integrand verschwindet für $\sigma \gtrsim \tau_c$ könnte man annehmen dass sich \mathbf{B}_0 während dieser Zeit kaum ändert: $\mathbf{B}_0(t - \sigma) \approx \mathbf{B}_0(t)$. Eine bessere Annahme ist dass $\mathbf{B}_0(t - \sigma)$ für $0 \leq \sigma \lesssim \tau_c$ von der mittleren Advektion \mathcal{D}_0 bestimmt wird, also $\mathbf{B}_0(t - \sigma) = \exp(-\sigma \mathcal{D}_0) \mathbf{B}_0(t)$. Mit dieser Annahme substituieren wir (232) in die Gleichung für \mathbf{B}_0 (227) und es ergibt sich

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \left\{ \mathcal{D}_0 + \int_0^\infty d\sigma \langle \mathcal{D}_1 e^{\sigma \mathcal{D}_0} \mathcal{D}_1(t - \sigma) \rangle e^{-\sigma \mathcal{D}_0} \right\} \mathbf{B}_0. \quad (233)$$

Diese Gleichung ist ein allgemeines Ergebnis der Theorie der stochastischen Differentialgleichungen, gültig wenn $S \ll 1$.

Eine weitere Annahme wodurch (233) erheblich einfacher wird ist die 2-Skalen-Annäherung $|\tau_c \mathcal{D}_0| \ll 1$. Beachte dass der Operator \mathcal{D}_0 in (233) auf alle Grössen zu seiner rechten Seite wirkt. Es müssen daher jetzt zwei Bedingungen erfüllt sein:

$$S1) \quad |\tau_c \mathcal{D}_0 \mathbf{B}_0| / B_0 \ll 1,$$

$$S2) \quad |\tau_c \mathcal{D}_0 \mathbf{u}_1| / u_1 \ll 1.$$

Bedingung (S1) bedeutet $\tau_c(\Delta u_0 / L_0 + \eta / L_0^2) \ll 1$, wo L_0 die typische Länge der Variierungen von \mathbf{u}_0 und \mathbf{B}_0 ist. Die Korrelationszeit der Turbulenz muss also viel kürzer sein als die typische Advektionszeit durch die mittlere Strömung (z.B. differentielle Rotation) oder die Diffusionszeit des mittleren Feldes. In der solaren Konvektionsschicht ($L_0 \approx 2 \cdot 10^8$ m) ist $\tau_c \lesssim 20$ Tage und $L_0^2 / \eta \approx 4 \cdot 10^9$ Jr (§4.1, Tabelle 1); wenn in der ganzen Konvektionsschicht differentielle Rotation herrscht ($\Delta u_0 \approx 10^2$ m s⁻¹) ist der Geschwindigkeitsgradient etwa $\Delta u_0 / L_0 \approx 5 \cdot 10^{-7}$ s⁻¹ $\Rightarrow L_0 / \Delta u_0 \approx 20$ Tage, so dass (S1) höchstens marginal erfüllt ist. Bedingung (S2) bedeutet $\tau_c (\Delta u_0 / L_c + \eta / L_c^2) \ll 1$, wo L_c die Grösse der turbulenten Zellen vorstellt. In der Sonne ist jedenfalls $L_c \lesssim 10^8$ m, so dass auch (S2) bestens marginal erfüllt ist. Die 2-Skalen-Annäherung ist also fragwürdig in der Sonne, weil die grössten konvektiven Zellen wahrscheinlich lang genug leben um von der differentiellen Rotation beeinflusst zu werden. Trotzdem setzen wir überall in (233) $\exp(\sigma \mathcal{D}_0) = 1$:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \mathcal{D}_0 \mathbf{B}_0 + \langle \mathcal{D}_1 \mathbf{B}_1 \rangle = \left\{ \mathcal{D}_0 + \int_0^\infty d\sigma \langle \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_1(t - \sigma) \rangle \right\} \mathbf{B}_0. \quad (234)$$

Auch dieses Ergebnis gilt allgemein für stochastische Differentialgleichungen, wenn $S \ll 1$ und $|\tau_c \mathcal{D}_0| \ll 1$.

7.3.2 Dynamogleichung, α -Effekt und turbulente Diffusivität

Der letzte Schritt in der Ableitung der Dynamogleichung betrifft die Mittelung im zweiten Term von (234). Wir substituieren $\mathcal{D}_1 \dots = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \dots)$ und schreiben der Einfachheit halber die zeitliche Abhängigkeit als $\mathbf{u}_1^t = \mathbf{u}_1(t)$ u.s.w.:

$$\langle \mathcal{D}_1 \mathbf{B}_1 \rangle = \nabla \times \langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle = \int_0^\infty d\sigma \langle \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_1^{t-\sigma} \rangle \mathbf{B}_0 \quad (235)$$

$$= \nabla \times \int_0^\infty d\sigma \left\langle \mathbf{u}_1^t \times \left\{ \nabla \times (\mathbf{u}_1^{t-\sigma} \times \mathbf{B}_0) \right\} \right\rangle. \quad (236)$$

Wir erhalten für die mittlere EMK:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle_i &\stackrel{J11}{=} \int_0^\infty d\sigma \left\langle \mathbf{u}_1 \times \left\{ (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1^{t-\sigma} - \mathbf{B}_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}_1^{t-\sigma}) - (\mathbf{u}_1^{t-\sigma} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 \right\} \right\rangle_i \\ &= \epsilon_{ijk} \int_0^\infty d\sigma \langle u_j B_{0m} \nabla_m u_k^{t-\sigma} - u_j B_{0k} \nabla_m u_m^{t-\sigma} - u_j u_m^{t-\sigma} \nabla_m B_{0k} \rangle \quad (237) \\ &= \alpha_{ij} B_{0j} + \beta_{ijk} \nabla_j B_{0k}, \quad (238) \end{aligned}$$

wobei u_i für u_{1i} steht. Gleichung (238) definiert den α -Tensor und den *turbulenten Diffusivitätstensor* β . Der genaue Vergleich mit (237) ergibt

$$\alpha_{ij} = \int_0^\infty d\sigma \left\{ \epsilon_{imn} \langle u_m \nabla_j u_n^{t-\sigma} \rangle - \epsilon_{imj} \langle u_m \nabla_n u_n^{t-\sigma} \rangle \right\}, \quad (239)$$

$$\beta_{ijk} = -\epsilon_{imk} \int_0^\infty d\sigma \langle u_m u_j^{t-\sigma} \rangle. \quad (240)$$

Im Prinzip ist die Ableitung der Dynamogleichung jetzt fertig. Wir erreichen aber eine weitere Vereinfachung wenn die Turbulenz *isotrop* ist, d.h. ihre statistische Eigenschaften sind invariant unter willkürlichen Drehungen des Koordinatensystems. Dann müssen $\langle u_i u_j^{t-\sigma} \rangle$ und $\langle u_i \nabla_j u_k^{t-\sigma} \rangle$ *isotrope Tensoren* sein, d.h. [verwende $\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$]:

$$\langle u_i \nabla_j u_k^{t-\sigma} \rangle = C_1 \epsilon_{ijk} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \langle u_i \nabla_j u_k \rangle = \frac{1}{6} \langle \mathbf{u}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_1^{t-\sigma}) \rangle, \quad (241)$$

$$\langle u_i u_j^{t-\sigma} \rangle = C_2 \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{3} \delta_{ij} \langle u_i u_j^{t-\sigma} \rangle = \frac{1}{3} \langle \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^{t-\sigma} \rangle. \quad (242)$$

Um diese Eigenschaft zu begreifen betrachte man z.B. den Effekt einer Drehung von 180° um die x -Achse: $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, -z) \Rightarrow \langle u_x u_y^{t-\sigma} \rangle \rightarrow -\langle u_x u_y^{t-\sigma} \rangle$; wegen Isotropie muss $\langle u_x u_y^{t-\sigma} \rangle = 0$ und analog alle Elemente ausserhalb des Diagonals. Betrachte jetzt eine Drehung von 90° um die x -Achse: $(x, y, z) \rightarrow (x, z, -y) \Rightarrow \langle u_y u_y^{t-\sigma} \rangle \rightarrow \langle u_z u_z^{t-\sigma} \rangle$ d.h. alle Diagonalelemente sind gleich. Auf ähnliche Weise geht der Beweis für $\langle u_i \nabla_j u_k^{t-\sigma} \rangle$ ab.

Es ergibt sich für α_{ij} und β_{ijk} [verwende $\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$, $\epsilon_{mnn} = 0$ und $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imk} = 2\delta_{jm}$]:

$$\alpha_{ij} = -\frac{1}{3} \delta_{ij} \int_0^\infty d\sigma \langle \mathbf{u}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_1^{t-\sigma}) \rangle = \alpha \delta_{ij}, \quad (243)$$

$$\beta_{ijk} = -\frac{1}{3} \epsilon_{ijk} \int_0^\infty d\sigma \langle \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^{t-\sigma} \rangle = -\beta \epsilon_{ijk}. \quad (244)$$

Bei isotroper Turbulenz sind die Tensoren α_{ij} und β_{ijk} also auch isotrop. Der zyklonische α -Koeffizient und die *turbulente Diffusivität* β sind definiert als

$$\alpha = -\frac{1}{3} \int_0^\infty d\sigma \langle \mathbf{u}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_1^{t-\sigma}) \rangle \approx -\frac{1}{3} \tau_c \langle \mathbf{u}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_1) \rangle, \quad (245)$$

$$\beta = \frac{1}{3} \int_0^\infty d\sigma \langle \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^{t-\sigma} \rangle \approx \frac{1}{3} \tau_c \langle |\mathbf{u}_1|^2 \rangle. \quad (246)$$

In (245) und (246) ist die Integration abgeschätzt worden durch ein Faktor τ_c . Wegen der Isotropie verschwinden $\nabla_i \alpha$ und $\nabla_i \beta$ [betrachte den Effekt einer Drehung von 180°], so dass bei isotroper Turbulenz α und β auch immer *homogen* (konstant) sind. Bei anisotroper Turbulenz ist die mittlere EMK ortsabhängig; siehe §7.4. Die Dimension von α ist m s^{-1} und sein Wert ist maximal wenn die Helizität maximal ist, d.h. $|\alpha| \lesssim \frac{1}{3} \tau_c u_1^2 / L_c$. Für die Konvektionsschicht der Sonne (nehme $\tau_c \approx 20$ Tage und $u_1 \approx 10 \text{ m s}^{-1}$) erhält man $|\alpha| \lesssim u_1/3 \approx 3 \text{ m s}^{-1}$; ein typischer Wert ist vielleicht $|\alpha| \approx 0.3 \text{ m s}^{-1}$ (entsprechend einer *relativen* Helizität von etwa 10%). Die turbulente Diffusivität hat die gleiche Dimension wie die magnetische Diffusivität η : $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$. In der solaren Konvektionsschicht ist $\beta \approx \tau_c u_1^2 / 3 \approx 6 \cdot 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \gg \eta \approx 0.3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

Von der physikalischen Bedeutung von α und β wird gleich die Rede sein. Zuerst betrachten wir die Symmetrie-Eigenschaften von α und β . Deutlich zu sehen ist dass für ein nicht verschwindendes α mittlere Helizität erforderlich ist. Die Turbulenz darf daher nicht spiegelsymmetrisch, d.h. invariant sein unter einer Punktspiegelung $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$. Das kann man auf folgende Weise verdeutlichen. Wenn ein Vektor \mathbf{F} nach einer Punktspiegelung transformiert wie \mathbf{r} , d.h. $\mathbf{F} \rightarrow -\mathbf{F}$ nennt man diesen Vektor *polar*; wenn $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ dann ist \mathbf{F} ein *Pseudovektor* oder *axialer Vektor*. Wenn ein Skalar nach einer Punktspiegelung das Vorzeichen wechselt ist es ein *Pseudoskalar* [ein Beispiel ist $\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$]. Weil \mathbf{r} polar ist, sind auch ∇ und \mathbf{u} polar; \mathbf{B} ist aber axial. Das geht z.B. hervor aus der Maxwell-Faraday-Gleichung, $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$ zusammen mit $\nabla \cdot \mathbf{E} = q / \epsilon_0$: weil q ein Skalar und ∇ ein polarer Vektor ist, ist \mathbf{E} auch ein polarer Vektor und daher \mathbf{B} ein axialer Vektor. Betrachte nun die mittlere EMK,

$$\langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle = \alpha \mathbf{B}_0 - \beta \nabla \times \mathbf{B}_0. \quad (247)$$

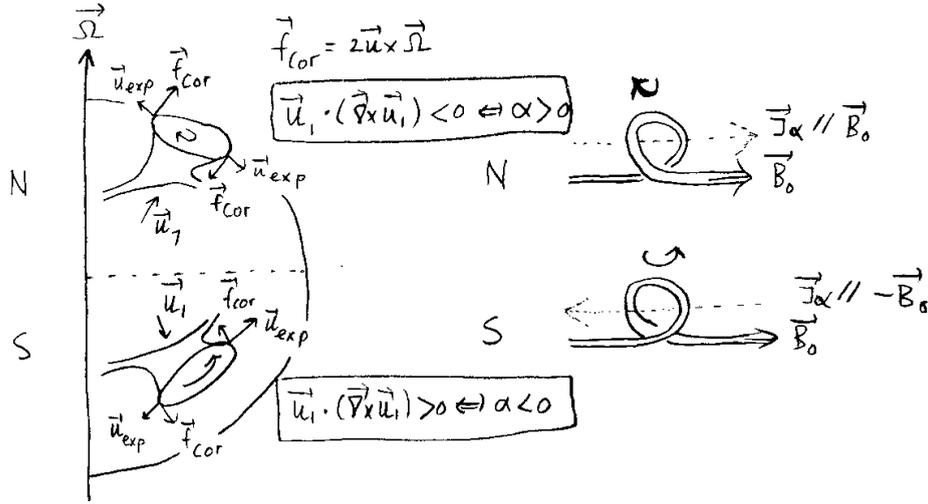


Abbildung 29: Wirkung der Corioliskraft und α -Effekt in der oberen Hälfte der KS

Die linke Seite ist ein polarer Vektor, \mathbf{B}_0 ist ein axialer Vektor und ∇ ist ein polarer Vektor. Daraus folgt dass α ein Pseudoskalar und β ein Skalar ist, in Übereinstimmung mit (245) und (246).

Was ist die physische Bedeutung von α und β ? Nach Substitution von (247) in (227) ergibt sich die Dynamogleichung,

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_0 + \alpha \mathbf{B}_0) - \nabla \times \{(\beta + \eta) \nabla \times \mathbf{B}_0\}. \quad (248)$$

Der α -Effekt führt zu einem Quellterm $\alpha \nabla \times \mathbf{B}_0 = \alpha \mu_0 \mathbf{J}_0$, (anti-)parallel zur mittleren Stromdichte. Um den Vorgang zu verdeutlichen betrachten wir das Ohmsche Gesetz (15) und substituieren die mittlere EMK (247):

$$\mathbf{J}_0 = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \sigma (\mathbf{E}_0 + \mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_0 + \alpha \mathbf{B}_0 - \beta \mu_0 \mathbf{J}_0) \quad (249)$$

$$= \sigma_t (\mathbf{E}_0 + \mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_0 + \alpha \mathbf{B}_0), \quad (250)$$

wobei σ_t [$\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$] die turbulente Leitfähigkeit ist,

$$\sigma_t = \frac{\sigma}{1 + \beta/\eta}. \quad (251)$$

Der α -Effekt bildet also einen mittleren Strom $\mathbf{J}_\alpha = \sigma_t \alpha \mathbf{B}_0$, (anti-)parallel zum originellen mittleren Magnetfeld. In Abb. (29) wird gezeigt wie dieser α -Strom zustande kommt. Ein Teil einer Flussröhre wird mittgeschleppt von einem aufsteigenden Turbulenten Element. Wenn dieses Element positive Helizität ($h > 0$) besitzt, bildet sich ein kleiner Flussring um die ursprüngliche Röhre. Diesem neuen Flussring entspricht ein Strom *antiparallel* zu \mathbf{B}_0 , d.h. $\alpha < 0$. Wenn $h < 0$, dann ist die Orientierung des neuen Flussringes andersum, so dass $\alpha > 0$. Helizität entsteht durch den Einfluss der Corioliskraft. Betrachte dazu ein Volumenelement in der oberen Hälfte der Konvektionsschicht (Abb. 29). Während es aufsteigt (absinkt) expandiert (komprimiert) es und aus der Expansion \mathbf{u}_{exp} und der Corioliskraft $2\mathbf{u}_{\text{exp}} \times \boldsymbol{\Omega}$ ergibt sich eine Drehung, wodurch ein Element nördlich vom Äquator *negative* Helizität erhält und ein Element südlich vom Äquator *positive* Helizität. Ein Volumenelement das sich der unteren Grenze der Konvektionsschicht nähert hört irgendwann auf zu komprimieren und fängt stattdessen an zu *expandieren*. Wenn es sich wieder von der unteren Grenze nach oben entfernt *komprimiert* es zuerst und fängt erst etwas höher an zu expandieren. Daher erhält die untere Konvektionsschicht nördlich vom Äquator *positive* Helizität und südlich vom Äquator *negative* Helizität. Dieser Wechsel des Vorzeichens der Helizität am Boden der KS wird bestätigt in Simulationen (§9.4). Der α -Effekt hat ein extra Minuszeichen in Vergleich zur Helizität (245); der Grund dafür ist in Abb. (29) leicht zu erkennen.

Ein weiterer Effekt der Turbulenz ist eine effektive Reduzierung der Leitfähigkeit ($\sigma_t \ll \sigma$), d.h. eine Erhöhung der Diffusivität ($\beta \gg \eta$). Die Diffusionszeit des mittleren Magnetfeldes der Sonne beträgt jetzt $L_0^2/\beta \approx 10$ Jahre statt $L_0^2/\eta \approx 4 \cdot 10^9$ Jahre und ist vergleichbar mit der Periode des Sonnenzyklus! Die turbulente Diffusion beschreibt auf *statistische* Weise den Effekt

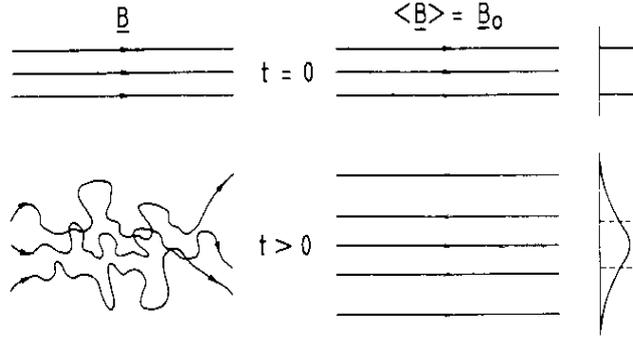


Abbildung 30: Turbulente Diffusivität (Hoyng 1992)

der turbulenten Mischung von magnetischen Feldlinien, nämlich effektiveren diffusiven Transport und erhöhten Zerfall durch Ausmittlung von entgegengesetzten Feldkomponenten (Abb. 30; aus Hoyng 1992³³). Beachte dass die turbulente Diffusion sich nur auf das mittlere Magnetfeld \mathbf{B}_0 bezieht und nicht auf \mathbf{B} .

7.4 Korrekturen zur MF-Dynamotheorie

Wir haben gesehen dass die MF-Dynamogleichung in der Form (248) gültig ist unter folgenden Bedingungen:

- D1) Die kinematische Annäherung ist erlaubt, d.h. Effekte der Lorentzkraft auf die Strömung dürfen vernachlässigt werden. Das erfordert $B \ll B_{\text{eq}}$.
- D2) Die Strouhalzahl $S \ll 1$, so dass FOSA erlaubt ist.
- D3) Die Korrelationszeit ist viel kürzer als die Advektionszeit durch die mittlere Strömung, so dass die 2-Skalen-Annäherung erlaubt ist.
- D4) Die Turbulenz ist isotrop.

Diese Bedingungen sind nicht erfüllt in der Sonne. Die Äquipartitionsfeldstärke bezüglich der Konvektion beträgt $B_{\text{eq}} \approx u \sqrt{\mu_0 \rho} \approx 0.3 \text{ T}$ in der OS ($u \approx 20 \text{ m s}^{-1}$ ist eine typische konvektive Geschwindigkeit am Boden der KS; $\rho_{\text{OS}} \approx 230 \text{ kg m}^{-3}$), während $B \approx 10 \text{ T} \approx 30 B_{\text{eq}}$ in der OS (§9). Die Strouhalzahl beträgt $S \approx 1$ und die 2-Skalen-Annäherung ist höchstens marginal erfüllt.

Zu D1): es gibt keine mathematisch konsistente nicht-lineare Variante der Mean-Field-Theorie. Die einzige derzeitige Möglichkeit um innerhalb der MF-Theorie über die kinematische Annäherung hinaus zu gehen beruht auf heuristischen nicht-linearen Termen. Einige Beispiele davon werden besprochen in §7.6.

Zu D3) und D4): ohne 2-Skalen-Hypothese ist die Mittelung der Induktionsgleichung im Allgemeinen schwierig³⁴. Die Anwesenheit einer mittleren Strömung \mathbf{u}_0 führt u.A. zu anisotroper Turbulenz; das gleiche gilt für eine Dichteschichtung. Solche Effekte können relativ einfach berücksichtigt werden durch Symmetrie-Überlegungen. Zum Beispiel ist die allgemeine Form der mittleren EMK unter Einfluss von Rotation $\boldsymbol{\Omega}$ und Dichteschichtung $\nabla \rho \parallel \mathbf{e}_r$

$$\langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle = \alpha_1 (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{B}_0 + \alpha_2 \mathbf{r} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{B}_0) + \alpha_3 \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_0) - \beta \nabla \times \mathbf{B}_0 + \dots, \quad (252)$$

wo $\alpha_i = \alpha_i(r)$ und $\beta = \beta(r)$ (siehe z.B. Roberts³⁵ für eine Ableitung; nur die wichtigsten Terme werden hier gezeigt). Der α -Tensor hat jetzt drei unterschiedliche Koeffiziente: α_1 führt, wie α im isotropen Fall, zu einer EMK $\parallel \mathbf{B}_0$; α_2 zu einer EMK $\parallel \mathbf{r}$ und α_3 zu einer EMK $\parallel \boldsymbol{\Omega}$. Die beiden

³³Hoyng, P., 1992, in *The Sun, a Laboratory for Astrophysics*, J.T. Schmelz und J.C. Brown (Her.), Kluwer, 99-138

³⁴Krause und Rädler, §8

³⁵Lectures S. 48-50

letzten werden meistens ignoriert; der erste Term der EMK ist $\propto \cos \theta$ wenn $\boldsymbol{\Omega} \parallel \mathbf{e}_z$. Aus diesem Grund verwendet man in stellaren MF-Modellen oft folgende Form der EMK:

$$\langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle = \alpha(r) \cos \theta \mathbf{B}_0 - \beta(r) \nabla \times \mathbf{B}_0. \quad (253)$$

Zu D2): eine Ableitung der MF-Dynamogleichung ohne FOSA ist möglich, aber lästig. Das hier genannte Beispiel stammt von Nicklaus und Stix³⁶ und beruht auf der Theorie der stochastischen Differentialgleichungen. Betrachten wir eine *lineare* stochastische Differentialgleichung der Form $\partial \mathbf{B} / \partial t = (\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1) \mathbf{B}$ (226); im Fall der Induktionsgleichung ist $\mathcal{D}_0 \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}$ und $\mathcal{D}_1 \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B})$. Um die Ableitung zu vereinfachen eliminieren wir \mathcal{D}_0 durch die Transformation

$$\tilde{\mathbf{B}} = e^{-t \mathcal{D}_0} \mathbf{B}, \quad (254)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_1 = e^{-t \mathcal{D}_0} \mathcal{D}_1 e^{t \mathcal{D}_0}, \quad (255)$$

wonach (226) immer in der Form $\partial \tilde{\mathbf{B}} / \partial t = \tilde{\mathcal{D}}_1 \tilde{\mathbf{B}}$ geschrieben werden kann. Wir nehmen im Moment an $\mathcal{D}_0 = 0$ und setzen $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$ und $\tilde{\mathcal{D}}_1 = \mathcal{D}$. Van Kampen³⁷ hat gezeigt dass aus der Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathcal{D} \mathbf{B} \quad (256)$$

folgende Gleichung für \mathbf{B}_0 abgeleitet werden kann:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} K_m \right\} \mathbf{B}_0, \quad (257)$$

wo

$$K_m = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{m-2}} dt_{m-1} \langle \mathcal{D}(t) \mathcal{D}(t_1) \cdots \mathcal{D}(t_{m-1}) \rangle, \\ t \geq t_1 \geq t_2 \cdots \geq 0. \quad (258)$$

Die K_m sind integrierte *geordnete Kumulanten*, z.B.

$$\langle \langle \mathcal{D}(t) \mathcal{D}(t_1) \rangle \rangle = \langle \mathcal{D}(t) \mathcal{D}(t_1) \rangle - \langle \mathcal{D}(t) \rangle \langle \mathcal{D}(t_1) \rangle, \quad (259)$$

$$\langle \langle \mathcal{D}(t) \mathcal{D}(t_1) \mathcal{D}(t_2) \rangle \rangle = \langle \mathcal{D}(t) \mathcal{D}(t_1) \mathcal{D}(t_2) \rangle - \langle \mathcal{D}(t) \rangle \langle \mathcal{D}(t_1) \mathcal{D}(t_2) \rangle \\ - \langle \mathcal{D}(t) \mathcal{D}(t_1) \rangle \langle \mathcal{D}(t_2) \rangle + \langle \mathcal{D}(t) \rangle \langle \mathcal{D}(t_1) \rangle \langle \mathcal{D}(t_2) \rangle, \quad (260)$$

wo $t \geq t_1 \geq t_2$. Die Kumulanten sind so konstruiert dass sie verschwinden wenn zwei Terme faktorisieren (nicht korreliert sind). Dies geschieht wenn zwei Zeiten mehr als eine Korrelationszeit τ_c verschieden sind. Es folgt dass alle Zeiten innerhalb eines Intervalls τ_c liegen müssen und dass $K_m = \mathcal{O}(|\mathcal{D}|^m \tau_c^{m-1}) = \mathcal{O}(S^{m-1}) u_1 / L_c$: die Entwicklung ist konvergent wenn $S < 1$.

Wenn $\mathcal{D}_0 \neq 0$ ist es einfach zu kontrollieren [ersetze $\mathbf{B}_0 \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_0$ in (257) und $\mathcal{D} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_1$ in (258)] dass die Gleichung für \mathbf{B}_0 lautet

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \left\{ \mathcal{D}_0 + \sum_{m=2}^{\infty} K'_m \right\} \mathbf{B}_0, \quad (261)$$

wo

$$K'_m = \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_0^{t_{m-2}} dt_{m-1} \langle \langle \mathcal{D}_1(t) e^{(t-t_1) \mathcal{D}_0} \mathcal{D}_1(t_1) e^{(t_1-t_2) \mathcal{D}_0} \cdots \\ \mathcal{D}_1(t_{m-1}) e^{(t_{m-1}-t) \mathcal{D}_0} \rangle \rangle. \quad (262)$$

Der Integrand von K'_m trägt nur bei wenn $|t_i - t_j| \lesssim \tau_c$ (für alle $i \neq j$). Wenn $|\tau_c \mathcal{D}_0| \ll 1$ (2-Skalen-Hypothese) dürfen wir also $\exp\{(t_i - t_j) \mathcal{D}_0\} \rightarrow 1$ setzen, so dass $K'_m = K_m$; die einzige Veränderung in (257) ist dann ein extra Term $\mathcal{D}_0 \mathbf{B}_0$ auf der rechten Seite.

Wenn $S \ll 1$ darf die Entwicklung abgebrochen werden beim ersten Term ($m = 2$; FOSA/-SOCA), und es ergibt sich die bekannte MF-Dynamogleichung, siehe §7.3.1. Wenn $S \approx 1$ müssen mehr Terme berücksichtigt werden; sie wurden erstmals von Knobloch systematisch berechnet³⁸.

³⁶Nicklaus, B., Stix, M., 1988, GAFD **43**, 149-66

³⁷Van Kampen, N.G., 1974, Physica **74**, 215-38; Van Kampen, N.G., 1974, Physica **74**, 239-47

³⁸Knobloch, E., 1977, J. Fluid Mech. **83**, 129; 1978, ApJ **225**, 1050

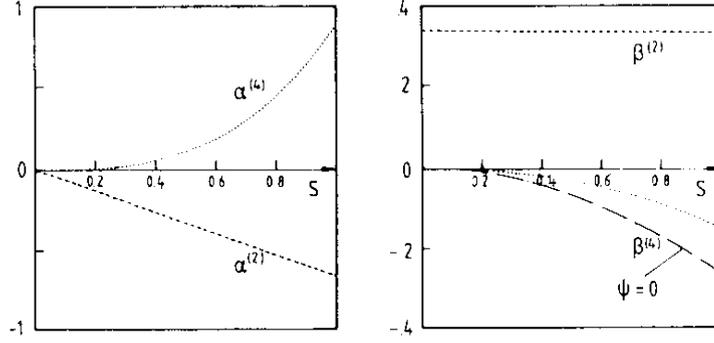


Abbildung 31: Dimensionenlose Transportkoeffizienten ($\psi = \pi/4$; $\sin 2\psi$ ist ein Mass für die Helizität $\langle \mathbf{u}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_1) \rangle$) (Nicklaus und Stix 1988)

Nicklaus und Stix haben die Terme bis zu $m = 4$ analysiert für homogene isotrope Turbulenz und erhalten ($\mathcal{D}_0 = 0$)

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \left\{ (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \nabla \times + (\beta_2 + \beta_3 + \beta_4) \nabla^2 + \gamma_4 \nabla \times \nabla^2 + \mu_4 \nabla^4 \right\} \mathbf{B}_0, \quad (263)$$

wo die Indizes die Ordnung der Kumulanten bezeichnen aus den die Koeffizienten stammen. Die genaue Form der Koeffizienten ist kompliziert; α_2 und β_2 sind identisch zu α bzw. β der FOSA. Wenn die turbulente Strömung \mathbf{u}_1 eine Gaussische Verteilung hat, kann man zeigen dass $\alpha_3 = \beta_3 = \gamma_4 = \mu_4 = 0$. In diesem Fall behält die Dynamogleichung die alte Form, nur mit neuen Transportkoeffizienten,

$$\alpha \rightarrow \alpha_2 + \alpha_4, \quad \beta \rightarrow \beta_2 + \beta_4. \quad (264)$$

Nicklaus und Stix haben diese Koeffizienten für ein Ensemble von helikalischen Wellen mit einer Gaussischen Energieverteilung berechnet als Funktion von S ; siehe Abb. (31). Wenn $S \approx 1$ werden α_4 und β_4 so gross dass α oder β verschwinden oder das Vorzeichen wechseln. Es folgt dass FOSA in der Sonne eine schlechte Annäherung ist und dass die Kumulantenentwicklung nicht bei $m = 4$ abgebrochen werden darf. Ob man für $m > 4$ eine Dynamogleichung in der alten Form mit modifizierten Koeffizienten erhält ist unsicher. Ob es sinnvoll ist noch mehr Terme zu berechnen ist auch unsicher denn die Konvergenz der Entwicklung hängt ab vom unbekanntem genauen Wert von $S \approx 1$.

Andere mathematische Verfahren die über FOSA hinaus gehen beruhen z.B. auf einer Analyse der Greenschen Funktion der Induktionsgleichung³⁹, gültig für $S \approx 1$. Carvalho⁴⁰ verwendet ein iteratives Verfahren das auch gültig ist für $S > 1$ aber unter der Annahme $|\mathbf{B}_1| < |\mathbf{B}_0|$, was problematisch ist in der Sonne.

7.5 Ergebnisse der MF-Dynamotheorie

Das Hauptergebnis von §7.3 war die MF-Dynamogleichung (248),

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times \left\{ \mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_0 + \alpha \mathbf{B}_0 + \beta \nabla \times \mathbf{B}_0 \right\} \quad (265)$$

(ab jetzt schreiben wir $\beta + \eta \approx \beta$). Um die wichtigsten Eigenschaften von MF-Dynamos zu illustrieren lösen wir diese Gleichung zuerst in flacher Geometrie, wo analytische Ergebnisse leicht zu erhalten sind; danach werden wir die für stellare Dynamos mehr geeignete kugelförmige Geometrie verwenden.

7.5.1 Flache MF-Dynamos: Parkerwelle

Wir betrachten die Dynamogleichung in kartesischen Koordinaten, wobei x , y und z definiert sind wie angedeutet in Abb. (32). Wir suchen axisymmetrische Lösungen ($\partial/\partial y = 0$) und nehmen an

³⁹Dolginov, A.Z., Silant'ev, N.A., 1992, GAFD **63**, 139-78

⁴⁰Carvalho, J.C., 1992, A&A **261**, 348-352

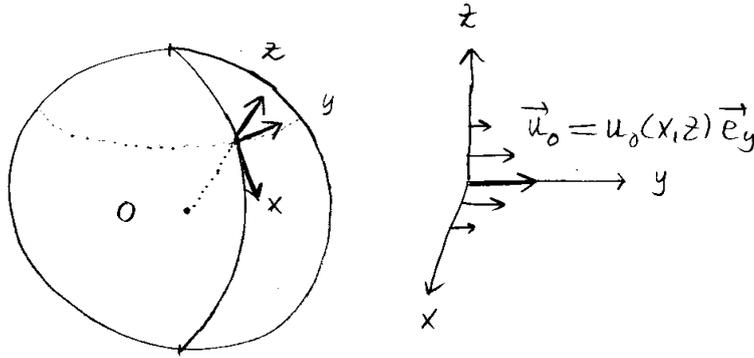


Abbildung 32: Geometrie der Parkerwelle

dass α = konstant, $\mathbf{u}_0 = u_0(x, z) \mathbf{e}_y$ und dass

$$\mathbf{a} = \nabla u_0 = \text{konstant.} \quad (266)$$

Das mittlere Magnetfeld \mathbf{B}_0 wird zerlegt in poloidale Komponenten $\perp \mathbf{e}_y$ und toroidale Komponenten $\parallel \mathbf{e}_y$:

$$\mathbf{B}_0 = B_t \mathbf{e}_y + \nabla \times A_p \mathbf{e}_y. \quad (267)$$

Für die einzelnen Terme von (265) erhält man [verwende (J11), $\mathbf{u}_0 \cdot \nabla = 0$ und $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_y = 0$ in (268); (J6) und $\nabla \cdot A_p \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \nabla A_p = 0$ in (269)]

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_0) &= (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 = \mathbf{e}_y (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) u_0 = \mathbf{e}_y \{ \mathbf{a} \cdot (\nabla \times A_p \mathbf{e}_y) \} \\ &= \mathbf{e}_y \{ (\mathbf{e}_y \times \mathbf{a}) \cdot \nabla A_p \}, \end{aligned} \quad (268)$$

$$\nabla \times \alpha \mathbf{B}_0 = \alpha \nabla \times (\nabla \times A_p \mathbf{e}_y + B_t \mathbf{e}_y) = \alpha \nabla \times B_t \mathbf{e}_y - \alpha \mathbf{e}_y \nabla^2 A_p. \quad (269)$$

Substitution in (265) liefert eine Gleichung vom Typ $\nabla \times w_p \mathbf{e}_y + w_t \mathbf{e}_y = 0 \Rightarrow w_t \mathbf{e}_y = 0$ und $\nabla \times w_p \mathbf{e}_y = 0 \Rightarrow w_p \mathbf{e}_y = (\nabla \Phi)_y = 0$, also $w_p = 0$ und $w_t = 0$. Es ergibt sich

$$\frac{\partial B_t}{\partial t} = (\mathbf{e}_y \times \mathbf{a}) \cdot \nabla A_p - \alpha \nabla^2 A_p + \beta \nabla^2 B_t, \quad (270)$$

$$\frac{\partial A_p}{\partial t} = \alpha B_t + \beta \nabla^2 A_p. \quad (271)$$

Der α -Effekt führt zu Quelltermen in beiden Gleichungen; die differentielle Rotation nur in der Gleichung für B_t . Das toroidale Magnetfeld hat also zwei Quellterme. Abhängig von der relativen Grösse dieser Terme spricht man von einem $\alpha\omega$ -Dynamo ($|\alpha \nabla^2 A_p| \ll |(\mathbf{e}_y \times \mathbf{a}) \cdot \nabla A_p|$), α^2 -Dynamo ($|\alpha \nabla^2 A_p| \gg |(\mathbf{e}_y \times \mathbf{a}) \cdot \nabla A_p|$) oder $\alpha^2\omega$ -Dynamo ($|\alpha \nabla^2 A_p| \approx |(\mathbf{e}_y \times \mathbf{a}) \cdot \nabla A_p|$). Am interessantesten sind die beiden äussersten Fälle; der $\alpha^2\omega$ -Dynamo ist ein Mischwesen.

Wir suchen wellenformige Lösungen der Dynamogleichung und machen dazu den Ansatz

$$(A_p, B_t) = \text{Re} (\tilde{A}_p, \tilde{B}_t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)}, \quad (272)$$

wo \mathbf{k} ein Wellenvektor in der xz -Ebene ist ($k_y = 0$ damit \mathbf{B}_0 y -unabhängig ist) und \tilde{A}_p und \tilde{B}_t komplexe Konstanten sind. Substitution in (270-271) liefert

$$i\omega \tilde{B}_t = ik_s \tilde{A}_p + \alpha k^2 \tilde{A}_p - \beta k^2 \tilde{B}_t, \quad (273)$$

$$i\omega \tilde{A}_p = \alpha \tilde{B}_t - \beta k^2 \tilde{A}_p. \quad (274)$$

wo $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ und

$$s = (\mathbf{e}_y \times \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{k}}. \quad (275)$$

Betrachten wir zuerst den $\alpha\omega$ -Dynamo. Das toroidale Magnetfeld wird dann nur von der differentielle Rotation regeneriert: wir setzen $\alpha k^2 \tilde{A}_p = 0$ in (273). Starke differentielle Rotation herrscht z.B. in der Sonne (der numerische Beweis folgt etwas später).

Diese Gleichungen haben eine nicht-triviale Lösung wenn die Determinante verschwindet. Daraus ergibt sich folgende Dispersionsrelation:

$$(i\omega + \beta k^2)^2 - ik\alpha s = 0. \quad (276)$$

Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung lauten $[\sqrt{i} = \pm(1+i)/\sqrt{2}]$

$$\omega = i\beta k^2 \pm (1-i)\sqrt{k\alpha s/2}. \quad (277)$$

Dies sind zwei Wellen mit Frequenz $\text{Re } \omega$ und Dämpfungsrate $\text{Im } \omega$, wo

$$\text{Re } \omega = \pm\sqrt{k|\alpha s|/2} = \pm\Omega, \quad (278)$$

$$\text{Im } \omega = \beta k^2 \mp \text{sgn}(\alpha s)\sqrt{k|\alpha s|/2}. \quad (279)$$

Solche Wellen wurden zum ersten Mal von Parker untersucht⁴¹. Die Periode der Wellen ist

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k|\alpha s|/2}}. \quad (280)$$

und entspricht der Zyklusdauer des Dynamos. Je stärker der α -Effekt oder die differentielle Rotation, desto kürzer ist T . Für die Sonne ($|\alpha| \approx 0.3 \text{ m s}^{-1}$, $a = |\mathbf{a}| \approx \Delta u_0/L_0$, $\Delta u_0 \approx 10^2 \text{ m s}^{-1}$, Dicke der Konvektionsschicht $L_0 \approx 2 \cdot 10^8 \text{ m} \Rightarrow a \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$, $2\pi/k \approx \pi R_\odot \Leftrightarrow k \approx 2/R_\odot \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1}$, $k|\alpha s| \approx |k\alpha a|$) können wir abschätzen $T \approx 2\pi/\sqrt{k|\alpha a|/2} \approx 4 \cdot 10^8 \text{ s} \approx 16 \text{ Jahre}$, in der selben Grössenordnung als die tatsächliche Zyklusdauer von 22 Jahren. Allerdings ist die differentielle Rotation in Wirklichkeit stark konzentriert (a grösser), so dass T kürzer sein soll. Der genaue Wert von α ist aber nicht bekannt; der hier verwendete Wert entspricht einer relativen Helizität von etwa 10% und diese könnte kleiner sein, was zu einer Verlängerung der Zyklusdauer führen würde.

Die Bedingung für Anregung der Wellen lautet $\text{Im } \omega \leq 0$; die Welle mit $\alpha s > 0$ ($\alpha s < 0$) und einem + (-) in (279) ist also immer gedämpft und die andere Welle ist angeregt wenn

$$|\alpha s| \geq 2\beta^2 k^3. \quad (281)$$

In unserer idealisierten unendlich grossen Geometrie können wir k beliebig klein wählen um (281) zu erfüllen. Ein physischer Dynamo hat eine endliche Dimension L_0 so dass $k \gtrsim k_0 \approx 1/L_0$ und (281) nur erfüllt ist wenn $|\alpha s|$ einen Mindestwert überschreitet.

Um die Fortpflanzung der angeregten Welle zu untersuchen betrachten wir die Gruppengeschwindigkeit \mathbf{u}_g . Die Frequenz dieser Welle ist $-\text{sgn}(\alpha s)\Omega$, so dass

$$\mathbf{u}_g = -\text{sgn}(\alpha s)\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{k}} = -\text{sgn}(\alpha s)\frac{1}{4\Omega}\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}}k|\alpha s| = \frac{\alpha}{4\Omega}\mathbf{a} \times \mathbf{e}_y. \quad (282)$$

Die Wellen pflanzen sich fort senkrecht zu \mathbf{e}_y und zu \mathbf{a} , d.h. entlang die Isorotationsflächen $u_0 = \text{konstant}$. Am Boden der solaren Konvektionsschicht z.B. gilt in der Nähe des Äquators etwa $\mathbf{a} \parallel +\mathbf{e}_z$, so dass nördlich des Äquators (wo $\alpha < 0$) $\mathbf{u}_g \parallel +\mathbf{e}_x$ und südlich des Äquators (wo $\alpha > 0$) $\mathbf{u}_g \parallel -\mathbf{e}_x$, d.h. die Welle bewegt sich immer zum Äquator.

Ist diese Wellenfortpflanzung auch zu verstehen als ein mittlerer Effekt der einzelnen konvektiven Zellen? Betrachte dazu Abb. (33). Wir nehmen an dass $\mathbf{a} \parallel +\mathbf{e}_z$ und $\alpha < 0$ ($\alpha > 0$) nördlich (südlich) des Äquators. Das Magnetfeld ist schematisch dargestellt durch zwei toroidale Flussringe (a). Der α -Effekt erzeugt ein poloidales Magnetfeld (b). Die differentielle Rotation schert das poloidale Feld (c). Effektiv führt die Scherung zur Entstehung zusätzlicher Flussringe neben den ursprünglichen (d). Durch turbulente Diffusion vermischen sich die Flussringe so dass effektiv eine Breitendrift zum Äquator zu beobachten ist (e). Auf höheren Breiten bleibt ein toroidales Magnetfeld entgegengesetzter Polarität übrig: der Anfang eines neuen Zyklus.

Ist die Sonne in der Tat ein $\alpha\omega$ -Dynamo? Das Verhältnis beider Quellterme in (273) ist $|\alpha k^2|/|(\mathbf{e}_y \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{k}| \approx |\alpha|k/a \approx 2 \cdot 10^{-3}$: die differentielle Rotation ist viel wichtiger für die Erzeugung des toroidalen Magnetfeldes als der α -Effekt.

Das toroidale Magnetfeld eines $\alpha\omega$ -Dynamos ist stärker als das poloidale Magnetfeld. Um das zu beweisen substituieren wir zuerst (272) in (267):

$$\mathbf{B}_0 = \text{Re}(\mathbf{i}\mathbf{k} \times \mathbf{e}_y \tilde{A}_p + \tilde{B}_t \mathbf{e}_y) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)}. \quad (283)$$

⁴¹Parker, E.N., 1955, ApJ **122**, 293

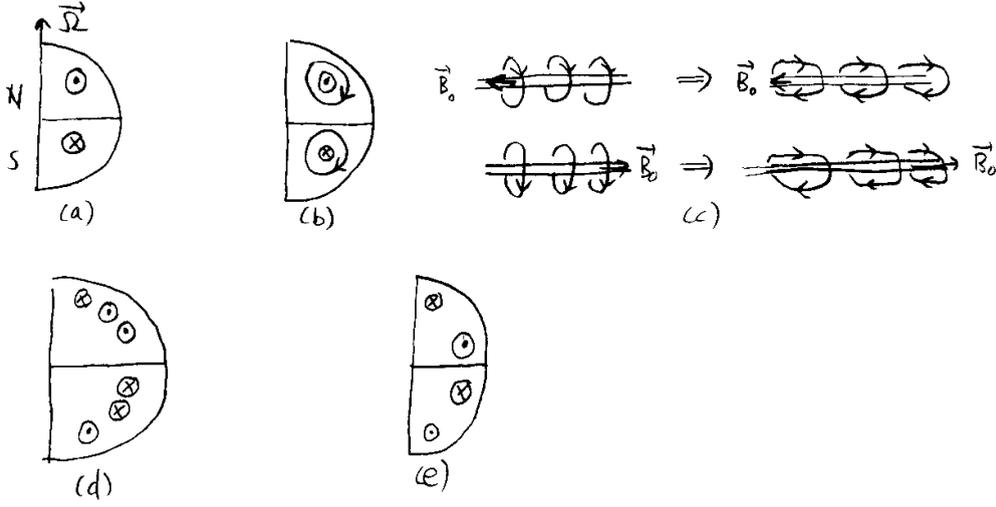


Abbildung 33: Erklärung der Breitendrift der Parkerwellen

Dann verwenden wir (274), d.h. $(i\omega + \beta k^2)\tilde{A}_p = \alpha\tilde{B}_t$, und (277):

$$\tilde{A}_p = \pm(1 - i) \frac{\alpha\tilde{B}_t}{\sqrt{2k\alpha s}}. \quad (284)$$

Es ergibt sich

$$\mathbf{B}_0 = \text{Re} \left\{ \pm \frac{k\alpha e^{i\pi/4}}{\sqrt{k\alpha s}} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \right\} \tilde{B}_t e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)}. \quad (285)$$

Das Verhältnis der beiden Feldkomponente ist daher etwa

$$\frac{B_{0p}}{B_{0t}} \approx \frac{k|\alpha|}{\sqrt{k|\alpha s|}} \approx \sqrt{\frac{k|\alpha|}{a}} \quad (286)$$

Die Beobachtungen des Magnetfeldes der Sonne (§1.1) zeigen dass $B_{0p}/B_{0t} \ll 1$, was bestätigt dass der Sonnendynamo vom Typ $\alpha\omega$ ist (die üblichen Parameterwerte liefern $B_{0p}/B_{0t} \approx 0.04$). Bemerke dass $B_{0p}/B_{0t} \approx 1$ für ein $\alpha^2\omega$ -Dynamo ($k|\alpha|/a \approx 1$).

Betrachten wir jetzt einen α^2 -Dynamo. Wir setzen $iks\tilde{A}_p = 0$ in (273) und suchen eine nicht-triviale Lösung. Die Dispersionsrelation lautet jetzt

$$(i\omega + \beta k^2)^2 - \alpha^2 k^2 = 0 \quad (287)$$

und die Lösungen sind

$$\omega = i(\beta k^2 \pm \alpha k). \quad (288)$$

Es gibt also keine periodische Lösungen oder Wellen (jedenfalls in einer flachen Geometrie). Eine Lösung ist immer gedämpft; die andere ist angeregt wenn $\text{Im } \omega \leq 0$, d.h.

$$k > |\alpha|/\beta. \quad (289)$$

Das mittlere Magnetfeld finden wir durch Substitution von (274) und (288),

$$\tilde{A}_p = \pm\tilde{B}_t/ik \quad (290)$$

in (283):

$$\mathbf{B}_0 = \text{Re} \left(\pm \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \right) \tilde{B}_t e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)}. \quad (291)$$

Das Verhältnis der poloidalen und toroidalen Feldkomponente ist

$$\frac{B_{0p}}{B_{0t}} = 1. \quad (292)$$

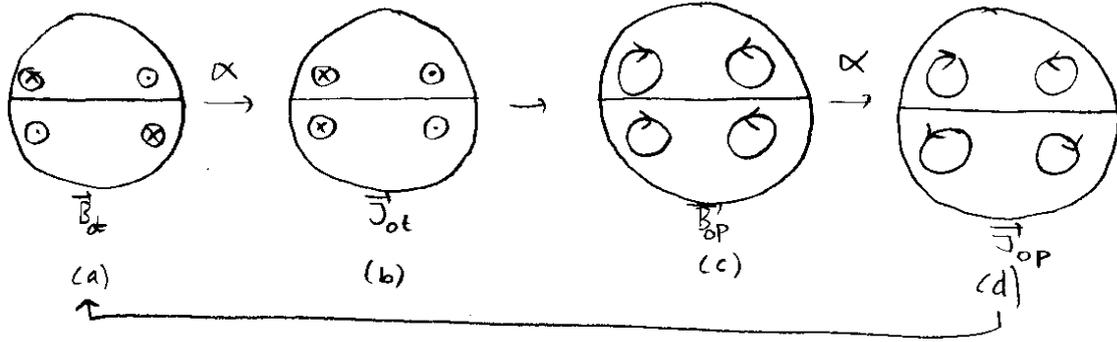


Abbildung 34: α^2 -Dynamo

Wenn wir die Ergebnisse dieser lokalen Analyse extrapolieren zu einer Kugelgeometrie und annehmen das α antisymmetrisch ist relativ zum Äquator ($\alpha > 0$ nördlich des Äquators), entsteht folgendes Bild (Abb. 34). Am Anfang ist nur ein toroidales Dipolfeld gezeichnet (a). Der α -Effekt erzeugt dazu einen toroidalen Strom $\parallel \mathbf{B}_{0t}$ im Norden und $\parallel -\mathbf{B}_{0t}$ im Süden (b). Das zugehörige poloidale Magnetfeld ist gezeichnet in (c). Der α -Effekt macht jetzt daraus einen poloidalen Strom, $\parallel \mathbf{B}_{0p}$ im Norden und $\parallel -\mathbf{B}_{0p}$ im Süden (d). Das zugehörige toroidale Magnetfeld verstärkt das ursprüngliche Feld von (a), so dass der Kreis geschlossen ist.

Der α^2 -Dynamo hat gewisse Ähnlichkeiten mit dem Erddynamo. Auch das Erdmagnetfeld ist nicht periodisch. Differentielle Rotation ist nicht sehr stark in der Erde aber trotzdem genügt der geringe Geschwindigkeitsunterschied zwischen Innenkern und Aussenkern wahrscheinlich um den Erddynamo als $\alpha\omega/\alpha^2\omega$ -Dynamo einzustufen (siehe §10).

7.5.2 Spherische MF-Dynamos

Man darf nicht immer die Ergebnisse der lokalen Analyse extrapolieren zu einer anderen (endlichen) Geometrie. So gibt es z.B. durchaus periodische Lösungen des α^2 -Dynamos in einer Kugel, obwohl die meisten Lösungen in der Tat nicht periodisch sind. Auch ist in einem endlichen Volumen die Wellenzahl k nicht mehr beliebig. Die Werte von k formen ein diskretes Spektrum und es gibt eine Untergrenze $k \lesssim 1/L_0$, bestimmt durch die Dimension des Dynamos. Um zu wissen welche globale Eigenschwingungen angeregt werden können muss die Dynamogleichung in der geeigneten Geometrie gelöst werden.

In einem sphärischen Dynamo liegt es nahe \mathbf{B}_0 zu zerlegen in toroidale und poloidale Komponenten (§4.4). Der Einfachheit halber gehen wir aus von Axialsymmetrie ($\partial/\partial\phi = 0$). Das mittlere Magnetfeld darf dann geschrieben werden als

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_p = B_t \mathbf{e}_\phi + \nabla \times A_p \mathbf{e}_\phi. \quad (293)$$

Sei die mittlere Strömung rein toroidal,

$$\mathbf{u}_0 = u_0 \mathbf{e}_\phi, \quad u_0 = \Omega r \sin \theta, \quad (294)$$

wo $\Omega(r, \theta)$ die differentielle Rotation darstellt. Dann folgt aus (265)

$$\frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_p) + \nabla \times \alpha \mathbf{B}_p - \nabla \times (\beta \nabla \times \mathbf{B}_t), \quad (295)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} = \nabla \times \alpha \mathbf{B}_t - \nabla \times (\beta \nabla \times \mathbf{B}_p). \quad (296)$$

Wir betrachten zuerst alle Terme zur rechten Seite. Die Rotation des Vektors $\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_p = u_0 (B_\theta \mathbf{e}_r - B_r \mathbf{e}_\theta)$ in Kugelkoordinaten lautet [$s = r \sin \theta$; $\Omega = u_0/s$; vergleiche die Ableitung von (104)]:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}_p) &\stackrel{90}{=} \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r u_0 B_r + \frac{\partial}{\partial \theta} u_0 B_\theta \right\} = s \mathbf{e}_\phi \left\{ \nabla \cdot \frac{u_0 \mathbf{B}_p}{s} \right\} = s \mathbf{e}_\phi (\mathbf{B}_p \cdot \nabla) \Omega \\ &= \nabla \Omega \times \nabla s A_p. \end{aligned} \quad (297)$$

Im letzten Schritt haben wir

$$\mathbf{B}_p = \nabla \times \mathbf{A}_p \stackrel{90}{=} -\frac{1}{s} \mathbf{e}_\phi \times \nabla s A_p \quad (298)$$

gesetzt. Da jetzt α nicht mehr konstant genommen werden darf, ist auch der nächste Term etwas komplizierter:

$$\begin{aligned} \nabla \times \alpha \mathbf{B}_p &\stackrel{90}{=} \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r \alpha B_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \alpha B_r \right\} = \alpha \nabla \times \mathbf{B}_p + \mathbf{e}_\phi \left\{ B_\theta \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \frac{B_r}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right\} \\ &= \alpha \nabla \times \nabla \times A_p \mathbf{e}_\phi + (\nabla \alpha \times \mathbf{B}_p) \end{aligned} \quad (299)$$

Im ersten Term von (299) substituieren wir

$$\nabla \times \nabla \times A_p \mathbf{e}_\phi \stackrel{93}{=} -\mathbf{e}_\phi \left\{ \nabla^2 - \frac{1}{s^2} \right\} A_p = -\mathbf{e}_\phi \Delta' A_p. \quad (300)$$

Der zweite Term von (299) lautet

$$\nabla \alpha \times \mathbf{B}_p \stackrel{298}{=} -\frac{1}{s} \nabla \alpha \times (\mathbf{e}_\phi \times \nabla s A_p) = -\mathbf{e}_\phi \frac{1}{s} (\nabla \alpha \cdot \nabla) s A_p, \quad (301)$$

so dass

$$\nabla \times \alpha \mathbf{B}_p = -\mathbf{e}_\phi \alpha \Delta' A_p - \mathbf{e}_\phi \frac{1}{s} (\nabla \alpha \cdot \nabla) s A_p. \quad (302)$$

Der letzte Term von (295) ist zu schreiben als

$$-\beta \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}_t \stackrel{93}{=} \beta \mathbf{e}_\phi \Delta' B_t. \quad (303)$$

Gleichung (296) ist durch Substitution von $\mathbf{B}_p = \nabla \times A_p \mathbf{e}_\phi$ zu schreiben in der Form $\nabla \times \mathbf{w}_t = 0 \Rightarrow \mathbf{w}_t = (\nabla \Phi)_\phi = 0$ und darf also 'entrotiert' werden. Der letzte Term von (296) wird durch Anwendung von (93) umgeschrieben. Schliesslich berechnen wir für alle Terme von (295) den Skalarprodukt mit \mathbf{e}_ϕ und verwenden (J1) für den Skalarprodukt mit (297). Nach diesen Manipulationen ergibt sich aus (295-296)

$$\frac{\partial B_t}{\partial t} = (\mathbf{e}_\phi \times \nabla \Omega) \cdot \nabla s A_p - \alpha \Delta' A_p - \frac{1}{s} (\nabla \alpha \cdot \nabla) s A_p + \beta \Delta' B_t, \quad (304)$$

$$\frac{\partial A_p}{\partial t} = \alpha B_t + \beta \Delta' A_p. \quad (305)$$

Diese Gleichungen sind denen der flachen Geometrie (270-271) sehr ähnlich, nur hat der Gradient von α zu einem neuen Term Anlass gegeben. Als Beispiel suchen wir Lösungen für den Fall

$$\Omega = \Omega(r), \quad \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \Omega' = \text{konstant}, \quad (306)$$

$$\alpha = \alpha_m \cos \theta. \quad (307)$$

Der erste und dritte Term von (304) reduzieren zu

$$(\mathbf{e}_\phi \times \nabla \Omega) \cdot \nabla s A_p = \Omega' \frac{\partial}{\partial \theta} A_p \sin \theta, \quad (308)$$

$$-\frac{1}{s} (\nabla \alpha \cdot \nabla) s A_p = -\frac{\alpha'}{s} \frac{\partial}{\partial \theta} A_p \sin \theta, \quad (309)$$

wo $\alpha' = \partial \alpha / \partial \theta$. Wir suchen Lösungen der Form

$$A_p = R \operatorname{Re} P \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (310)$$

$$B_t = \operatorname{Re} T \frac{e^{ikr}}{r} \quad (311)$$

wo $P = P(\theta, t)$ und $T = T(\theta, t)$ komplexe Funktionen sind und R ein Radius ist der später festgelegt wird. Durch den Faktor R in der Definition von A_p erhalten P und T die gleiche Dimension $[\text{T m}^{-1}]$. Es gilt

$$\Delta' P \frac{e^{ikr}}{r} = \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta - k^2 \right\} P \frac{e^{ikr}}{r} \quad (312)$$

und ähnlich für $T \exp(ikr)/r$. Alle Ableitungen nach r sind jetzt verschwunden. Wir setzen überall $r = R$ und definieren dimensionslose Grössen

$$\tilde{\Delta}' = R^2 \Delta', \quad \tilde{\alpha} = \alpha/\alpha_m, \quad \tau = t\beta/R^2. \quad (313)$$

Es ergeben sich folgende Gleichungen für P und T :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} - \tilde{\Delta}' \right\} T = C_\omega \frac{\partial}{\partial \theta} P \sin \theta - C_\alpha \tilde{\alpha} \tilde{\Delta}' P - C_\alpha \frac{\tilde{\alpha}'}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} P \sin \theta, \quad (314)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} - \tilde{\Delta}' \right\} P = C_\alpha \tilde{\alpha} T, \quad (315)$$

wo

$$C_\omega = \frac{\Omega' R^3}{\beta}, \quad C_\alpha = \frac{\alpha_m R}{\beta}, \quad C = C_\alpha C_\omega \quad (316)$$

die Dynamozahlen der differentiellen Rotation (C_ω) bzw. des α -Effektes (C_α) sind. Ein $\alpha\omega$ -Dynamo hat $|C_\omega| \gg |C_\alpha|$, ein $\alpha^2\omega$ -Dynamo $|C_\omega| \approx |C_\alpha|$ und ein α^2 -Dynamo $|C_\omega| \ll |C_\alpha|$.

Die Symmetrie der Lösungen bezüglich der Äquatorebene $\theta = \pi/2$ wird als *Parität* bezeichnet; sie ist antisymmetrisch (A) oder symmetrisch (S). Im allgemeinen ist eine Lösung zu schreiben als $T = T_A + T_S$ und $P = P_A + P_S$. Wenn man jetzt die symmetrischen und antisymmetrischen Teile von (314-315) trennt, zeigt sich dass T_A nur an P_S gekoppelt ist und T_S nur an P_A , denn Multiplikation mit α oder Ableitung nach θ tauscht die Parität um; Multiplikation mit $\sin \theta$ lässt die Parität unverändert.

Betrachten wir zuerst einen $\alpha\omega$ -Dynamo, wobei wir natürlich den Sonnendynamo im Auge behalten. Gleichungen (314-315) reduzieren zu

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} - \tilde{\Delta}' \right\} T = C_\omega \frac{\partial}{\partial \theta} P \sin \theta, \quad (317)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} - \tilde{\Delta}' \right\} P = C_\alpha \tilde{\alpha} T \quad (318)$$

Die Lösungen erhalten wir durch eine Zerlegung in Legendrefunktionen,

$$P(\theta, \tau) = C_\alpha e^{\lambda \tau} \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n^1(\cos \theta), \quad (319)$$

$$T(\theta, \tau) = e^{\lambda \tau} \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n^1(\cos \theta). \quad (320)$$

Die Aufnahme des Faktors C_α in P wird sich später als bequem erweisen. Die Legendrefunktionen sind Lösungen der Gleichung

$$\tilde{\Delta} P_n^1 = -n(n+1)P_n^1, \quad (321)$$

d.h. es sind Lösungen von (317) wenn $C_\omega = 0$ oder von (318) wenn $C_\alpha = 0$ (frei zerfallende Felder oder *decay modes*). Die $P_n^1(x)$ [$x = \cos \theta$] haben die Eigenschaften

$$(2n+1)xP_n^1 = nP_n^1 + (n+1)P_{n-1}^1, \quad (322)$$

$$(x^2-1)\frac{dP_n^1}{dx} = nxP_n^1 - (n+1)P_{n-1}^1. \quad (323)$$

Wir verwenden Identitäten (321-323) um die einzelnen Terme von (317-318) als Kombinationen von P_n^1 zu schreiben. Bemerke dazu:

$$\tilde{\Delta}' P_n^1 = -\left\{ n(n+1) + (kR)^2 \right\} P_n^1, \quad (324)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_n^1 \sin \theta = \frac{n(n+1)}{2n+1} \left\{ P_{n+1}^1 - P_{n-1}^1 \right\}, \quad (325)$$

$$P_n^1 \cos \theta = \frac{1}{2n+1} \left\{ nP_{n+1}^1 + (n+1)P_n^1 \right\}, \quad (326)$$

Substitution von (325-326) in (317-318) liefert für diese Terme nach Ummummerierung

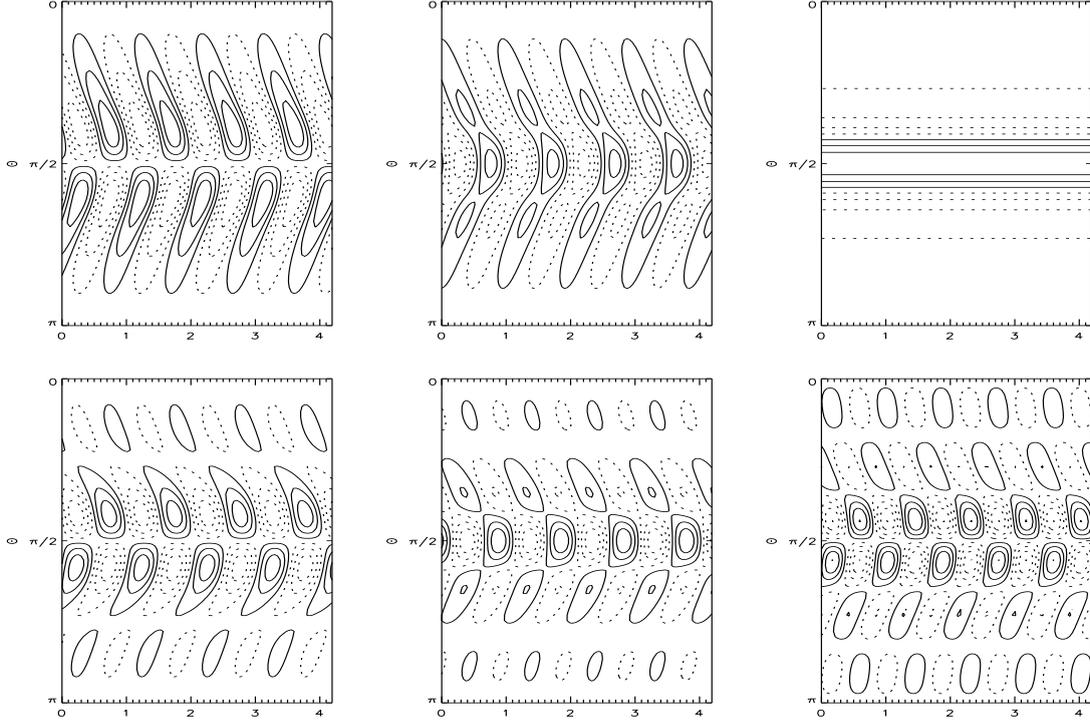


Abbildung 35: Eigenfunktionen von (317-318) mit $kR = 3$ und $C = C_{\text{krit}} = -1319$. Gezeigt sind Konturlinien von $T(\tau, \theta)$ für die ersten sechs Eigenmodes. Der exponentielle Zerfall der Obertöne ist entfernt worden für die Anschaulichkeit.

$$C_\omega \frac{\partial}{\partial \theta} P \sin \theta = C e^{\lambda \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n(n-1)}{2n-1} a_{n-1} - \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} a_{n+1} \right\} P_n^1, \quad (327)$$

$$C_\alpha \tilde{\alpha} T = C_\alpha e^{\lambda \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n-1}{2n-1} b_{n-1} + \frac{n+2}{2n+3} b_{n+1} \right\} P_n^1. \quad (328)$$

Gleichungen (317-318) ergeben somit folgende Beziehungen zwischen den Entwicklungskoeffizienten:

$$\left\{ \lambda + (kR)^2 + n(n+1) \right\} b_n = C \left\{ \frac{n(n-1)}{2n-1} a_{n-1} - \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} a_{n+1} \right\}, \quad (329)$$

$$\left\{ \lambda + (kR)^2 + n(n+1) \right\} a_n = \frac{n-1}{2n-1} b_{n-1} + \frac{n+2}{2n+3} b_{n+1}. \quad (330)$$

Die Legendrefunktionen P_n^1 sind S bezüglich des Äquators für n ungerade (z.B. $P_1^1 = \sin \theta$) und A für n gerade. Gleichungen (329-330) bestätigen also die Kopplung zwischen symmetrischem T und antisymmetrischem P bzw. zwischen antisymmetrischem T und symmetrischem P .

Der einzige Parameter in (329-330) ist C ; die Lösungen hängen also nur vom Produkt $C = C_\alpha C_\omega$ ab. Das gilt nicht für das Verhältnis P/T : wenn wir (317-318) abschätzen durch $\Lambda T \approx C_\omega P$ und $\Lambda P \approx C_\alpha T$, folgt durch Substitution $|\Lambda|^2 \approx |C| \Rightarrow |P/T| \approx \sqrt{|C_\alpha/C_\omega|}$. Das mittlere Magnetfeld hat folgende Beziehung zu P und T [verwende (293), (298) und (310-311)]:

$$\mathbf{B}_0 = \text{Re} \left\{ T \mathbf{e}_\phi - \frac{1}{\sin \theta} \mathbf{e}_\theta \times \left[ikR \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] P \sin \theta \right\} e^{ikr/R}. \quad (331)$$

Wenn $kR = \mathcal{O}(1)$ erhalten wir

$$\frac{B_{0p}}{B_{0t}} \approx \left| \frac{P}{T} \right| \approx \sqrt{\left| \frac{C_\alpha}{C_\omega} \right|}. \quad (332)$$

Dieses Ergebnis besagt also $B_{0p}/B_{0t} \approx \sqrt{|\alpha_m/\Omega'R^2|}$, ähnlich wie in der flachen Geometrie (286).

Tabelle 2: Dimensionslose Wachstumsraten und Frequenzen der ersten sechs Eigenschwingungen für $kR = 3$ und $C = -1319$

i	Parität	γ_i	ω_i
0	A	0.00	27.9
1	S	-2.09	27.6
2	S	-8.94	0.00
3	A	-17.4	26.2
4	S	-28.4	27.4
5	A	-42.1	31.0

Die rekurrenten Beziehungen (329-330) können numerisch gelöst werden indem man die Summierung abbricht bei $n = N$. Die $2N$ Gleichungen für $2N$ Unbekannte werden als Matrize geschrieben und für diese Matrize werden Eigenvektoren $\{a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N\}$ und Eigenwerte λ_i berechnet. Dabei soll N so gross gewählt werden dass die Eigenvektoren genügend konvergieren. Aus jedem Eigenvektor erhält man durch Summierung der Legendrefunktionen (319-320) eine Eigenfunktion der Dynamogleichung, $P_i(\theta, \tau)$ und $T_i(\theta, \tau)$. Abb. (35) zeigt die ersten sechs Eigenfunktionen für einen $\alpha\omega$ -Dynamo mit $kR = 3$ und $C = -1319$; die zugehörigen Eigenwerte sind zu finden in Tabelle (2). Die Lösungen sind gezeichnet als Schmetterlingsdiagramme (Höhenlinien) von $T_i(\theta, \tau)$. Die Eigenwerte,

$$\lambda_i = i\omega_i + \gamma_i, \quad (333)$$

sind beim $\alpha\omega$ -Dynamo meistens komplex, so dass die Eigenfunktionen periodisch sind ($\omega_i \neq 0$), obwohl in Abb. (35) auch eine stationäre (d.h. nicht-periodische) Eigenfunktion gezeigt wird ($\omega_2 = 0$). Die Wachstumsraten γ_i hängen wie ω_i ab von C - meistens (aber nicht immer) gilt $\gamma_i \uparrow$ wenn $|C| \uparrow$. Die Eigenfunktionen werden üblicherweise so nummeriert dass $\gamma_0 \geq \gamma_1 \geq \gamma_2 \dots$. Die *kritische Dynamozahl* $C_{\text{krit},i}$ einer Eigenschwingung ist definiert durch

$$C = C_{\text{krit},i} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_i = 0, \quad (334)$$

d.h. die Eigenschwingung i ist *marginal stabil*. Meistens bezeichnet man $C_{\text{krit},0}$ einfach als C_{krit} , die Dynamozahl bei der die dominante Eigenfunktion marginal stabil ist und die übrigen gedämpft sind. Das negative Vorzeichen von C sorgt dafür dass die Dynamowellen zum Äquator laufen. Das Schmetterlingsdiagramm für die erste Eigenschwingung sieht erstaunlich gut aus und reproduziert essentielle Eigenschaften des solaren Magnetfeldes (Abb. 2). Durch eine geschickte Wahl von R^2/β kann man bewirken dass die Zyklusdauer $2\pi R^2/\beta\omega_0 \approx 22$ Jahre ist.

7.6 Nichtlineare MF-Dynamos

Wenn die Dynamozahl $|C| > |C_{\text{krit}}|$ ist ergibt sich nach der (linearen) MF-Theorie ein exponentiell anwachsendes mittleres Magnetfeld. Dies entspricht nicht den Beobachtungen des Sonnenzyklus, denn abgesehen von Fluktuationen bleibt $|\mathbf{B}|$ etwa konstant, wenn gemittelt über sukzessive Zyklen. In der (linearen) MF-Theorie ist man daher gezwungen künstlich $C \approx C_{\text{krit}}$ zu setzen. Auch ist wegen der Linearität die absolute Grösse von \mathbf{B}_0 nicht festgelegt. In Wirklichkeit wird \mathbf{B} bei einer superkritischen Dynamozahl beschränkt durch nichtlineare Effekte wie die Lorentzkraft und Flusseruption. Da diese Effekte ab einem bestimmten Schwellwert (typisch die Äquipartitionsfeldstärke B_{eq}) wichtig werden, liefern sie einen Referenzwert für $|\mathbf{B}|$ (vergleiche den Scheibendynamo, §3).

Daneben bieten nichtlineare Oszillationen vielleicht eine Erklärung für die beobachtete Variabilität im Sonnendynamo, d.h. Variierungen der Länge und Amplitude des Sonnenzyklus (Maunderminimum) und für die Asymmetrie im Schmetterlingsdiagramm (gemischte Parität).

Leider ist die Ableitung der Dynamogleichung (§7.3) nur gültig im kinematischen Bereich. Trotzdem möchte man die (mit Sicherheit stattfindende) Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Strömung auch in der MF-Theorie berücksichtigen. Dies tut man auf heuristische Weise, indem man z.B. die Dynamoparameter $(\alpha, \beta, \mathbf{u}_0)$ zu Funktionen von \mathbf{B}_0 macht (*quenching*) oder die MF-Dynamogleichung ausbreitet mit einem nichtlinearen Verlustterm (Flusseruption). Zum Teil sind solche Ansätze für α - und ω -Quenching und Flusseruption unterstützt durch Berechnungen der

mittleren EMK $\langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle(B_0)$ in einem turbulentem Medium unter der Annahme eines uniformen konstanten mittleren Feldes \mathbf{B}_0 (z.B. Arbeiten von Kitchatinov, siehe §7.6.3). Man muss aber im Auge behalten dass es keine konsistente Ableitung einer nichtlinearen MF-Dynamogleichung gibt.

Die Lorentzkraft besteht aus zwei Termen von dem der erste Spannungs- und Krümmungskräfte, der zweite die magnetische Druckkraft beschreibt:

$$\mathbf{f}_{\text{lor}} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \stackrel{\text{J9}}{=} \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \nabla B^2. \quad (335)$$

Wir zerlegen die Lorentzkraft in einen Mittelwert und einen variierenden Beitrag:

$$\langle \mathbf{f}_{\text{lor}} \rangle = \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 + \langle \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle, \quad (336)$$

$$\mathbf{f}'_{\text{lor}} = \mathbf{f}_{\text{lor}} - \langle \mathbf{f}_{\text{lor}} \rangle = \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0. \quad (337)$$

Die mittlere Lorentzkraft $\langle \mathbf{f}_{\text{lor}} \rangle$ beeinflusst die mittlere Strömung \mathbf{u}_0 ; dieser Effekt wird bezeichnet als Ω -Quenching. \mathbf{f}'_{lor} beeinflusst die turbulente Geschwindigkeit \mathbf{u}_1 und somit alle Turbulenzparameter; dies gibt Anlass zu α - und β -Quenching. Bemerke dass \mathbf{f}_{lor} sowohl vom *mittleren* Feld \mathbf{B}_0 als vom kleinskaligen Feld \mathbf{B}_1 abhängt, d.h. $\alpha = \alpha(\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1)$ und ähnlich für β und Ω . Die MF-Dynamogleichung liefert aber nur \mathbf{B}_0 . Wir müssen daher annehmen $\mathbf{B}_1 \approx \mathbf{B}_1(\mathbf{B}_0)$, so dass α , β und Ω als Funktionen von \mathbf{B}_0 betrachtet werden dürfen.

Es gibt eine Vielzahl von Untersuchungen zu MF-Dynamos mit nicht-linearen Termen. In den folgenden Abschnitten (§§7.6.1-7.6.3) werden nur einige Beispiele von α -, Ω -Quenching und Flusseruption erwähnt; mehr sind zu finden bei u.A. Weiss, Cattaneo und Jones⁴². Ein MF-Dynamo mit β -Quenching ist zu finden bei Rüdiger *et al*⁴³.

7.6.1 α -Quenching

Die genaue Feldstärke bei der die Lorentzkraft wichtig wird ist noch umstritten. Oft wird angenommen dass der Schwellwert liegt bei $B_0 \approx B_{\text{eq}}$, das heisst wenn Äquipartition herrscht zwischen magnetischer Energie des *mittleren* Feldes und kinetischer Energie der Konvektion. Für $B_0 \gtrsim B_{\text{eq}}$ lassen Spannungs- und Krümmungskräfte dann keine Drehung der magnetischen Schleifen durch die Corioliskraft mehr zu, so dass $\alpha \rightarrow 0$. Zwei Beispiele davon werden jetzt erwähnt. Sei

$$\alpha(\mathbf{r}, B_0) = \alpha_0(\mathbf{r}) f(B_0), \quad (338)$$

dann lautet der *cut-off*- α von Stix⁴⁴:

$$f_1(B_0) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{B_0 - B_c}{\Delta B} \right) \right], \quad (339)$$

wo $\operatorname{erf}(x) = \sqrt{\pi/2} \int_0^x dt \exp\{-t^2\}$ und $B_c \approx B_{\text{eq}}$ (Abb. 36). Stix hat diesen Effekt in einem 1D $\alpha\omega$ -Dynamo untersucht. Dazu wurde die Dynamogleichung in entdimensionierter Form numerisch gelöst:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} T = C_\omega \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (340)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} P = C_\alpha \cos x f_1(B_0) T, \quad (341)$$

wo x die Breite darstellt und $B_0 = \sqrt{T^2 + (\partial P / \partial x)^2}$. Abb. (37) zeigt eine superkritische periodische Lösung. Wenn $|T| < B_c$ dann funktioniert der α -Effekt und steigt P rasch an zu einem Maximum; die differentielle Rotation erzeugt daraus ein toroidales Feld das etwas später sein Maximum erreicht. Die Abhängigkeit der Amplitude und der Periode von C/C_{krit} wird gezeigt in Abb. (37). Ein zweites Beispiel stammt von Jepps⁴⁵ und lautet

$$f_2(B_0) = \frac{1}{1 + (B_0/B_c)^n}; \quad (342)$$

⁴²Weiss, N.O., Cattaneo, F. und Jones, C.A., 1984, GAFD **30**, 305-41

⁴³Rüdiger, G., Kitchatinov, L.L, Küker, M. und Schultz, M., 1994, GAFD **78**, 247-59

⁴⁴Stix, M., 1972, A&A **20**, 9

⁴⁵Jepps, S.A., 1975, *Journ. Fluid Mech.* **67**, 625-46

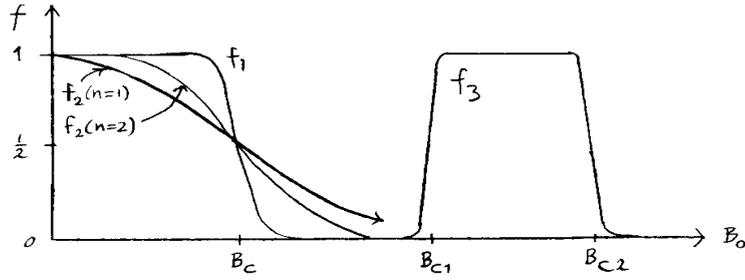


Abbildung 36: α -Quenching

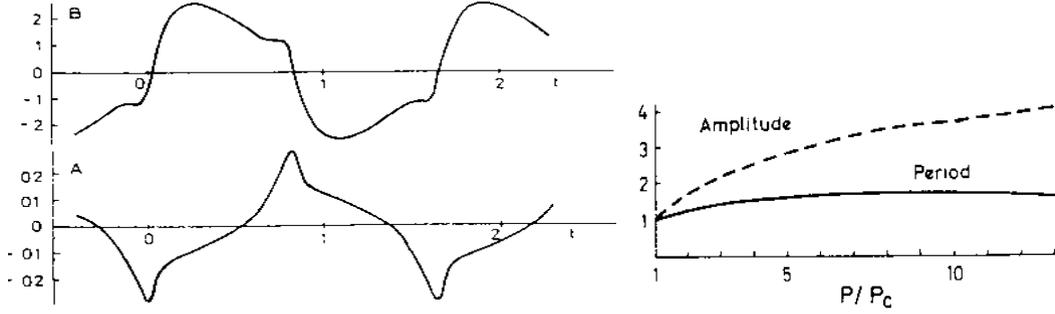


Abbildung 37: a) 1D $\alpha\omega$ -Dynamo mit cut-off- α ; $C = 5C_{\text{krit}}$. Gezeigt werden T/B_c (oben) und P/B_c (unten) als Funktion von τ bei festem x . b) Amplitude und Periode als Funktion von C/C_{krit} ($=P/P_c$) (Stix 1972)

siehe Abb. 36. Jepps hat diesen Ansatz verwendet in einem sphärischen axialsymmetrischen $\alpha\omega$ -Dynamo [siehe (304-305) ohne die α^2 -Terme]. Für $\alpha_0(r, \theta)$ und $\mathbf{u}_0(r, \theta)$ verwendete er u.A. ('Model 2')

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{r - r_2}{d} \right) \right] \cos \theta, \quad (343)$$

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{r - r_2}{d} \right) \right] r \sin \theta \mathbf{e}_\phi, \quad (344)$$

wo $d \ll r_2$, so dass α und die differentielle Rotation in unterschiedlichen Schichten existieren: $r \gtrsim r_2$ bzw. $r \lesssim r_2$. Aus praktischen Gründen ersetzte er (342) durch $1/(1 + |T|^n)$, was erlaubt ist weil in einem $\alpha\omega$ -Dynamo meistens $|T| \gg |P|$. Abb. (38) zeigt einige numerische Lösungen ohne und mit α -Quenching. Je grösser n ist, desto stärker weichen die Lösungen ab vom linearen Fall (a); für $n = 3$ und C/C_{krit} genügend gross gibt es z.B. Übergänge zwischen zwei periodischen Lösungen (d).

Vainstein *et al*⁴⁶ betonen dass in einem turbulentem Medium α schon bei einer Feldstärke $B_0 \approx B_{\text{eq}}/\sqrt{R_m}$ stark reduziert ist, weil das kleinskalige Magnetfeld bereits dann Äquipartition erreicht: $B_1 \approx B_0\sqrt{R_m}$. Dies stellt die Möglichkeit eines 'klassischen' α -Effektes in Frage. Wenn das Ergebnis von Vainshtein *et al* auch in der Sonne gültig ist, kann der Sonnendynamo nur auf Grund eines völlig anderen α -Effektes funktionieren.

Eine mögliche Lösung beruht auf einer magnetischen Instabilität von toroidalen Flussröhren. Diese Instabilität wird verursacht von der magnetischen Auftriebskraft und tritt nur auf wenn die magnetische Feldstärke in der Flussröhre $B_T > B_{T1} \approx 10^5$ G ist; wenn B_T zu gross ist, nimmt α wieder ab weil die Flussröhren zu rasch aus der Dynamoschicht entfernt werden. Mehr über diese Instabilität ist zu finden in §9.3. Die Übersetzung in die Sprache der MF-Theorie erfordert eine Umrechnung $B_0 \approx f B_T$, wo f die Volumenfraktion der Flussröhren ist. Somit kann dieser α -Effekt

⁴⁶Vainshtein, S.I., Cattaneo, F. (1992), ApJ **393**, 165-71; Tao, L., Cattaneo, F., Vainshtein, S.I., in *Solar and Planetary Dynamos*, Proctor, M.R.E. *et al* (eds.), Cambridge 1993

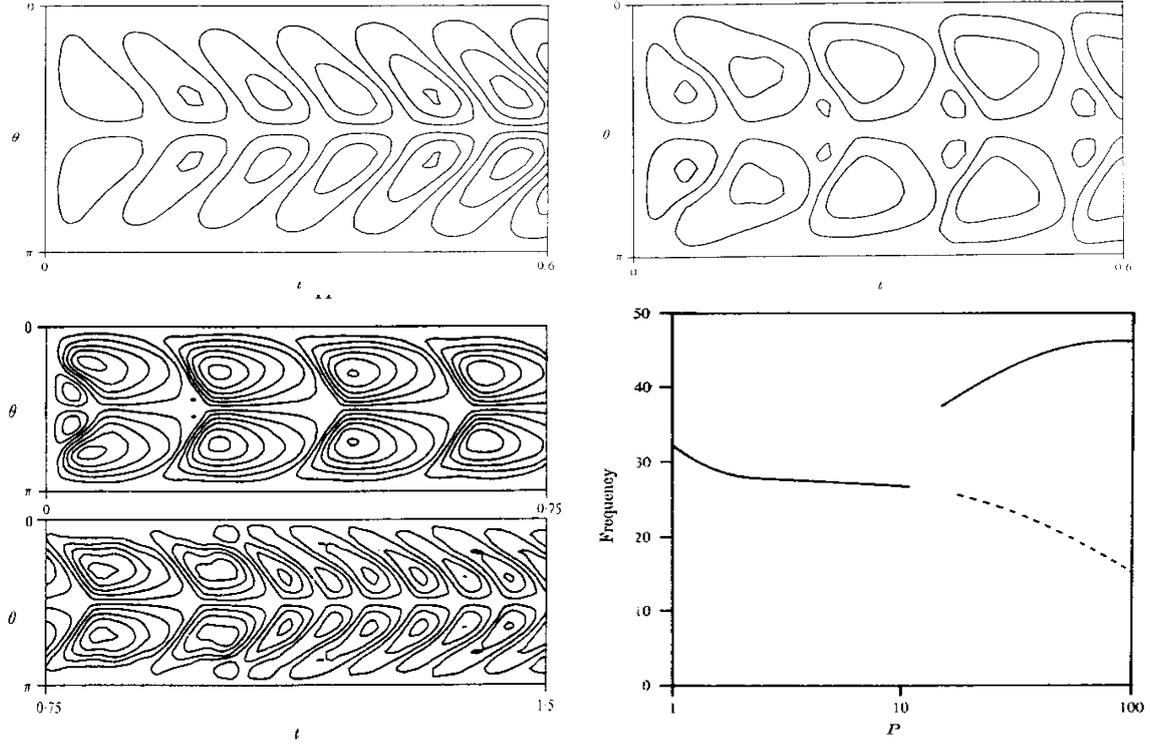


Abbildung 38: α -Quenching in einem sphärischen $\alpha\omega$ -Dynamo. Gezeigt sind Schmetterlingsdiagramme von T für **linksoben (a)** $C = C_{\text{krit}}$, $f = 1$; **rechtsoben (b)** $C/C_{\text{krit}} = 10$, $f = f_2$, $n = 1$; **linksunten (c)** $C/C_{\text{krit}} = 7$, $f = f_2$, $n = \infty$. **rechtsunten (d)** Periode als Funktion von C/C_{krit} ($= 'P'$) für $n = 3$. (Jepps 1975)

in der MF-Dynamogleichung schematisch modelliert werden durch den Ansatz

$$f_3(B_0) = \begin{cases} 0 & (B_0 < B_{c1}) \\ 1 & (B_{c1} < B_0 < B_{c2}) \\ 0 & (B_0 > B_{c2}), \end{cases} \quad (345)$$

wo $B_{c1} = fB_{T1}$ und $B_{c2} = fB_{T2}$; siehe Abb. 36. Für ein numerisches Beispiel eines MF-Dynamos mit diesem α -Effekt, siehe §9.

7.6.2 Dynamisches Ω -Quenching

Die Effekte der Lorentzkraft können auch modelliert werden durch zusätzliche (nichtlineare) Differentialgleichungen für α , β oder \mathbf{u}_0 . Ein Beispiel stammt von Tobias und Weiss⁴⁷. Sie modellieren den Sonnendynamo als $\alpha\omega$ -Dynamo in einer axialsymmetrischen kartesischen 2D-Geometrie. Die Koordinaten sind definiert wie bei der Parkerwelle (§7.4.1); $x = 0$ und $x = L_x$ bezeichnen Nordpol bzw. Äquator, z ist der radiale Koordinate, wobei $-L_z < z < 0$ die *Overshoot*-Schicht (OS; siehe §9) und $0 < z < L_z$ die Konvektionsschicht (KS) sind. Differentielle Rotation $\mathbf{u}_0 = u_0 \mathbf{e}_y$ ist in der OS konzentriert und α in der KS, eine Idee die zurückgeht auf u.A. Parker⁴⁸ und die weiter unten begründet wird (§9.2). Nach einer Zerlegung von \mathbf{B}_0 in toroidale und poloidale Komponenten, $\mathbf{B}_0 = B_t \mathbf{e}_y + \nabla \times A_p \mathbf{e}_y$, lautet die MF-Dynamogleichung (vergleiche 270-271):

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \beta \nabla^2 \right\} B_t = (\mathbf{e}_y \times \mathbf{a}) \cdot \nabla A_p, \quad (346)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \beta \nabla^2 \right\} A_p = \alpha B_t, \quad (347)$$

⁴⁷Tobias, S.M., 1996, A&A **307** L21-4; Weiss, N.O. und Tobias, S.M., 1997, in *Solar and Heliospheric Plasma Physics*, G.M. Simnett (Her.) Springer

⁴⁸Parker, E.N., 1993, ApJ **408**, 707-19

wo $\mathbf{a} = \nabla u_0$. Diese Gleichung erzeugt Parkerwellen, die sich entlang die Grenze der beiden Schichten fortpflanzen, sogenannte *surface-waves* (§9.2). Für α und u_0 wird folgender Ansatz verwendet:

$$\alpha = \alpha_0(z) \cos\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right), \quad (348)$$

$$u_0 = v(z) \sin\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) + w(x, z, t). \quad (349)$$

Abb. (39) zeigt α_0 und $v' = \partial v / \partial z$ als Funktionen von z . Die turbulente magnetische Diffusivität

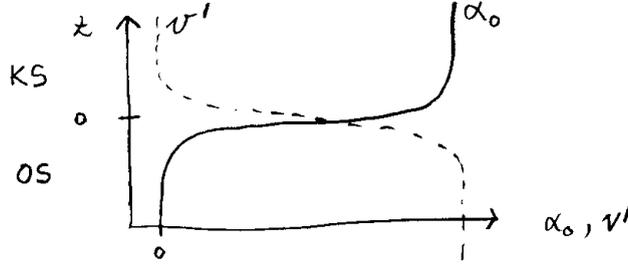


Abbildung 39: z -Abhängigkeit von α und differentieller Rotation v'

β wird konstant genommen. Der erste Teil von u_0 stellt die (radiale) differentielle Rotation da, wobei der Faktor $\sin(\pi x / 2L_x)$ die Konzentration am Äquator und das Verschwinden an den Polen modelliert. Aus (349) folgt

$$\mathbf{a} = \nabla u_0 = \left[\frac{\pi}{2L_x} v \cos\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \mathbf{e}_x + \left[v' \sin\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \mathbf{e}_z. \quad (350)$$

Der zweite Teil von u_0 enthält die Rückwirkung der Lorentzkraft und wird bestimmt durch eine gemittelte Navier-Stokesgleichung (19):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \langle \mathbf{J} \times \mathbf{B} \rangle_y + \nu_t \nabla^2 w, \quad (351)$$

wo $\nu_t \gg \nu$ eine *turbulente* kinematische Viskosität ist. Die mittlere Lorentzkraft (336) wird

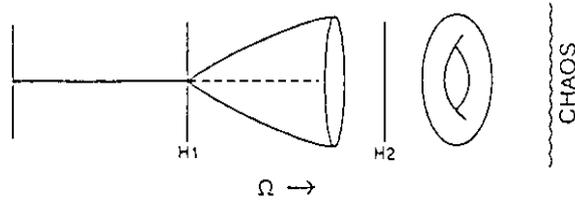


Abbildung 40: Schematisches Diagram der Bifurkationen (Weiss und Tobias 1997)

abgeschätzt durch

$$\langle \mathbf{J} \times \mathbf{B} \rangle_y \approx (\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0)_y \stackrel{J_0}{=} \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) B_t = \frac{1}{\mu_0} \left\{ \frac{\partial A_p}{\partial x} \frac{\partial B_t}{\partial z} - \frac{\partial A_p}{\partial z} \frac{\partial B_t}{\partial x} \right\}. \quad (352)$$

Die Vernachlässigung von $\langle \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle_y$ ist nötig aber nicht unproblematisch denn $|\mathbf{B}_1|$ ist wenigstens so gross als $|\mathbf{B}_0|$ in der Sonne. Es ergibt sich

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \beta \nabla^2 \right\} B_t = \frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial A_p}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial A_p}{\partial z}, \quad (353)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \beta \nabla^2 \right\} A_p = \alpha B_t, \quad (354)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \nu_t \nabla^2 \right\} w = \frac{1}{\mu_0} \left\{ \frac{\partial A_p}{\partial x} \frac{\partial B_t}{\partial z} - \frac{\partial B_t}{\partial x} \frac{\partial A_p}{\partial z} \right\}. \quad (355)$$

Die Eigenschaften der Lösungen werden gesteuert von der Dynamozahl,

$$C = \frac{\alpha_m v'_m L_z^3}{\beta^2}, \quad (356)$$

wo α_m und v'_m typische Werte von α bzw. von v' sind. Wenn $|C| \uparrow$ ergibt sich eine Reihe von Bifurkationen wie schematisch gezeigt wird in Abb. (40). Die Dynamozahl wird negativ gewählt damit die Dynamowellen sich zum Äquator bewegen. Die erste Bifurkation (H1, wo $\mathbf{B}_0 = 0$ instabil wird) tritt auf bei $C = -279$ für eine Dipollösung (B_t antisymmetrisch) und bei $C = -325$ für eine Quadrupollösung (B_t symmetrisch). Durch Randbedingungen ist es möglich die Parität der Lösungen vorzuschreiben: antisymmetrisch wenn $\partial A_p / \partial x = B_t = \partial u_0 / \partial x = 0$ für $x = L_x$; symmetrisch wenn $\partial B_t / \partial x = A_p = \partial u_0 / \partial x = 0$ für $x = L_x$.

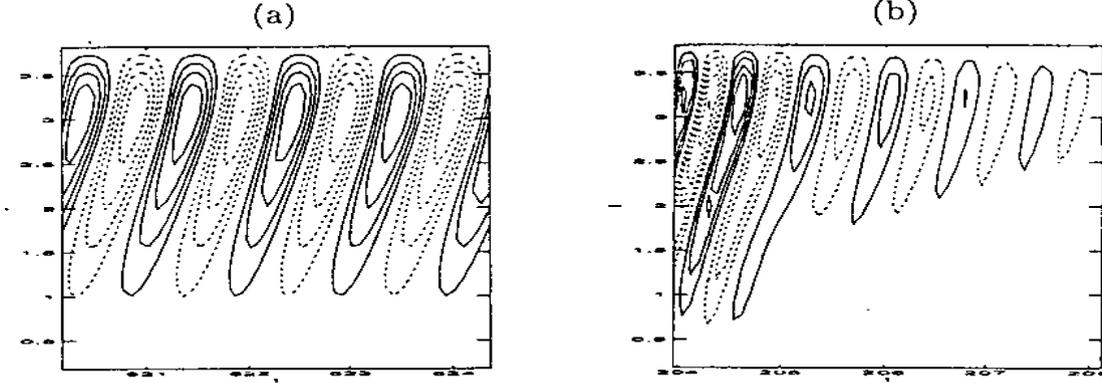


Abbildung 41: Schmetterlingsdiagramme (südliche Halbkugel) von B_t für Dipollösungen mit (a) $C = -500$ und (b) $C = -1500$ (Weiss und Tobias 1997)

Abb. (41) zeigt Beispiele von rein antisymmetrischen Lösungen. Nach der ersten Hopf-Bifurkation gibt es periodische Lösungen mit endlicher Amplitude ($C = -500$). Nach einer zweiten Hopf-Bifurkation entstehen modulierte Zyklen ($C = -1500$). Die Berechnungen zeigen dass die Periode der Modulation etwa $(\nu_t/\beta)^{-1/2}$ mal die Zyklusdauer ist; in den Abbildungen ist $\nu_t/\beta = 0.01$. Die Modulationen entstehen durch Phasenunterschiede zwischen u_0 und \mathbf{B}_0 die eine Folge sind der unterschiedlichen Diffusionszeiten L_z^2/β und L_z^2/ν_t . Möglicherweise sind die Intervalle reduzierter Aktivität zu vergleichen mit dem Maunder-Minimum der Sonne. Je grösser $|C|$, desto länger dauern diese Intervalle; für $C = -2000$ sind die Lösungen chaotisch geworden (Abb. 42).

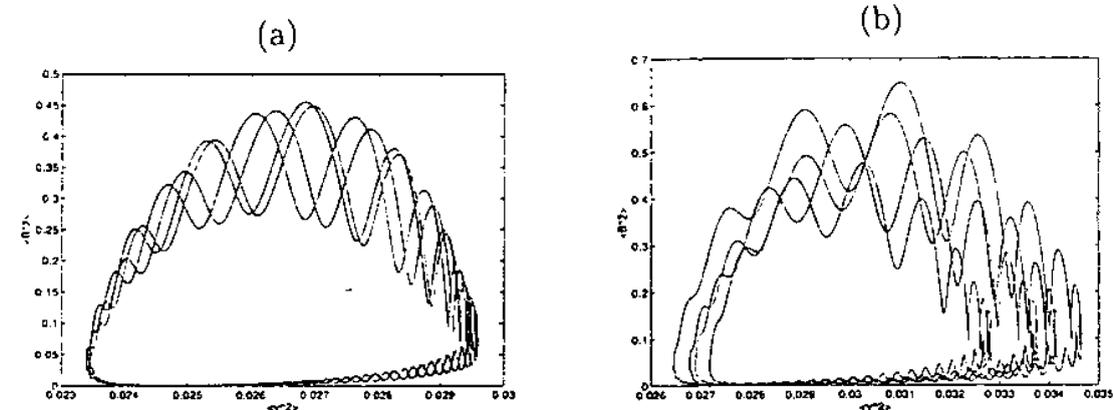


Abbildung 42: Attraktoren für Dipollösungen: $\langle B_t^2 \rangle_{xz}$ gegen $\langle u_0^2 \rangle_{xz}$ für (a) $C = -1500$ und (b) $C = -2000$ (Weiss und Tobias 1997)

Wenn keine Parität wird vorgeschrieben entsteht (für $\nu_t/\beta = 0.1$) eine Sequenz von Lösungen wie gezeigt in Abb. (43). Nach der ersten Bifurkation ergibt sich eine stabile Dipollösung ($C =$

–300); nach der zweiten Bifurkation entsteht eine Lösung gemischter Parität ($C = -400$) und für $C = -500$ entsteht eine stabile Quadrupollösung. Schliesslich ergibt sich für $C = -1200$ eine Lösung mit gemischter Parität, die *regelmässige* Intervalle reduzierter Aktivität aufweist. Während dieser Intervalle ist der Symmetrieverlust am stärksten, was auch für die Sonnenfleckenverteilung im Maunder-Minimum gilt. Unregelmässige Variationen, wie sie beobachtet werden im Sonnenzyklus, ergeben sich in dieser Rechnung nur wenn C stark superkritisch gewählt wird ($\gtrsim 2000$). Es ist unklar ob dann noch realistische Maunder-Minima vorkommen.

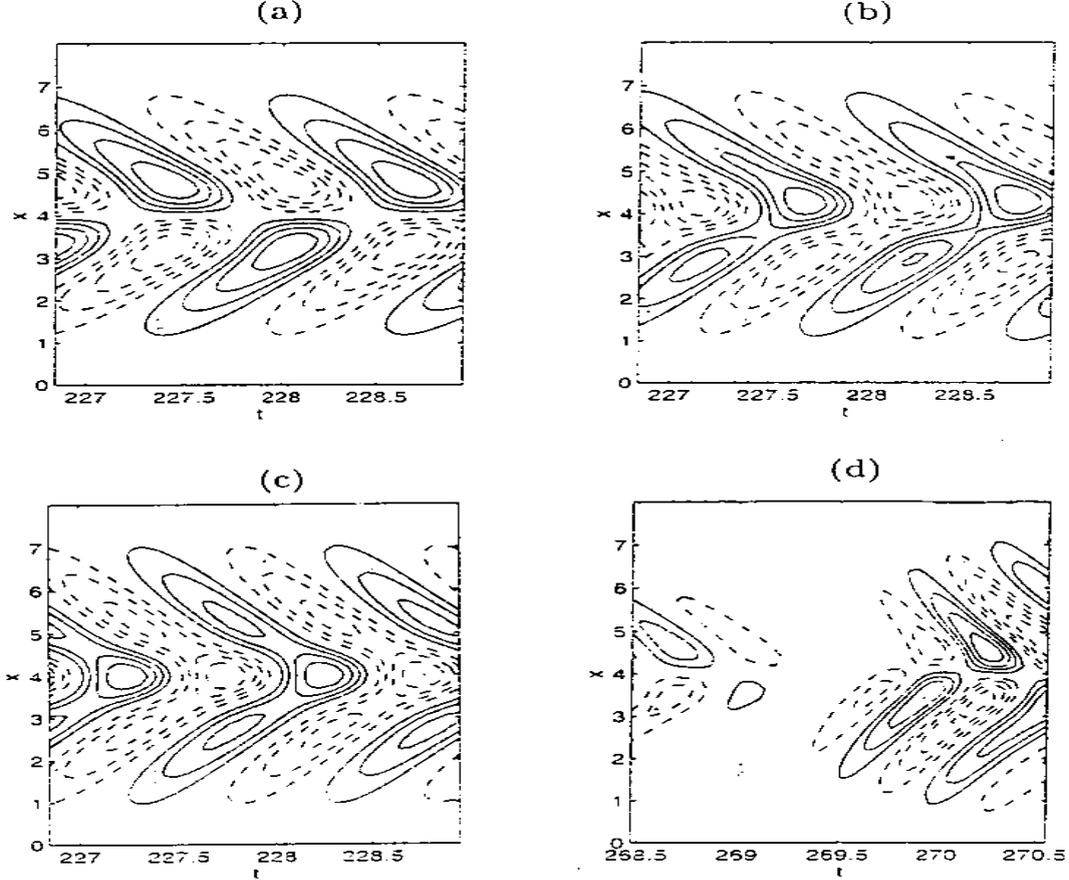


Abbildung 43: Schmetterlingsdiagramme ohne vorgeschriebene Parität für (a) $C = -300$, (b) $C = -400$, (c) $C = -500$ und (d) $C = -1200$ (Weiss und Tobias 1997)

7.6.3 Flusseruption

Neben der Lorentzkraft ist Flusseruption (*buoyancy*) ein zweiter nichtlinearer Effekt zur Festlegung der magnetischen Feldstärke. Das Magnetfeld eines turbulenten Mediums wie z.B. das der solaren Konvektionsschicht neigt zur Bildung starker räumlicher Inhomogenitäten. Magnetische Volumenelemente (Flussröhren) sind daher eingebettet in einem externen nicht-magnetischen Gas, mit dem sie in Druckgleichgewicht sind,

$$p_e = p_i + \frac{B_T^2}{2\mu_0}, \quad (357)$$

wo B_T die Feldstärke in den magnetischen Elementen ist ($B_0/B_T \approx f$ ist die Volumenfraktion der Flussröhren). Wenn $T_i = T_e = T$ dann folgt aus der idealen Gasgleichung ($\rho = p/RT$)

$$\rho_e - \rho_i = \frac{B_T^2}{2\mu_0 RT}. \quad (358)$$

Betrachten wir eine magnetische Flussröhre (Radius a) dann wirkt auf sie eine Auftriebskraft (*buoyancy force*) [N m^{-1}]

$$F_b = (\rho_e - \rho_i)g\pi a^2, \quad (359)$$

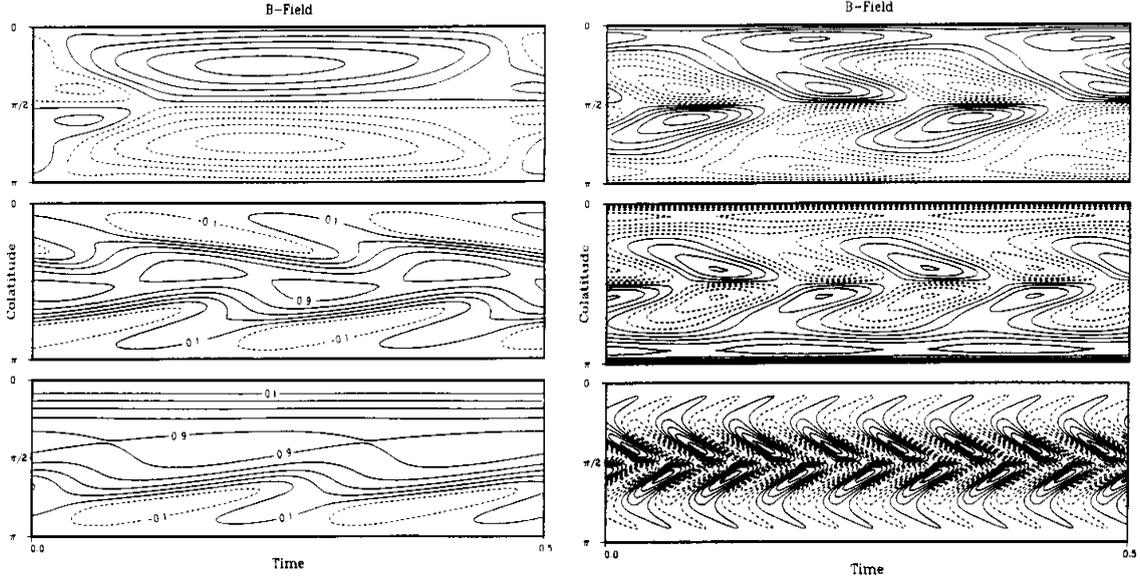


Abbildung 44: Schmetterlingsdiagramme des toroidalen Magnetfeldes eines $\alpha\omega$ -Dynamos mit a) α -Quenching, $C = -2000$, drei unterschiedlichen Anfangsfeldern. b) Flussruption; oben: $C = 1200$; Mitte: $C = 2000$; unten: $C = 12000$ (Schmitt und Schüssler 1989)

und eine Reibungskraft (*drag force*),

$$F_d = C_D \rho_e a u_b^2, \quad (360)$$

wo u_b die Geschwindigkeit der aufsteigenden Flussröhre ist. Im Gleichgewicht $F_b = F_d$ gilt

$$u_b^2 = \frac{\rho_e - \rho_i}{\rho_e} \frac{g \pi a}{C_D} = \frac{\pi g a B_T^2}{2 \mu_0 C_D p_e}. \quad (361)$$

Abhängig von der Tiefe auf der sich die Flussröhren befinden kann man aus u_b eine Schätzung für die typische Verlustzeit τ_b geben. Flussruption wird oft (zuerst vorgeschlagen von Leighton)⁴⁹ modelliert durch einen extra Term in der Dynamogleichung der Form $B_0 f(B_0)/\tau_b$, wo $f(B_0) = B_0^n$. Berechnungen von Kitchatinov und Pipin⁵⁰ zeigen allerdings dass die Abhängigkeit von B_0 im Allgemeinen viel komplizierter ist und dass $f(B_0) = B_0^n$ mit $n = 2$ nur bei Feldstärken $B_0 \ll B_{eq}$ eine gute Annäherung ist.

Folgendes Beispiel stammt von Schmitt und Schüssler⁵¹. Sie betrachten einen axialsymmetrischen $\alpha\omega$ -Dynamo in sphärischer Geometrie und lösen (314-315) für $kR = 0$ mit einem zusätzlichen Term $Qg(B_0)$ in der Gleichung für das toroidale Feld (314), wo $Q = R^2/\beta\tau_b$ ($1/Q$ ist die entdimensionierte Verlustzeit) und

$$g(B_0) = \begin{cases} -\text{sgn}(T) [B_0^n - B_c^n] & (B_0 \geq B_c), \\ 0 & (B_0 < B_c). \end{cases} \quad (362)$$

In der Rechnung wurde B_c gleich 0 oder 1 gesetzt, abhängig davon ob eine Schwelle angenommen werden sollte für das Auftreten von Flussruption. Gleichung (315) für das poloidale Magnetfeld wurde nicht verändert. Der Vergleich zwischen α -Quenching und Flussruption (Abb. 44) zeigt dass Flussruption zu realistischeren Schmetterlingsdiagrammen führt mit klarer Dipolparität (A), während bei α -Quenching die Parität der Lösung oft gemischt (A+S) ist und die Breitenwanderung nicht mehr zum Äquator stattfindet.

⁴⁹Leighton, R.B. 1969, ApJ **156**, 1

⁵⁰Kitchatinov, L.I., Pipin, V.V., 1993, A&A **274**, 647-52

⁵¹Schmitt, D., Schüssler, M., 1989, A&A **223**, 343-51

8 MHD-Turbulenz

MF-Dynamotheorie liefert eine Beschreibung des mittleren Magnetfeldes \mathbf{B}_0 aber gibt keine Information über das kleinskalige Magnetfeld $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0$. Die Stärke des kleinskaligen Feldes wird abgeschätzt als $B_1 \approx R_m B_0 \gg B_0$, was eine Obergrenze darstellt weil die Ableitung beruht auf der Annahme dass die Induktionsgleichung linear in \mathbf{B} ist (keine Lorentzkraft). Beobachtungen des solaren Magnetfeldes und Simulationen von Dynamowirkung in einem konvektiven Medium bestätigen aber dass B_1 nicht klein ist im Vergleich zu B_0 . Nichtlineare Effekte der Lorentzkraft können daher wichtig sein auch wenn B_0 schwach ist. Das Magnetfeld der Sonne enthält eine Vielzahl von Längenskalen, variierend von etwa R_\odot bis zur Dissipationslänge. Die Bildung eines solchen Spektrums von Längenskalen in der Strömung \mathbf{u} ist typisch für turbulente Flüssigkeiten, d.h. wenn $R_h \gg 1$. Wenn $R_m \gg 1$, wie in der solaren Konvektionsschicht, sind wegen des Alfvénschen Theorems sowohl \mathbf{u} als \mathbf{B} turbulente Grössen. Die Theorie der MHD-Turbulenz versucht auf statistische Weise die (nichtlineare) Evolution von \mathbf{u} und \mathbf{B} bei allen Längenskalen zu untersuchen. Die Methoden der Turbulenztheorie beruhen auf einer Zerlegung der relevanten Grössen ($\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle$, $\langle |\mathbf{B}|^2 \rangle$ usw.) in Fourierkomponenten. Weil die Anwesenheit eines Magnetfeldes zu erheblichen Komplikationen der Turbulenztheorie führt, werden wir zuerst hydrodynamische Turbulenz betrachten und danach die Modifikationen durch das Magnetfeld.

8.1 Hydrodynamische Turbulenz

Betrachten wir eine Flüssigkeit ohne Magnetfeld unter den Bedingungen

$$\text{H1) inkompressible Strömung: } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\text{H2) Dichte } \rho \text{ und kinetische Viskosität } \nu \text{ konstant,}$$

dann wird die Strömung beschrieben durch die Navier-Stokes-Gleichung [siehe (19)],

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \tilde{p} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{f}}, \quad (363)$$

wo

$$\tilde{p} = p/\rho, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}/\rho. \quad (364)$$

Das Verhältnis des (nichtlinearen) Advektionstermes zum diffusiven Term definiert die (hydrodynamische) Reynoldszahl R_h ,

$$\frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{u}|} \approx \frac{uL}{\nu} = R_h, \quad (365)$$

wo u und L eine typische Geschwindigkeit und Länge der Strömung sind. Experimente zeigen dass wenn R_h einen Schwellwert $\gg 1$ überschreitet Turbulenz entsteht: es bildet sich eine Hierarchie von Strukturen (Wirbeln) unterschiedlicher Grössen ℓ und Lebensdaurn t_ℓ . Eine turbulente Strömung ist zeitlich und räumlich sehr variabel und hat praktisch stochastische Eigenschaften. Daher wird eine statistische Beschreibung verwendet (siehe §7.3).

Nehmen wir an dass sich Turbulenz gebildet hat mit folgenden statistischen Eigenschaften:

$$\text{H3) } \langle \mathbf{u} \rangle = 0,$$

$$\text{H4) Stationarität: } \partial \langle u_i \dots \rangle / \partial t = 0,$$

$$\text{H5) Homogenität: } \langle u_i(\mathbf{r}) u_j(\mathbf{r} + \mathbf{x}) \dots \rangle = \text{unabhängig von } \mathbf{r},$$

$$\text{H6) Isotropie (Invarianz unter willkürlichen Drehungen).}$$

Wir multiplizieren (363) mit \mathbf{u} und mitteln das Ergebnis; aus (H1) und (H5) folgt

$$\langle \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \rangle = \nabla \cdot \langle \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \rangle = 0, \quad (366)$$

$$\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{p} \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \tilde{p} \rangle = 0, \quad (367)$$

Für stationäre Turbulenz (H4) ergibt sich dann

$$\langle \tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} \rangle = \nu \langle \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} \rangle = \epsilon, \quad (368)$$

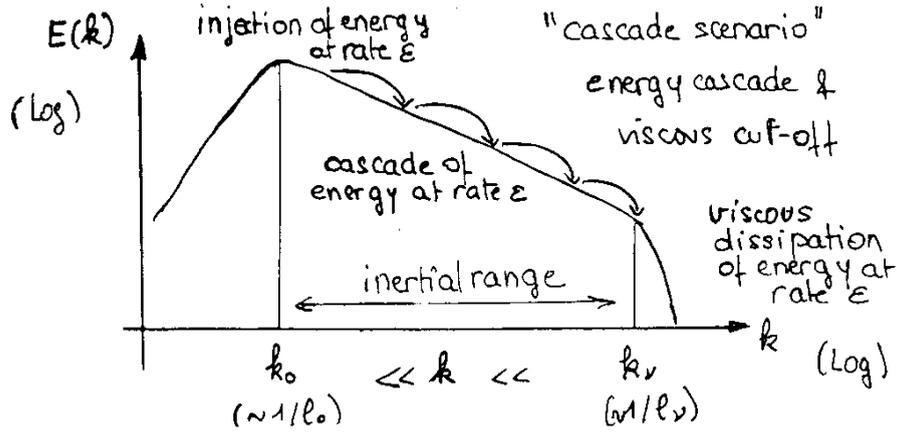


Abbildung 45: Energiekaskade hydrodynamischer Turbulenz

d.h. Gewinn und Verlust von kinetischer Energie sind im Gleichgewicht. Der Quellterm ist die Arbeit die von \mathbf{f} auf die Flüssigkeit wird ausgeübt, auch mittlere Injektionsrate genannt; der Verlustterm ist die mittlere Dissipationsrate der kinetischen Energie (beide haben als Dimension $[\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}]$). Bemerke dass der nichtlineare Term $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ keinen Energieverlust oder Gewinn verursacht aber verantwortlich ist für den Energietransport zwischen Eddies unterschiedlicher Grössen ℓ . Die Dissipationsrate ist am stärksten für die kleinsten Wirbel. Stationarität erfordert daher dass ständig kinetische Energie von grossen Wirbeln auf kleine Wirbel übertragen wird. Nehmen wir an dass die Kraft \mathbf{f} eine typische Korrelationslänge ℓ_0 hat, dann findet die Injektion hauptsächlich statt bei ℓ_0 . Dissipation wird wichtig für $\ell \lesssim \ell_\nu \ll \ell_0$, wobei ℓ_ν die Wirbelgrösse ist für die $R_h(\ell) \approx 1$. Im zwischenliegende Bereich, der *inertial range*,

$$\ell_\nu \ll \ell \ll \ell_0, \quad (369)$$

ist die kinetische Energie erhalten: alle Energie die bei ℓ_0 eingeführt wird, muss auf immer kleinere Wirbel übertragen werden bis es bei ℓ_ν dissipiert werden kann. Dieser Transport einer erhaltenen Grösse entlang die ℓ -Achse (oder k -Achse im Fourrierraum) wird *Kaskade* genannt; Abb. (45) ist eine idealisierte Darstellung der Energiekaskade. (Injektion geschieht bei $k_0 \approx 1/\ell_0$, Dissipation bei $k_\nu \approx 1/\ell_\nu$.) Sei v_ℓ die typische Geschwindigkeit bei Wirbelgrösse ℓ , d.h.

$$\sum_\ell \frac{1}{2} v_\ell^2 \approx \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle. \quad (370)$$

Die Transportrate (*transfer rate*) der kinetischen Energie ist abzuschätzen als v_ℓ^2/t_ℓ , wo $t_\ell \approx \ell/v_\ell$ die Turnoverzeit ist, ein Mass für die Zeit die ein Wirbel braucht um seine kinetische Energie los zu werden (*transfer time*). Es ergibt sich für stationäre Turbulenz

$$\frac{v_\ell^3}{\ell} = \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad v_\ell \approx (\epsilon \ell)^{1/3}. \quad (371)$$

Mit diesem Ergebnis können wir ℓ_ν abschätzen: $R_h(\ell_\nu) \approx 1 \Leftrightarrow$

$$\ell_\nu \approx \frac{\nu}{v_{\ell_\nu}} \approx \frac{\nu}{(\epsilon \ell_\nu)^{1/3}} \quad \Rightarrow \quad \ell_\nu \approx (\nu^3/\epsilon)^{1/4}, \quad (372)$$

die sogenannte *Kolmogorov micro scale*. Die Formel besagt dass je kleiner die Viskosität ν , oder je grösser die Injektionsrate ϵ sind, desto kleiner muss ℓ_ν sein um die für Stationarität erforderliche Dissipation zu ermöglichen. Aus (371) folgt auch

$$\frac{R_h(\ell)}{R_h(\ell_0)} \approx (\ell/\ell_0)^{4/3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell_\nu}{\ell_0} \approx R_h^{-3/4}(\ell_0), \quad (373)$$

so dass $\ell_\nu \ll \ell_0$ wenn $R_h(\ell_0) \gg 1$. Sei $E(k)$ das Energiespektrum von \mathbf{u} (die kinetische Energiedichte im k -Raum). Wir können uns den Inertialbereich schematisch vorstellen als ein diskretes Spektrum von Wirbelgrössen $\ell_0, \ell_0/\alpha, \ell_0/\alpha^2, \dots$, wo $\alpha > 1$. Wenn $E(k) = Ck^\gamma$, dann ist die kinetische Energiedichte bei einer Wirbelgrösse ℓ abzuschätzen als

$$\frac{1}{2} v_\ell^2 \approx \int_{k_\ell}^{\alpha k_\ell} dk E(k) = C C' k_\ell^{\gamma+1} = C' k_\ell E(k_\ell), \quad (374)$$

wo $C' = (\alpha^{\gamma+1} - 1)/(\gamma + 1) = \mathcal{O}(1)$. Nach Substitution von (371) ergibt sich das *Kolmogorov-Spektrum* [Abb. (45)]:

$$E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (375)$$

wo C_K eine Konstante ist.

8.2 MHD-Turbulenz

Zur Beschreibung von MHD-Turbulenz brauchen wir die Navier-Stokes-Gleichung mit Lorentzkraft (19) und die Induktionsgleichung (17). Unter Bedingungen (H1) und (H2) ergibt sich [verwende $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}$]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} - \nabla \tilde{p}_{\text{tot}} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{f}}, \quad (376)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (377)$$

wo $\tilde{p}_{\text{tot}} = \tilde{p} + |\mathbf{B}|^2/2\mu_0\rho$ der Gesamtdruck und \mathbf{b} die Alfvéngeschwindigkeit ist, definiert als

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0\rho}}. \quad (378)$$

Gleichungen (376-377) sind nicht-linear und haben im Fall $\nu = \eta = 0$ (keine Dissipation), $\nabla \tilde{p}_{\text{tot}} = 0$ (konstanter Druck) und $\tilde{\mathbf{f}} = 0$ (keine zusätzliche Kräfte) einfache *exakte* Lösungen:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(\mathbf{r} - \mathbf{b}_0 t); \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 - \mathbf{u} \quad \text{oder} \quad (379)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(\mathbf{r} + \mathbf{b}_0 t); \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{u}, \quad (380)$$

wo \mathbf{U} eine beliebige Funktion ist und \mathbf{b}_0 ein konstantes Hintergrundmagnetfeld ist. Diese Lösungen sind Alfvénwellen die sich ohne Formveränderung entlang $\pm \mathbf{b}_0$ fortpflanzen. Die Störungen des Magnetfeldes sind $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{b}_0 = \pm \mathbf{u}$, d.h. \mathbf{b}_1 und \mathbf{u} sind (anti)parallel und von gleicher Grösse. Dieser *Alfvén-Effekt* hat wichtige Folgen für MHD-Turbulenz, denn die Anwesenheit eines Hintergrundfeldes \mathbf{B}_0 , wie klein auch, führt zu schneller Equipartition von magnetischer und kinetischer Energie bei kleinen Längen. Die Evolution von \mathbf{b} erfolgt dann dynamisch, nicht mehr kinematisch. Der traditionelle kinematische α -Effekt (§7.3) wird reduziert (gequencht) durch den Alfvéneffekt, weil die mittlere EMK $\langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle$ verschwindet für Alfvénwellen.

Auch die Energiekaskade wird von der Anwesenheit eines Magnetfeldes beeinflusst. Energie-Transport erfolgt jetzt durch nichtlineare Wechselwirkung der Alfvénwellen. Betrachten wir stationäre schwache MHD-Turbulenz bestehend aus Alfvénwellen, d.h. $v_\ell \approx b_\ell \ll b_0$. Eine Wechselwirkung kann stattfinden wenn zwei Wellenpaketen (Länge $\approx \ell$) entlang eine Feldlinie \mathbf{B}_0 auf sich zu bewegen; dies geschieht mit relativer Geschwindigkeit $2\mathbf{b}_0$. Die Dauer der Interaktion ist daher

$$t_A \approx \frac{\ell}{b_0}, \quad (381)$$

d.h. für schwache Turbulenz viel kürzer als die Turnoverzeit,

$$t_\ell \approx \frac{\ell}{v_\ell} \approx \frac{\ell}{b_\ell}. \quad (382)$$

Bei jeder Wechselwirkung ändert sich $v_\ell \approx b_\ell$ etwa um ein Faktor t_A/t_ℓ , aber dies geschieht auf zufällige Weise; es sind daher etwa $(t_\ell/t_A)^2$ Wechselwirkungen nötig um die Alfvénwelle signifikant zu modifizieren. Daher ist der Energietransport zwischen den Wirbeln für MHD-Turbulenz effektiv langsamer als in der Hydrodynamik und die neue *transfer time* ist:

$$T_\ell \approx \frac{t_\ell^2}{t_A} \approx \frac{\ell b_0}{v_\ell^2}, \quad (383)$$

Bemerke dass T_ℓ von B_0 abhängt: das Hintergrundmagnetfeld beeinflusst alle Wechselwirkungen. Die Transportrate der Energie ist

$$\epsilon \approx \frac{v_\ell^2}{T_\ell} \approx \frac{v_\ell^4}{\ell b_0} \Leftrightarrow v_\ell^2 \approx (\epsilon \ell b_0)^{1/2}. \quad (384)$$

Für stationäre Turbulenz ist ϵ unabhängig von ℓ . Das Energiespektrum lautet:

$$E(k) \stackrel{374}{=} C'_K (\epsilon b_0)^{1/2} k^{-3/2}, \quad (385)$$

das Iroshnikov-Kraichnan-Spektrum. Es ist flacher als ein Kolmogorov-Spektrum weil im Vergleich zu jenem die Wechselwirkungszeit um ein Faktor $t_\ell/t_A \propto \ell^{-1/4}$ länger ist, so dass bei kleinerem ℓ relativ grössere Energiewerte erforderlich sind um die gleiche Transportrate zu erhalten. Bemerkung: genaue Berechnungen zeigen dass dieses Spektrum nur gültig ist wenn $b_\ell \ll b_0$, so dass \mathbf{u} und \mathbf{B} schwach korreliert sind; auch die Anwesenheit von (mittlerer) kinetischer Helizität kann das Spektrum ändern. Siehe Biskamp 1993⁵².

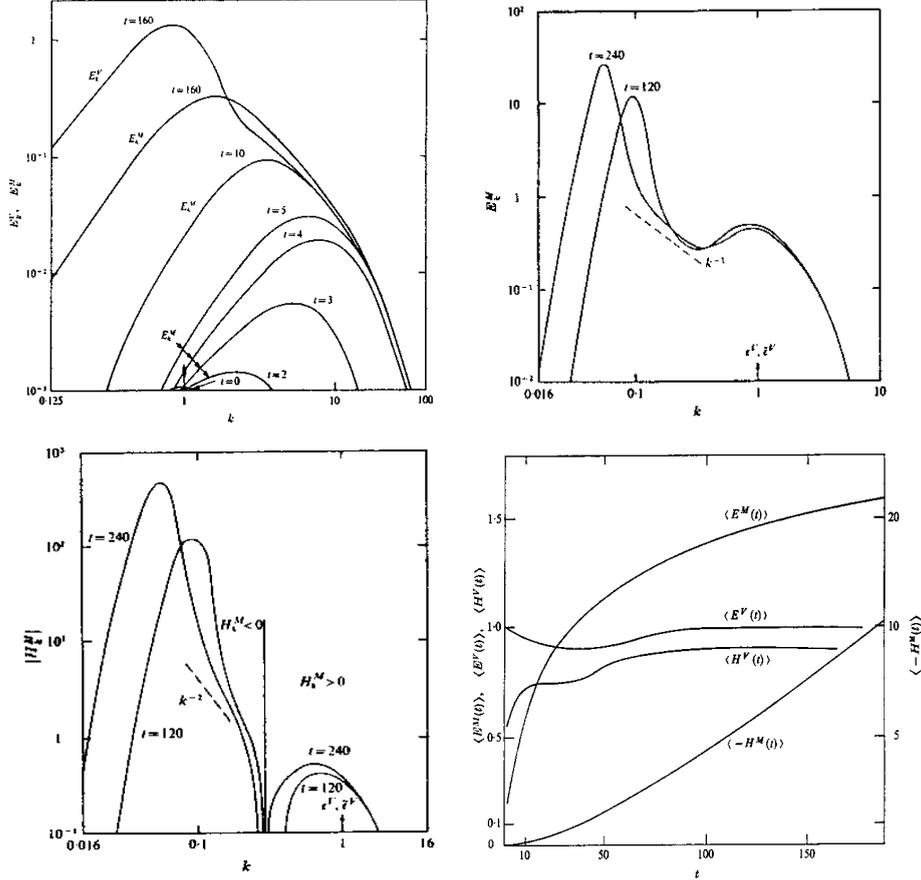


Abbildung 46: Energiepektren von MHD-Turbulenz. **a)** Evolution von $E_M(k)$; Ausbreitung des Inertialbereichs $E_M(k) \propto k^{-3/2}$; nur Injektion von kinetischer Energie. **b-d)** Injektion von kinetischer Energie und kinetischer Helizität. **b)** Evolution von $E_M(k)$. **c)** Inverse-Kaskade von h_M ; links und rechts der vertikalen Linie ist $h_M < 0$ bzw. > 0 . **d)** Evolution von $\langle E_M \rangle$, $\langle E_K \rangle$, $\langle h_M \rangle$ und $\langle h_K \rangle$. (Pouquet *et al* 1976)

Die Energiekaskade hört dort auf wo $T_\ell \approx t_\nu$ (angenommen dass $\eta \approx \nu$). Daraus ergibt sich die modifizierte Kolmogorov *micro-scale*:

$$\frac{\ell b_0}{v_\ell^2} \approx \frac{\ell^2}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \ell'_K = (\nu^2 b_0)^{1/3} \epsilon^{-1/3}. \quad (386)$$

Bis jetzt ist nur die Rede gewesen von einer Kaskade der kinetischen und magnetischen Energie. Daneben gibt es bei MHD-Turbulenz eine Kaskade der magnetischen Helizität,

$$h_M = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (387)$$

Dies setzt voraus dass h_M im inertial Range (keine Dissipation) eine erhaltene Grösse ist. Aus der Faraday-Gleichung (6), $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ und $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ [ideale MHD; siehe (15)] folgt

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{E} - \nabla \Phi = \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \nabla \Phi, \quad (388)$$

⁵²Biskamp, D., 1993, *Nonlinear Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press

wo Φ noch frei zu wählen ist; wir setzen $\Phi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}$. Betrachte jetzt

$$\frac{\partial h_M}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{A} \cdot \left\{ \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right\} - \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}) \quad (389)$$

$$= -\nabla \cdot \left\{ \mathbf{A} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right\} - \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B}. \quad (390)$$

Nach Substitution von $\mathbf{A} \cdot [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] = -\nabla \cdot [\mathbf{A} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]$ (J10) und $\mathbf{A} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B}$ (J2) ergibt sich

$$\frac{\partial h_M}{\partial t} + \nabla \cdot (h_M \mathbf{u}) = 0. \quad (391)$$

Dies ist eine Erhaltungsgleichung für h_M (Integration über V liefert $d/dt \int_V dV h_M = 0$ wenn $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$). Die magnetische Helizität ist eng verbunden mit der kinetischen Helizität,

$$h_K = \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (392)$$

Der Alfvén-Effekt führt dazu dass $h_M \neq 0$ wenn $h_K \neq 0$, weil $\mathbf{B}_1 = \pm \mathbf{u}$. So entsteht bei kleinen ℓ -Werten, wo die Turbulenz am stärksten von Alfvénwellen geprägt ist, magnetische Helizität, die dann in einer Inverse-Kaskade zu grösseren ℓ transportiert wird, d.h. es entsteht ein grossskaliges Magnetfeld. Der traditionelle (lineare) α -Effekt wird also in der MHD-Turbulenz ersetzt durch nicht-linearen Alfvén-Effekt plus Inverse-Kaskade der magnetischen Helizität. Simulationen von

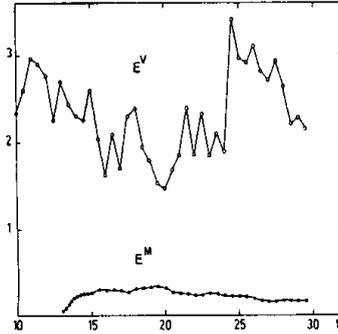


FIG. 1. Turbulent dynamo with nonhelical driving. Temporal variation of kinetic (E^V) and magnetic (E^M) energy. Reynolds numbers are $R^V = R^M \approx 100$. The time unit is the eddy-turnover time l/ν_e .

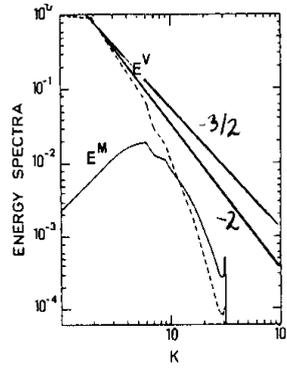


FIG. 2. Kinetic (E^V) and magnetic (E^M) energy spectra at $t = 27$. Nonhelical dynamo with $R^V = R^M \approx 100$.

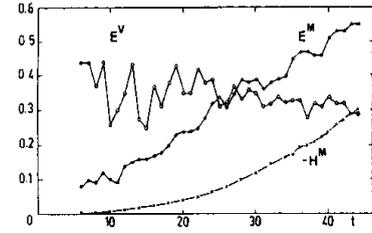


FIG. 4. Helical dynamo with driving at intermediate scales ($k = 5$). Temporal variation of kinetic energy (E^V), magnetic energy (E^M), and magnetic helicity ($-H^M$).

Abbildung 47: Simulation von MHD-Turbulenz (Meneguzzi *et al* 1981)

Pouquet *et al*⁵³ haben diese Prozesse bestätigt. Ihre Methode beruht auf einer Ensemblemittelung der Gleichungen für $u_i u_j$, $B_i B_j$ und $u_i B_j$ (symbolisch zu schreiben als $\partial \langle uu \rangle / \partial t = \langle uuu \rangle$; es wird angenommen dass $\langle u \rangle = 0$). Um diese Gleichungen zu lösen werden weitere Gleichungen benötigt, $\partial \langle uuu \rangle / \partial t = \langle uuuu \rangle$. Pouquet *et al* schliessen das Gleichungssystem ab durch die Annäherung $\langle uuuu \rangle = \langle uu \rangle^2$. Die resultierenden Gleichungen werden im Fourierraum gelöst und um einen nicht zu grossen inertial Range zu erhalten wird eine turbulente Viskosität eingeführt; die so entstandene Methode heisst EDQNM (*Eddy-Damped Quasi-Normal Markovian*). Die wichtigsten Ergebnisse werden gezeigt in Abb. (46). Direkte Simulationen von dreidimensionaler MHD-Turbulenz durch Meneguzzi *et al*⁵⁴ (64^3 Gitterpunkte, $R_h \approx R_m \approx 100$, $\nu/\eta = 1$) bestätigen die meisten Ergebnisse der EDQNM-Methode (Abb. 47).

Die Ergebnisse der Turbulenztheorie bestätigen dass die Anwesenheit von kinetischer Helizität zu Dynamowirkung, d.h. zur Erzeugung eines grossskaligen Magnetfeldes führt. Die Frage ist aber ob diese Ergebnisse relevant sind für stellare Dynamos:

- 1) das solare Magnetfeld wird wahrscheinlich erzeugt in einer dünnen Overshootschicht (OS) unter der eigentlichen Konvektionsschicht (KS). Dort ist viel weniger Turbulenz als in der KS,

⁵³Pouquet, A., Frisch, U., Léorat, J., 1976, Journ. Fluid Mech. **77**, 321-54

⁵⁴Meneguzzi, M., Frisch, U., Pouquet, A., 1981, Phys. Rev. Letters **47**, 1060-6

- 2) die kinetische Energiedichte in der solaren KS (und OS) ist viel grösser als die magnetische: $E_K = \int_V dV |\mathbf{u}|^2/2 \gg E_M = \int_V dV |\mathbf{B}|^2/2\mu_0$. Das solare Magnetfeld ist nämlich lokalisiert in Flussröhren die nur einen kleinen Teil des Mediums füllen, das übrigens magnetfeldfrei ist (§9). Obwohl die Feldstärke in den Flussröhren der solaren OS wahrscheinlich viel grösser ist als B_{eq} , spielen die magnetischen Wirbel der MHD-Turbulenz insgesamt keine grosse Rolle und ist der Alfvéneffekt daher nicht sehr wichtig.

9 Sonnendynamo

9.1 Ort des Sonnendynamos

Es wird heute angenommen dass der Sonnendynamo sich in der *Overshootschicht* (OS) unterhalb der Konvektionszone (KS) befindet (obwohl vielleicht Dynamowirkung in der KS auch eine Rolle spielt; siehe unten). Diese Idee stammt u.A. von Spiegel und Weiss⁵⁵ und Galloway und Weiss⁵⁶. Argumenten für den Overshootdynamo sind:

- 1) Instabilität der KS. Aus Beobachtungen von magnetischen ('aktiven') Gebieten an der Sonnenoberfläche geht hervor dass der gesamte magnetische Fluss in der Sonne während eines Sonnenmaximums $\Phi \approx 10^{16}$ Wb beträgt. Bei einer homogenen Verteilung über die KS (Breite $\approx 60^\circ \Rightarrow L \approx 6 \cdot 10^8$ m; Dicke $D \approx 2 \cdot 10^8$ m) entspricht das einer Feldstärke $\Phi/DL \approx 0.08$ T. Die KS hat eine instabile Schichtung ($\delta = \nabla - \nabla_{\text{ad}} > 0$); es stellt sich heraus dass

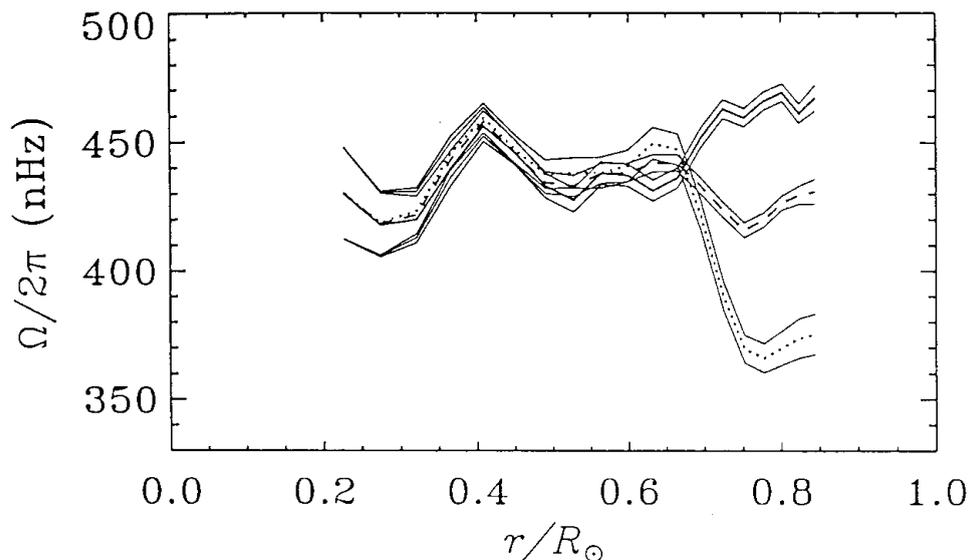


Abbildung 48: Drehfrequenz der Sonne als Funktion von r am Äquator (durchgezogen), bei 45° (gestrichelt) und am Pol (punktirt) (Goode 1995)

die magnetische Auftriebskraft (siehe §7.5.3) dann nicht kompensiert werden kann. Durch Konvektion und Auftriebskraft würde der magnetische Fluss innerhalb etwa 1 Monats zur Oberfläche aufsteigen. Auch würde die Konvektion dieses schwache Magnetfeld (verglichen mit $B_{\text{eq}} \approx 0.3$ T) zerreißen und seine eventuelle Ordnung zerstören. Die Beobachtungen (Hale'sche Gesetze, §1) weisen aber auf die Existenz eines grossskaligen regelmässigen toroidalen Magnetfeldes in der Sonne. Die Konvektion kann also nur beschränkten Einfluss auf die aufsteigenden magnetischen Elemente haben und dies setzt voraus dass $B \gtrsim B_{\text{eq}}$. Es folgt dass Φ nicht homogen über die KS verteilt sein kann sondern lokalisiert ist, möglicherweise in der Form von Flussröhren. Wenn der gesamte magnetische Fluss in der Sonne $\Phi \approx 10^{16}$ Wb beträgt, ist die *mittlere* Feldstärke in der OS (Breite $60^\circ \Rightarrow L \approx 6 \cdot 10^8$ m; Dicke $D \approx 2 \cdot 10^7$ m) $B_0 \approx \Phi/DL \approx 0.8$ T. Wenn die Feldstärke in den Flussröhren 10 T ist, füllen sie nur 8% des Volumens der OS. Simulationen von aufsteigenden dünnen Flussröhren zeigen dass für $B \approx 10$ T die Breitenverteilung der Sonnenflecken und die Hale'sche Gesetze reproduziert werden können⁵⁷. Der Ort des Entstehens dieses Magnetfeldes kann nicht die KS sein, weil die magnetische Auftriebskraft bei diesen Feldstärken zu stark ist, so dass nicht genügend Zeit vorhanden ist um durch Scherung (differentielle Rotation) B zum gewünschten Wert zu verstärken.

⁵⁵ Spiegel, E.A., Weiss, N.O., 1980, *Nature* **287**, 616

⁵⁶ Galloway, D.J., Weiss, N.O., 1981, *ApJ* **243**, 945-953

⁵⁷ Caligari, P., Moreno-Insartis, F., Schüssler, M., 1995, *ApJ* **441**, 886-902

- 2) Unterhalb der KS ist eine dünne ($d \approx 10^7$ m) stabile Overshootschicht (OS), wo $\delta < 0^{58}$. Eine Stabilitätsanalyse von dünnen toroidalen Flussröhren zeigt dass dort ein starkes Magnetfeld gespeichert werden kann wenn $B \lesssim 10$ T (siehe unten).
- 3) Aus Inversion der helioseismologischen Messungen geht hervor dass die differentielle Rotation im unteren Bereich der KS ($r/R_{\odot} \approx 0.7$) konzentriert ist (Abb. 48; aus Goode⁵⁹). Somit ist eine Quelle für die Erzeugung des starken toroidalen Magnetfeldes anwesend in (der Nähe) der OS. Aus Abb. (48) können wir den Frequenzunterschied zwischen oberem und unterem Rand der OS am Äquator abschätzen als $\Delta\Omega \approx 40 \cdot 2\pi$ nHz $\Rightarrow \Delta u \approx r\Delta\Omega \approx 125$ m s⁻¹. Bemerke dass $\partial\Omega/\partial r$ an den Polen *negativ* ist und im Absolutwert *grösser* ist als am Äquator, während Sonnenflecken nur in Äquatornähe vorkommen.

Die obengenannten Beobachtungen und Überlegungen führen zu einem Dilemma: der Sonnendynamo erzeugt ein Magnetfeld das wegen seiner Stärke grossen Einfluss auf die Bewegung des magnetisierten Plasmas haben muss. Ein α -Effekt der ausgeht von passiver Advektion des Magnetfeldes durch die Konvektion kann daher nicht funktionieren in der OS. Zur Lösung dieses Dilemmas sind zwei Dynamomodelle vorgeschlagen worden, die sich unterscheiden was Ort und Ursache des α -Effektes angeht: der Zwei-Schichten-Dynamo und der Flussröhrendynamo. Diese Modelle werden demnächst besprochen. Obwohl es Argumente für und gegen beide gibt, ist eine definitive Entscheidung zwischen diesen Modellen derzeit offen, u.A. weil realistische MHD-Simulationen des Sonnendynamos noch nicht möglich sind. Um zu illustrieren wie beide Modelle funktionieren *könnten* greift man nachwievorf oft zurück auf die MF-Theorie. Man soll dabei im Auge behalten dass die MF-Theorie nicht mehr als illustrierende Funktion haben darf weil ihre Anwendung in der Sonne mathematisch zweifelhaft ist. Die Gültigkeit des einen oder anderen Modells kann daher nicht definitiv entschieden werden durch MF-Berechnungen!

9.2 Zwei-Schichten-Dynamo

Der klassische α -Effekt (§7.3.2) funktioniert nicht in der OS weil die starken Magnetfelder kein passives Mitschleppen durch die Konvektion erlauben. Parker hat darauf ein Modell für den Sonnendynamo vorgeschlagen in dem der α -Effekt nur in der KS, differentielle Rotation nur in der OS existieren⁶⁰. Zur Illustration betrachten wir die MF-Dynamogleichung für dieses Problem in der $\alpha\omega$ -Annäherung in einer kartesischen axialsymmetrischen Geometrie. Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem ($\mathbf{B}_0 = B_{t0}\mathbf{e}_y + \nabla \times A_{p0}\mathbf{e}_y$; 1=OS; 2=KS):

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \beta_1 \nabla^2 \right\} B_{t0}^{(1)} &= (\mathbf{e}_y \times \mathbf{a}) \cdot \nabla A_{p0}^{(1)}, & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \beta_1 \nabla^2 \right\} A_{p0}^{(1)} &= 0, \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \beta_2 \nabla^2 \right\} B_{t0}^{(2)} &= 0, & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \beta_2 \nabla^2 \right\} A_{p0}^{(2)} &= \alpha B_{t0}^{(2)}, \end{aligned} \quad (393)$$

wo $\mathbf{a} = \nabla u_0(z)$. Die OS ist weniger turbulent als die KS, weil sie stabil geschichtet ist und weil dort ein starkes toroidales Magnetfeld $B_t \gg B_{eq}$ die Konvektion durch Lorentzkräfte erschwert (abhängig von der Volumenfraktion magnetisch/nicht magnetisch). Die turbulente Diffusivität in der OS ist daher $\beta_1 \ll \beta_2$, darf aber nicht verschwinden weil das toroidale Magnetfeld durch Diffusion von der OS in die KS transportiert werden muss und umgekehrt das poloidale Magnetfeld von der KS in die OS. Die Dynamowirkung ist daher optimal in der Übergangsschicht OS-KS und die Lösungen von (393) sind Parkerwellen die sich entlang diese Grenzschicht fortpflanzen (Abb. 49; aus Ossendrijver und Hoyng⁶¹). Für eine nicht-lineare Variante dieses Modells: siehe §7.6.2.

Es ist die Frage ob gerade über der OS die magnetische Feldstärke klein genug ist ($B \lesssim B_{eq}$) so dass der klassische α -Effekt funktionieren kann. Wahrscheinlicher ist dass die aufsteigenden Flussröhren erst ziemlich hoch in der KS Werte kleiner als B_{eq} erreichen (zufolge der Expansion und Flusserhaltung). In dem Fall ist der klassische α -Effekt auch unten in der KS noch stark reduziert und gibt es eine grosse Distanz zwischen OS und α -Schicht, so dass Dynamowirkung dann (bestens) sehr ineffizient ist. In der KS existiert aber neben dem starken Magnetfeld der aufsteigenden Flussröhren auch ein schwaches Magnetfeld ($B \lesssim B_{eq}$), das entweder ein Abfallprodukt der Flussröhren (Sonnenflecken) ist oder durch separate Dynamowirkung (α^2 ; turbulenter Dynamo) innerhalb der KS entsteht (§9.4). Dies könnte auch als Quelle für das poloidale Feld dienen. Ein weiteres

⁵⁸Skaley, D., Stix, M., 1991, A&A **241**, 227

⁵⁹Goode, P.R., 1995, in *Fourth Soho Workshop: Helioseismology*, Her. J.T. Hoeksema, V. Domingo, B. Fleck, B. Battrock, ESA SP-376, Vol. 1, pp 121

⁶⁰Parker, E.N., 1993, ApJ **408**, 707-19

⁶¹A.J.H. Ossendrijver and P. Hoyng, 1997, A&A **324**, 329-43

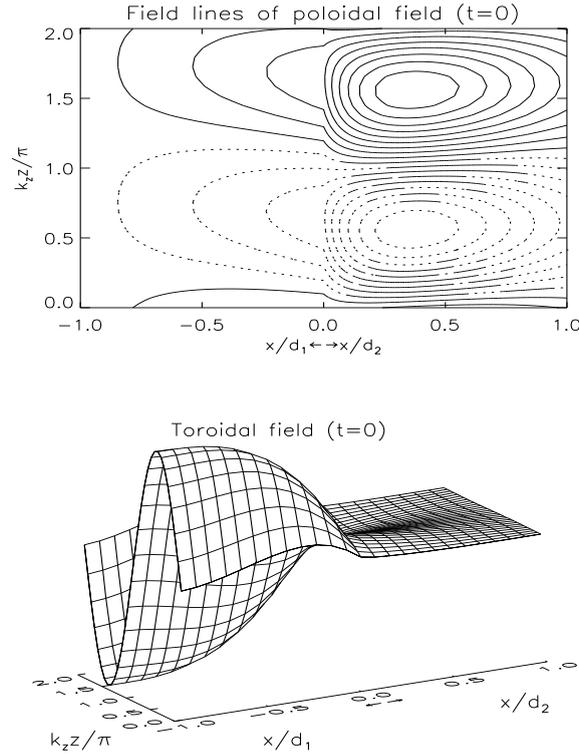


Abbildung 49: Parkerwelle im Zwei-Schichten-Dynamo in kartesischer Geometrie; x und z bezeichnen hier, anders als im Text, Radius bzw. Breite (Ossendrijver und Hoyng 1997)

Problem des Zwei-Schichten-Modells ist dass der klassische α -Effekt in einem turbulentem Medium wahrscheinlich bereits bei einer Feldstärke $B \approx B_{\text{eq}} R_{\text{M}}^{-1/2}$ stark reduziert wird (§7.6).

9.3 Flussröhrendynamo

Die zweite Lösung des Dilemmas beruht auf einer Instabilität der magnetischen Flussröhren, verursacht von der magnetischen Auftriebskraft. Durch diese Instabilität bilden sich in einer toroidalen Flussröhre aufsteigende Schleifen die von der Corioliskraft (systematisch) gedreht werden und so eine poloidales Feld erzeugen. Ein solcher dynamischer α -Effekt wurde schon von Parker vorgeschlagen⁶². Starke Magnetfelder sind für diesen α -Effekt kein Hindernis sondern erforderlich denn die Instabilität tritt nur auf wenn B eine Schwelle $B_1 \gg B_{\text{eq}}$ überschreitet⁶³. Eine analytische Untersuchung dieser Instabilität in der Annäherung der dünnen Flussröhren haben u.A. Ferriz-Mas und Schüssler⁶⁴ unternommen für nicht-axialsymmetrische toroidale Flussröhren. Betrachten wir eine toroidale Flussröhre in der OS und sei ϕ ($= \phi_0$) die Länge entlang die ungestörte Röhre. Wir wollen die mittlere EMK infolge kleiner Störungen dünner Flussröhren um ein Gleichgewicht definiert durch $\mathbf{r}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{a} = R_0 \mathbf{e}_R + z_0 \mathbf{e}_z$ und $\mathbf{B}(\mathbf{a}, 0) = B_0 \mathbf{e}_\phi$ untersuchen (R, ϕ, z bezeichnen Zylinderkoordinate). Weil B_0 konstant ist, hat die mittlere EMK keine Beiträge stammend von Gradienten des mittleren Feldes und kann ein α -tensor definiert werden durch

$$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle = \alpha \mathbf{B}_0, \quad (394)$$

wo $\langle \dots \rangle$ keine räumliche Mittelung ist sondern eine Ensemblemittelung über die Realisierungen von \mathbf{u} und \mathbf{b} . Wegen des rein toroidalen axialsymmetrischen Anfangsfeldes können nur drei Komponenten von α bestimmt werden, nämlich

$$\alpha_{i\phi} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle_i / B_0. \quad (395)$$

⁶²Parker, E.N., 1971, ApJ **168**, 239

⁶³ B bezeichnet in diesem Abschnitt stets B_{T} , das Magnetfeld in der Flussröhre; B_0 ist hier eine Konstante und nicht das mittlere Magnetfeld der MF-Theorie; dies wäre $B_0 \approx f B_{\text{T}}$, wo f die Volumenfraktion der Flussröhren ist.

⁶⁴Ferriz-Mas, A., Schüssler, M., 1995, GAFD **81**, 233-65

Wichtig für den Sonnendynamo ist die poloidale Komponente von $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) \Leftrightarrow$ die toroidale Komponente der EMK, d.h. $\alpha_{\phi\phi}$. Die Störungen aus dem Gleichgewicht sind definiert durch

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\xi}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}. \quad (396)$$

Die Ausweichung $\boldsymbol{\xi}$ wird bestimmt durch eine nichtlineare Differentialgleichung [im Wesen die Navier-Stokesgleichung (19)]. Wenn $|\boldsymbol{\xi}| \ll |\mathbf{a}|$ darf diese Gleichung linearisiert werden; siehe u.A. Ferriz-Mas and Schüssler. Um α zu berechnen, soll \mathbf{b} gelöst werden aus der Induktionsgleichung. In der idealen MHD ($\eta = 0$) gilt $\partial \mathbf{B} / \partial t = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \Leftrightarrow d\mathbf{B} / dt = -\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}$; dies führt nach Substitution der Kontinuitätsgleichung $d\rho / dt = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$ zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{B}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}. \quad (397)$$

Siehe auch §6 für die Bedeutung dieser Gleichung. Die *Cauchy-Lösung* lautet

$$\frac{B_i(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r}, t)} = \frac{\partial r_i(\mathbf{a}, t)}{\partial a_j} \frac{B_j(\mathbf{a}, 0)}{\rho(\mathbf{a}, 0)}, \quad (398)$$

wo summiert wird über j , wie ab jetzt über alle doppelte Indizes. Wenn die Störung $|\boldsymbol{\xi}| \ll |\mathbf{a}|$, dürfen wir entwickeln $\rho(\mathbf{r}, t) \approx \rho(\mathbf{a}, 0) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho|_{\mathbf{a}, 0}$ so dass nach Substitution von (396) in erster Ordnung ρ konstant genommen werden darf:

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{a}) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{a}, t) = \frac{B_0}{R_0} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \phi} \quad (399)$$

Weil $\mathbf{u} = \partial \boldsymbol{\xi} / \partial t$, kann die EMK jetzt in $\boldsymbol{\xi}$ ausgedrückt werden:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{b} = \frac{B_0}{R_0} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \times \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \phi}. \quad (400)$$

Die EMK einer einzelnen Eigenschwingung wurde berechnet von Ferriz-Mas, Schmitt und Schüssler⁶⁵. Die Eigenschwingungen von $\boldsymbol{\xi}$ findet man durch Substitution des Fourieransatzes

$$\boldsymbol{\xi} = \text{Re } \tilde{\boldsymbol{\xi}} e^{i(m\phi + \omega t)} \quad (401)$$

in die Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{R} \boldsymbol{\xi}, \quad (402)$$

wo \mathbf{R} ein Differentialoperator ist der Terme bis zu zweiter Ordnung in $\partial / \partial t$ und $\partial / \partial \phi$ enthält; siehe Ferriz-Mas und Schüssler (1995). Jede Eigenfrequenz ω_{km} ($k = 1, 2, \dots, 6$) ist entweder reell, so dass diese Eigenschwingung stabil ist, oder sie existiert in einem komplex konjugierten Paar, so dass mindestens eine Eigenschwingung instabil ist. Angenommen dass die Frequenz einen komplexen Teil hat,

$$\omega_{km} = \text{Re } \omega_{km} - i\gamma_{km}, \quad (403)$$

können wir die Ausweichung der Flussröhre zufolge einer einzelnen Eigenschwingung schreiben als

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{km} e^{i\psi} + \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{km}^* e^{-i\psi} \right\} e^{\gamma_{km} t}, \quad (404)$$

wo $\psi = m\phi + \text{Re } \omega_{km} t$ und $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{km}$ ein Eigenvektor von \mathbf{R} ist. Die Störungen der Geschwindigkeit und des Magnetfeldes sind daher

$$\mathbf{u} = \frac{i}{2} \left\{ \omega_{km} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{km} e^{i\psi} - \omega_{km}^* \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{km}^* e^{-i\psi} \right\} e^{\gamma_{km} t}, \quad (405)$$

$$\mathbf{b} = \frac{mi}{2} \frac{B_0}{R_0} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{km} e^{i\psi} - \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{km}^* e^{-i\psi} \right\} e^{\gamma_{km} t}, \quad (406)$$

und die EMK ist

$$\mathbf{u} \times \mathbf{b} = \frac{mi\gamma_{km} B_0}{2 R_0} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{km} \times \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{km}^* e^{2\gamma_{km} t}. \quad (407)$$

Eine einzelne Eigenschwingung kann daher einen α -Effekt verursachen unter zwei Bedingungen:

⁶⁵Ferriz-Mas, A., Schmitt, D., Schüssler, M., 1994, A&A **289**, 949-56

- 1) die Eigenschwingung ist nicht axialsymmetrisch ($m \neq 0$). Nur dann kann die Corioliskraft eine Drehung in der Röhre verursachen;
- 2) die Eigenschwingung ist instabil ($\gamma_{km} \neq 0$). Nur dann können \mathbf{u} und \mathbf{b} eine Phasendifferenz haben, so dass sie nicht parallel sind, wie auch deutlich wird in (405–406).

Die Stabilitätsanalyse zeigt dass wenn die magnetische Feldstärke einen Schwellwert überschreitet, nicht-axialsymmetrische Störungen instabil werden. Der Schwellwert der Instabilität hängt u.A. ab von der Superadiabatizität $\delta = \nabla - \nabla_{ad}$ und von der Breite auf der die Röhre sich anfänglich befindet. Abb. (50) zeigt ein Beispiel eines Stabilitätsdiagrammes. Die Instabilität führt hauptsächlich zurück auf eine nach unten laufende Strömung in der aufsteigenden Schleife der Flussröhre, wodurch die Auftriebskraft verstärkt wird.

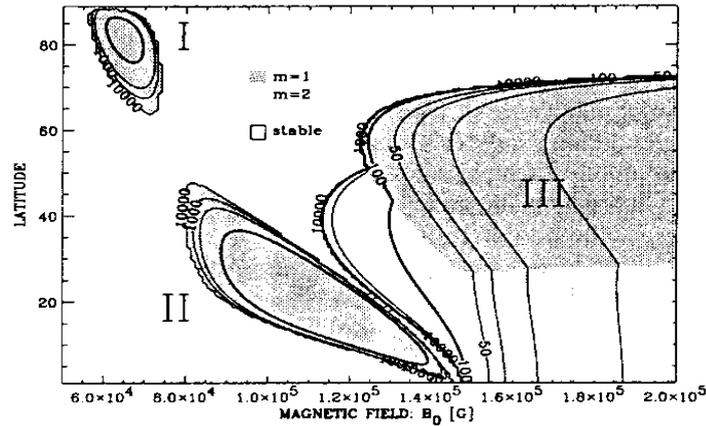


Abbildung 50: (In)stabilität toroidaler magnetischer Flussröhren für $m = 1, 2$ als Funktion von Breite ($0^\circ = \text{Äquator}$; $90^\circ = \text{Nordpol}$) und B_0 . Die Zahlen über den Konturen sind die Anwachzeiten der Instabilität (Ferriz-Mas *et al* 1994)

Weil die Berechnung der mittleren EMK auf einer linearen Analyse beruht, ist die Amplitude von α nicht festgelegt. Trotzdem kann man sich eine Vorstellung der Abhängigkeit von B_0 und Breite machen wenn man den Betrag der Amplitude der Ausweichung in einer Meridianebene konstant setzt, $|\tilde{\xi}_R|^2 + |\tilde{\xi}_z|^2 = d^2$, wo z.B. $d \approx 10^4$ km. Nach Substitution der Eigenwerte ω und Eigenfunktionen ξ für jeden Punkt in Abb. (50) ergibt sich unter dieser Annahme Abb. (51).

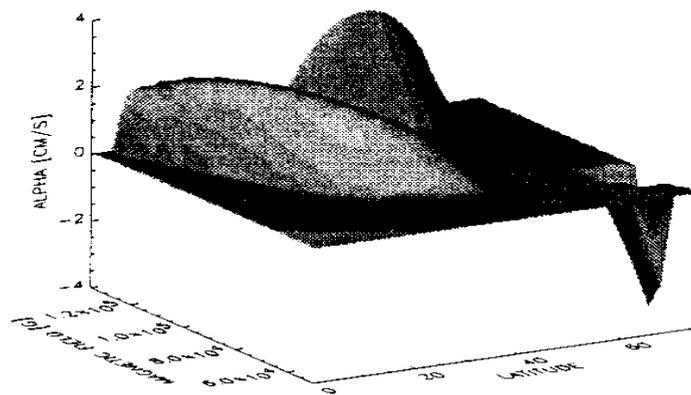


Abbildung 51: α -Effekt durch Flussröhreninstabilität als Funktion von Breite ($0^\circ = \text{Äquator}$; $90^\circ = \text{Nordpol}$) und Magnetfeld B_0 (Ferriz-Mas *et al* 1994)

Numerische Lösungen der (nichtlinearen) Bewegungsgleichungen für ξ bestätigen die Ergebnisse der (linearen) Stabilitätsanalyse. Die weitere nichtlineare Entwicklung einer instabilen Flussröhre zeigt dass die aufsteigenden Schleifen durch die KS nach oben gehen, während die absinkenden Schleifen verankert werden in der OS. In dieser Phase trägt die Flussröhre nicht mehr bei zu einem

α -Effekt in der OS weil die aufsteigenden Schleifen aus der OS entfernt sind und die absinkenden Schleifen (praktisch) nicht mehr bewegen (\Rightarrow keine Corioliskraft mehr).

Es gibt drei Bereiche in Abb. (50) wo ein α -Effekt existiert. Stabile toroidale Flussröhren werden ständig geschert durch die differentielle Rotation, d.h. bewegen nach rechts in Abb. (50) und können dadurch in einen instabilen Bereich geraten. Es bildet sich dann eine aufsteigende Schleife aber wenn die Instabilität nur langsam wächst kann die Schleife lang genug in der OS bleiben um zur Dynamowirkung beizutragen (wie auch die absinkende Schleife). In Bereich II wird die Flussröhre sogar wieder stabilisiert wenn B weiter anwächst. Wenn die Anwachszeit kurz wird im Vergleich zum Alter der Flussröhre, kann die aufsteigende Schleife nicht lange in der OS bleiben und trägt die Flussröhre nicht mehr bei zur Dynamowirkung. Das Alter einer Flussröhre, d.h. die Zeit die gebraucht wird um sie durch Scherung zu erzeugen, ist wie folgt abzuschätzen: ein anfänglich radiell orientierte Flussröhre (Länge L_1) in der OS (Dicke $L_0 \approx 2 \cdot 10^7$ m; gesamte Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta u_0 \approx 100$ m s $^{-1}$) empfindet eine differentielle Rotation $\Delta u_0 L_1/L_0$, so dass nach einer Zeit t die Länge $L_2 \approx t \Delta u_0 L_1/L_0$ ist. Weil $B_2/B_1 \approx L_2/L_1$ (§4.2) folgt $t_{\text{diff}} \approx (B_2/B_1)L_0/\Delta u_0 \approx 2 \cdot 10^5 B_2/B_1 \approx 2.3 B_2/B_1$ Tage. Wenn z.B. $B_2 = 10$ T und $B_1 = 0.1$ T ergibt sich $t_{\text{diff}} \approx 200$ Tage; diese Abschätzung berücksichtigt aber keine Verzögerung durch die Lorentzkraft (magnetische Spannung) und ist daher eine Untergrenze. Aus diesem Vorgang folgt, wie denn auch, dass Bereich II (Abb. 51) für den α -Effekt wichtiger ist als Bereich III, weil die Anwachszeiten für $B \gtrsim 10 - 15$ T viel kürzer als 200 Tage werden. Eine Konzentration des α -Effektes in der Nähe des Äquators ist im Einklang mit den helioseismologischen Ergebnissen für die differentielle Rotation (Abb. 48). Diese Messungen zeigen starke differentielle Rotation in der OS beim Äquator und vor allem an den Polen; wenn der α -Effekt auch an den Polen existiert (z.B. wenn $\alpha = \alpha_0 \cos \theta$) dann müsste dort starke Dynamowirkung auftreten, was nicht mit den Beobachtungen (Schmetterlingsdiagramm) übereinstimmt. Das Problem einer zu starken polaren Aktivität in den MF-Modellen ist z.B. auch von Rüdiger und Brandenburg⁶⁶ und Prautzsch⁶⁷ beobachtet worden, siehe Abb. (52).

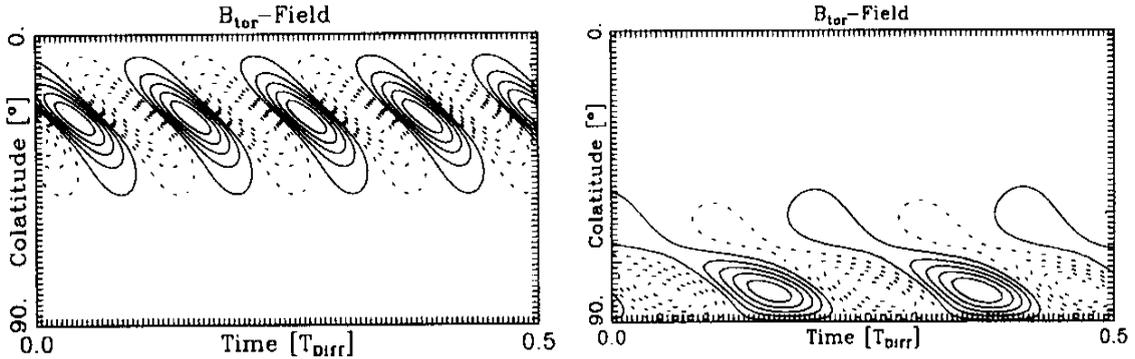


Abbildung 52: Schmetterlingsdiagramme für einen $\alpha\omega$ -Dynamo in der solaren OS mit $\Omega(r, \theta)$ wie in den helioseismologischen Messungen und (a) $\alpha = \alpha_0 \cos(\theta)$, (b) α konzentriert bei $\theta \approx 70^\circ \pm 10^\circ$ (Prautzsch 1993)

Das Vorzeichen von α hängt auf komplizierte Weise von den Parametern ab und ist im Beispiel von Abb. (51) meistens *positiv* in der Nähe des Äquators auf der nördlichen Halbkugel, wie zu erwarten ist wenn Plasma in der Flussröhre vom Gipfel der aufsteigenden Schleife zu beiden Seiten nach unten strömt (und die Schleife sich um weniger als 180° dreht). Nach der linearen MF-Theorie laufen die Dynamowellen dann vom Äquator zum Pol laufen statt vom Pol zum Äquator. Dieses Problem kann möglicherweise auf folgende Art gelöst werden:

- die Vorhersagungen der linearen MF-Theorie beruhen u.A. auf FOSA und sind nicht unbedingt gültig in der Sonne; in einer höheren Annäherung ergibt sich möglicherweise eine Dynamowelle die zum Äquator läuft obwohl $\alpha \partial \Omega / \partial r > 0$.
- es gibt kleine Bereiche wo $\alpha < 0$ im N; durch Änderung der Parameter könnten diese Bereiche vielleicht vergrößert werden;

⁶⁶Rüdiger, G., Brandenburg, A., 1995, A&A **296**, 557-66

⁶⁷Prautzsch, T., 1993, in *Solar and Planetary Dynamos*, eds. M.R.E. Proctor, P.C. Matthews und A.M. Rucklidge, Cambridge University Press, p. 249

- c) die beobachtete Breitenwanderung der Sonnenflecken ist vielleicht keine Dynamowelle sondern ein Effekt der Wanderung der instabilen Bereiche während des Sonnenzyklus (weil B_0 sich ändert);

Der dynamische α -Effekt tritt nur auf wenn die Flussröhre (mässig) instabil ist: $B > B_1$. dann funktioniert der 'normale' Sonnendynamo und gibt es Sonnenflecken. Wenn $B < B_1$, ist der Dynamo abgeschaltet weil es keine instabile Flussröhren gibt in der OS, und demzufolge auch keine Sonnenflecken. Die instabilen und stabilen Bereiche der Flussröhren entsprechen möglicherweise dem heutigen Zustand des Sonnendynamos bzw. dem Zustand während des Maunderminimums. Wenn $B > B_2$ wird α reduziert weil die magnetische Auftriebskraft zu stark wird (vgl. die sehr unterschiedliche Modellierung der Flussruption in §7.6.3). Für das Hin- und Herschalten

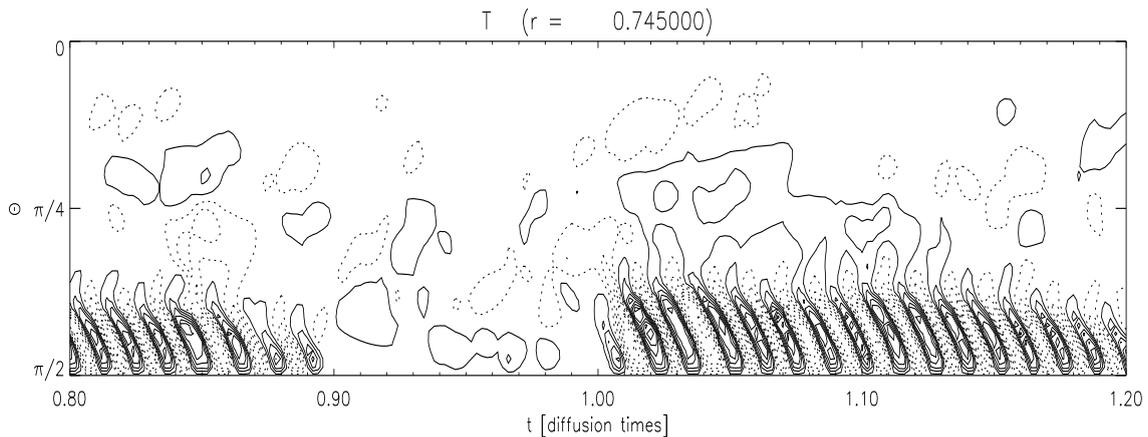


Abbildung 53: 2D MF-Simulation des Flussröhrendynamos in einer Kugelschale zwischen 0.7 und $1 R_{\odot}$ ($OS: 0.7 < r < 0.8 R_{\odot}$) mit zufälligen Flussinjektionen und α -Effekt der Flussröhreninstabilität. Gezeigt wird ein Schmetterlingsdiagramm des toroidalen Magnetfeldes für die nördliche Halbkugel etwa mitten in der OS.

zwischen den Phasen ist vielleicht ein separater Dynamo in der KS verantwortlich. Dieser Dynamo produziert ein unregelmässiges und schwaches Magnetfeld, das durch konvektives Overshooting oder konvektive Downdrafts⁶⁸ in die OS gelangen und B stochastisch modifizieren kann (§9.4). Schmitt, Schüssler und Ferriz-Mas⁶⁹ haben diesen Vorgang erstmals in einem sphärischen 1D $\alpha\omega$ -Dynamo illustriert (317–318, 310–311). Für den α -Effekt wurde (345) verwendet und die Zufuhr des magnetischen Flusses aus der KS wurde modelliert durch einen additiven Quellterm in (318) der Form $S(\theta, t)$, eine zufällige Zahl die nach einer Korrelationszeit t_c in jedem Breitenintervall θ_c unabhängig bestimmt wird. Durch den kumulativen Effekt vieler solcher Flussinjektionen kann B_0 (das mittlere Feld) die Schwelle B_{c1} passieren. Die Maunderminima die dadurch entstehen können sowohl zyklisch als nicht-zyklisch sein, wobei die Zykluslängen während der Maunderminima unregelmässiger sind als ausserhalb der Minima. Abbildung (53) zeigt das Ergebnis einer ähnlichen Simulation in 2D [d.h. die Rechnung fand statt auf einem $r\theta$ -Gitter, ohne Ansatz (310–311)]. Die neuesten Ergebnisse der ^{10}Be -Messungen⁷⁰ zeigen dass der Sonnenzyklus während des Maunderminimums schwach aber ununterbrochen weiterging. Ob der Zwei-Schichten-Dynamo oder der Flussröhrendynamo diese Beobachtung besser erklären kann ist noch offen. Eine alternative Erklärung für das Heraustreten aus einem Maunderminimum würde sich ergeben wenn stochastische Störungen *stabiler* Flussröhren ($\gamma_{km} = 0$) auch zu einem (geringen) α -Effekt führen würden; dies ist aber nicht so, jedenfalls wenn die auferlegte Störung eine additive Kraft in der Bewegungsgleichung ist⁷¹.

9.4 Dynamowirkung in der solaren Konvektionsschicht

Neben dem Dynamo in der OS, verantwortlich für das starke toroidale Magnetfeld, funktioniert wahrscheinlich ein Dynamo in der KS der ein schwaches Feld produziert ($B \lesssim B_{eq}$). Im Zwei-

⁶⁸Nordlund, A. et al 1992, ApJ **392**, 647

⁶⁹Schmitt, D., Schüssler, M., Ferriz-Mas, A., 1996, A&A **311**, L1-4

⁷⁰Beer und Weiss, erscheint 1998

⁷¹Ossendrijver, M. und Schüssler, M., erscheint 1998

Schichten-Dynamo von Parker (§9.2) ist Dynamowirkung in der KS wichtig weil so das poloidale Magnetfeld erzeugt werden kann. Im Rahmen des Flussröhrendynamos (§9.3) wird der KS-Dynamo gebraucht um den OS-Dynamo anzuschalten und um die Variabilität des Sonnenzyklus, einschliesslich Maunderminima, zu erklären.

Die KS hat nur wenig differentielle Rotation verglichen mit der OS, hat eine instabile Schichtung ($\delta = \nabla - \nabla_{\text{ad}} > 0$) und starke Turbulenz ($R_h \gg 1$). Der KS-Dynamo ist daher vom Typ α^2 oder $\alpha^2\omega$, so dass $|B_p| \approx |B_t|$. Das produzierte Magnetfeld ist relativ schwach ($B \lesssim B_{\text{eq}} \lesssim 0.3 \text{ T}$), weil es nicht stabil gespeichert werden kann in der KS; die magnetische Auftriebskraft kann in einer instabilen Schichtung nur durch Advektion nach unten kompensiert werden. Weil die Feldstärke des KS-Dynamos höchstens B_{eq} ist, könnte dort vielleicht der klassische α -Effekt funktionieren, mit $\alpha > 0$ oben in der nördlichen KS und $\alpha < 0$ unten in der nördlichen KS (§7.3.2), wie der Grenzschichtdynamo von Parker es braucht.

Brandenburg *et al*⁷² haben in einer 3D-Simulation den α -Effekt eines KS-Dynamos untersucht. Dazu wurden in einem kartesischen Modell (einem Rechteck am Südpol der Sonne; z nimmt zu mit der Tiefe und umfasst etwa eine Druckskalenhöhe) die vier Gleichungen des Dynamoproblems (Induktion, Navier-Stokes, Kontinuität und Energie) gelöst, mit als Anfangsbedingung für \mathbf{B} ein homogenes Magnetfeld, zuerst ein *vertikales* ($\parallel \mathbf{e}_z$). Wenn wir annehmen dass der α -Effekt isotrop ist ($\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$; siehe §7.3.2) kann α berechnet werden nach Mittelung der EMK in der xy -Ebene:

$$\langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{B} \rangle / |\langle \mathbf{B} \rangle|^2. \quad (408)$$

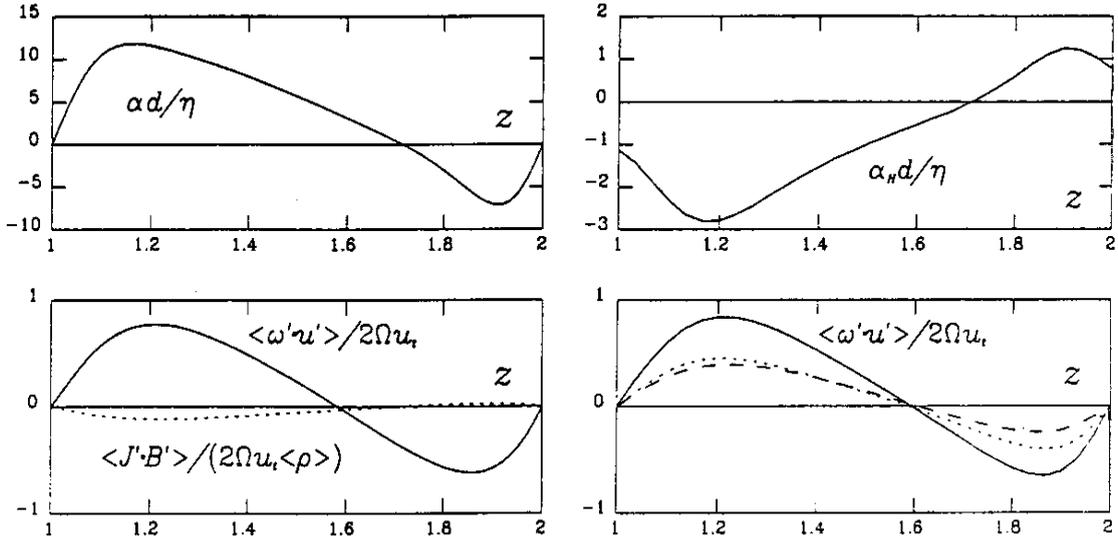


Abbildung 54: α -Effekt in einer 3D-MHD-Simulation. **links**) $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{e}_z$: $\alpha(z)$ (oben) und $h(z)$ (unten); **rechts**) $\mathbf{B}_0 - \mathbf{e}_z$: $\alpha_H(z)$ (oben) und $h(z)$ (unten) (Brandenburg *et al* 1990)

Das Ergebnis ist zu sehen in Abb. (54): α wechselt sein Vorzeichen in den unteren Regionen, hat aber fast überall das *gleiche* Vorzeichen als die Helizität ($h = \langle \mathbf{u}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_1) \rangle$) im Gegensatz zum FOSA-Ergebnis $\alpha \approx -\tau_c h / 3$ (§7.3.2). Um den Vorgang näher zu untersuchen muss man die Isotropie von α aufgeben und die Tensorkomponente α_{ij} berechnen. Wichtig für den Sonnendynamo ist nämlich nur die poloidale Komponente von $\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1) \Leftrightarrow$ die toroidale (hier: horizontale) Komponente der EMK, d.h. α_H . Dazu schreiben die Autoren

$$\langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle = \alpha_H \langle \mathbf{B}_H \rangle + \alpha_V \langle \mathbf{B}_V \rangle \quad (409)$$

und nehmen jetzt als Anfangsbedingung für \mathbf{B} ein homogenes *horizontales* Magnetfeld ($-\mathbf{e}_z$). Dies erlaubt eine Berechnung des horizontalen α -Effekts durch

$$\alpha_H = \langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{B}_H \rangle / |\langle \mathbf{B}_H \rangle|^2, \quad (410)$$

wo $\mathbf{B} = \mathbf{B}_H + \mathbf{B}_V$. Abb. (54) zeigt das Ergebnis; α_H hat das 'erwartete' Vorzeichen, anders als α , ist aber etwa 4 mal kleiner als α_V (nicht gezeigt). Der grösste Tensorkomponent ist offensichtlich

⁷²Brandenburg, A., Nordlund, A., Pulkkinen, P., Stein, R.F., Tuominen, I., 1990, A&A **232**, 277-91

$\alpha_{zz} = \alpha_V$ und dieser dominiert α . Der Grund für die Anisotropie und für die unterschiedlichen Vorzeichen von α_V und α_H scheint sowohl die Gravitation \mathbf{g} (Richtung der Downdrafts) als die Rotation $\boldsymbol{\Omega}$ zu sein. Das Ergebnis zeigt dass die Annahme der Isotropie $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$ im Allgemeinen falsch ist. Wichtig für den Grenzschichtdynamo ist der Hinweis dass in den unteren Regionen der KS ein α -Effekt funktionieren könnte.

Nordlund *et al*⁷³ haben 3D-Simulationen turbulenter Dynamowirkung durchgeführt in einem rotierendem Kubus (sich befindend auf 30°S) bestehend aus einer instabilen und darunter einer stabilen Schicht, vergleichbar mit KS und OS (allerdings ohne differentielle Rotation). Der vertikale Bereich umspannt vier Skalenhöhe. Als Anfangsbedingung wird ein inhomogenes Magnetfeld angenommen mit räumlichem Mittelwert $\langle \mathbf{B} \rangle_V = 0$. Die wichtigsten Ergebnisse sind:

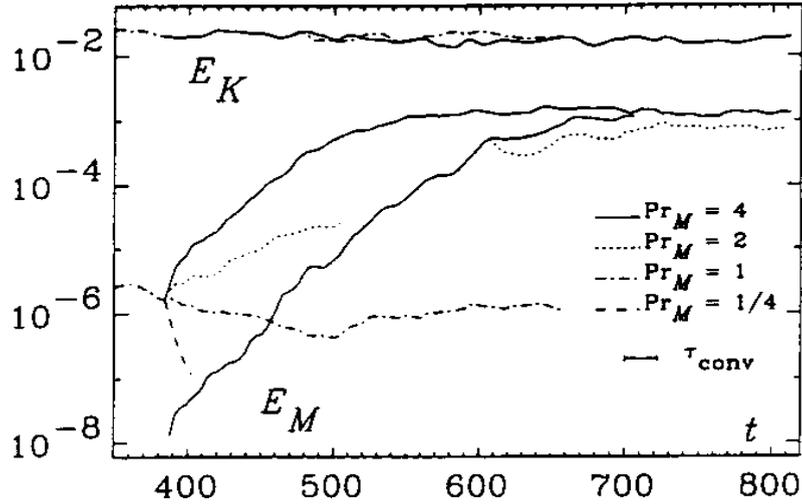


Abbildung 55: Magnetische und kinetische Energie als Funktionen der Zeit in MHD-Simulationen bei verschiedenen magnetischen Prandtlzahlen (Nordlund *et al* 1992)

- 1) Dynamowirkung erfordert eine magnetische *Prandtlzahl* $\text{Pr}_M = \nu/\eta \gtrsim 1$. Eine 'Erklärung' dieser Forderung stammt von Batchelor⁷⁴ und beruht auf der Identität von Induktionsgleichung und Rotation der Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Strömung, konstante Dichte (Barotropie $p = p(\rho)$ genügt auch) und nur konservative Kräfte (keine Lorentzkraft). Wenn wir in (363) $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla u^2/2 - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$ (J9) substituieren und dann die Rotation nehmen entsteht nämlich folgende Gleichung für $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (411)$$

Betrachte eine Flüssigkeit ohne Magnetfeld in der sich stationäre Turbulenz gebildet hat. Wenn ein schwaches Magnetfeld eingeführt wird, verstärkt die Strömung in gleicher Masse \mathbf{B} und $\boldsymbol{\omega}$. Für $\boldsymbol{\omega}$ sind Produktion und Dissipation wegen der Stationarität gerade in einem Gleichgewicht; es folgt dass die magnetische Energie anwächst wenn $\text{Pr}_M = \nu/\eta > 1$ und zerfällt wenn $\text{Pr}_M < 1$. Der Vergleich ist fragwürdig weil \mathbf{B} und \mathbf{u} unterschiedliche Größen sind während $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{u} zusammenhängen durch $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$: die Induktionsgleichung ist linear in \mathbf{B} aber (411) ist nichtlinear. Trotzdem wird eine Bedingung $\text{Pr}_M \gtrsim 1$ für Dynamowirkung bestätigt in den Simulationen (Abb. 55).

- 2) Für $\nu/\eta \gtrsim 1$ wächst die magnetische Energie anfänglich exponentiell an: $E_M \propto \exp(t/\tau_c)$, wo τ_c die Turnoverzeit ist. Eine solche Wachstumsrate ist typisch für einen *fast dynamo* (§6). Nach einiger Zeit stoppt die Lorentzkraft den Wachstum und entsteht ein Gleichgewicht zwischen Injektion (Arbeit gegen die Lorentzkraft) und Dissipation (siehe 51).
- 3) Die magnetische Energiedichte ist viel kleiner als die kinetische und das Magnetfeld ist sehr inhomogen (konzentriert in Flussröhren). Es fehlt also ein homogenes Hintergrundfeld,

⁷³Nordlund, A., Brandenburg, A., Jennings, R.L., Rieutord, M., Ruokolainen, J., Stein, R.F., 1992, ApJ **392**, 647-52

⁷⁴Batchelor, G.K., 1950, *Proc. Roy. Soc. London A* **201**, 405-16

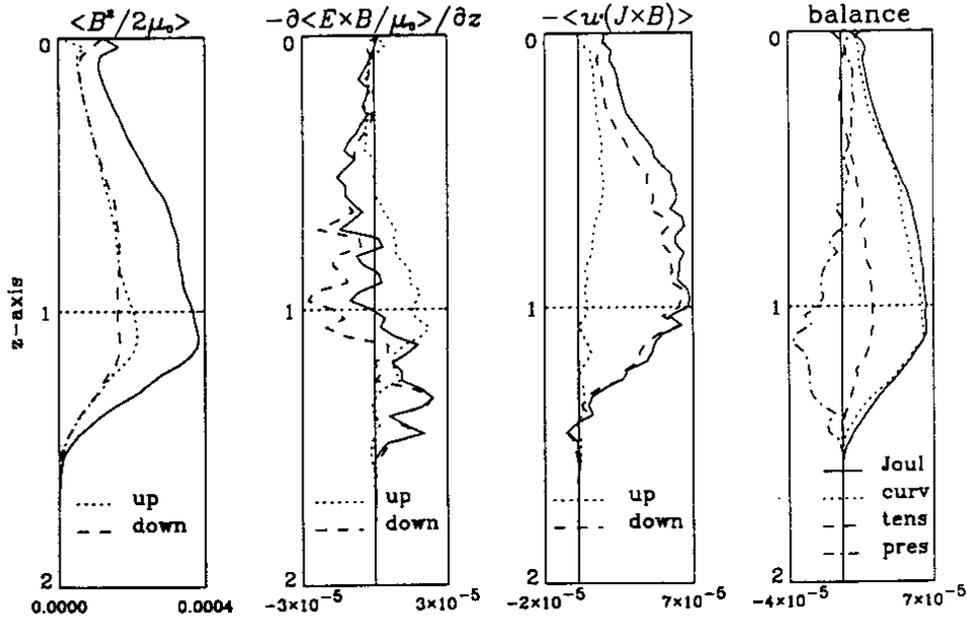


Abbildung 56: Vertikale Profile der Energiebilanz, erhalten durch horizontale Mittelung einer MHD-Simulation (Nordlund *et al* 1992)

notwendig für die Fortpflanzung von Alfvénwellen: keine MHD-Turbulenz. Dies erklärt wahrscheinlich warum die kinetische Energie $E_K(k)$ im Inertialbereich ein (hydrodynamisches) Kolmogorov-Spektrum $E_K(k) \propto k^{-5/3}$ (375) aufweist.

- 4) Magnetische Energie wird von der instabilen Schicht in die stabile Schicht transportiert. Dies folgt aus der Divergenz des horizontal gemittelten Poynting-Flusses: $-\langle \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \rangle / \mu_0 < 0$ (> 0) in der (in)stabilen Schicht (siehe 50 und Abb. 56). Die Ursache dieses Transports sind lokalisierte *Downdrafts*, die sich über mehrere Druckskalenhöhen ausstrecken, mehrere τ_c überleben und bis in die stabile Schicht hineindringen (siehe z.B. auch Rieutord und Zahn⁷⁵ und Brummel *et al*⁷⁶). Die *Downdrafts* erlauben den Transport des poloidalen Magnetfeldes von der KS in die OS und erzeugen gleichzeitig einen α -Effekt, weil die Corioliskraft sie auf systematische Weise dreht. Gegenüber der normalen Konvektion haben die *Downdrafts* den Vorteil dass sie schneller bewegen und daher ein grösseres B_{eq} haben ($\approx 1T$ statt $\approx 0.3T$). Sie passen daher gut im Rahmen des Grenzschichtdynamos von Parker. Beim Flussröhrendynamo können diese *Downdrafts* dienen als Ursache für die stochastischen Störungen des OS-Dynamos.

Aus den obengenannten Simulationen ist nicht zu schliessen ob der Zwei-Schichten-Dynamo oder der Flussröhrendynamo das richtige Modell des Sonnendynamos ist, weil differentielle Rotation noch nicht berücksichtigt worden ist. Die differentielle Rotation produziert ein starkes toroidales Magnetfeld in der OS, das durch die Bildung von aufsteigenden Schleifen einen grossen Effekt auf den KS-Dynamo haben könnte. Die genaue Art der Wechselwirkung zwischen OS-Dynamo und KS-Dynamo (und ob diese Trennung realistisch oder künstlich ist) ist noch nicht bekannt. Noch weiter weg sind realistische MHD-Simulationen des Sonnendynamos in einer sphärischen Geometrie. Solche Simulationen müssten sowohl den magnetischen Sonnenzyklus als auch die Konvektion und die differentielle Rotation reproduzieren; siehe z.B. Brandenburg⁷⁷ für die damit verbundenen Schwierigkeiten.

Schliesslich noch eine Bemerkung zur Energieversorgung des Sonnendynamos. Die gesamte magnetische Energie des Sonnendynamos beträgt (Abstand OS-Zentrum $R_{OS} \approx 5 \cdot 10^8$ m; Feldstärke der Flussröhren 10 T; *filling factor* $f = 8\%$): $E_M \approx 2\pi R_{OS} f D L B^2 / 2\mu_0 \approx 10^{32}$ J, so dass die Dissipationsrate=Produktionsrate der magnetischen Energie $Q_M \approx E_M/11$ Jahre $\approx 3 \cdot 10^{23}$ W $\ll L_\odot = 4 \cdot 10^{26}$ J. Es ist also reichlich Energiezufuhr vorhanden um den Dynamo zu

⁷⁵Rieutord, M., Zahn, J.-P. 1995, A&A 296 127-38

⁷⁶Brummel, N., Cattaneo, F., Toomre, J., 1995, Science 269, 1370-9

⁷⁷Brandenburg, A., 1994, in Lectures, S. 117

füttern. Ein Teil des Energieflusses aus dem Sonnenkern wird gespeichert in der differentiellen Rotation. Der Energie-Inhalt der differentiellen Rotation ($\rho_{\text{OS}} \approx 230 \text{ kg m}^{-3}$) beträgt $E_{\text{diff}} \approx 2\pi R_{\text{OS}} DL \rho_{\text{OS}} (\Delta u_0/2)^2/2 \approx 10^{31} \text{ J}$. Wenn der Dynamo seine gesamte magnetische Energie aus diesem Speicher entnimmt, ist die typische Abklingzeit der differentiellen Rotation $E_{\text{diff}}/Q_{\text{M}} \approx 1 \text{ Jahr}$. Daraus ist zu schliessen dass der Mechanismus der für den Aufbau von $\Omega(r, \theta)$ sorgt mindestens so schnell funktionieren muss; dies stellt wahrscheinlich keine grosse Anforderung.

10 Erddynamo

Die Eigenschaften des Erdmagnetfeldes sind beschrieben worden in §1; siehe auch Merrill und McElhinny⁷⁸. Ausführliche Beschreibungen der Dynamotheorie für das Erdmagnetfeld gibt es bei Ghil und Childress⁷⁹. Die wichtigsten Unterschiede zwischen Sonnendynamo und Erddynamo sind⁸⁰:

- 1) Die Erde ist ein schneller Rotator. Das Verhältnis Inertialkraft zu Corioliskraft definiert die *Rossby-Zahl*,

$$\text{Ro} = \frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}|}{2|\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}|} \approx \frac{u_c}{2\Omega L_c}. \quad (412)$$

Für den Erdkern ($u_c \approx 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$; $L_c \approx 3 \cdot 10^6 \text{ m}$; $\Omega = 7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$) ergibt sich $\text{Ro} \approx 2 \cdot 10^{-7}$, während in der solaren KS ($u_c \approx 100 \text{ m s}^{-1}$; $L_c \approx 2 \cdot 10^8 \text{ m}$; $\Omega = 2.7 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$) $\text{Ro} \approx 0.1$.

- 2) Nur schwache Turbulenz in EK2. Die typische Zeit der Veränderungen des Erdmagnetfeldes, etwa die Dauer einer Umpolung, ist $2 \cdot 10^3$ Jahre, ein Faktor 50 kleiner als die (nicht-turbulente) Diffusionszeit $\tau_d \approx 10^5$ Jahr (§4), während dieses Verhältnis in der Sonne etwa 10^8 ist.
- 3) Energieversorgung. Die magnetische Feldstärke in EK2 ist schlecht bekannt: Extrapolierung des Dipolfeldes an der Erdoberfläche liefert $B \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ T}$ in EK2; andere Modelle ergeben $B \approx 2 - 4 \cdot 10^{-2} \text{ T}$. Die gesamte magnetische Energie des Erdkerns ($V \approx 10^{20} \text{ m}^3$) ist dann $E_M \approx VB^2/2\mu_0 \approx 10^{21} - 10^{23} \text{ J}$. Die Dissipationsrate der magnetischen Energie (während einer Umpolung) ist also $Q_M \approx E_M/2 \cdot 10^3 \text{ Jahre} \approx 2 \cdot 10^{10} - 2 \cdot 10^{12} \text{ W}$, während die Wärmezufuhr aus dem Erdkern $L \approx 3 \cdot 10^{12} \text{ W}$ beträgt. Die vorhandene Wärmezufuhr genügt kaum für den Erddynamo und erlaubt auch nur schwache thermische Konvektion; daher wird vermutet dass neben thermischer auch *kompositionelle Konvektion* für den Erddynamo verantwortlich ist (Wachsen des inneren Erdkerns (EK1) durch Absinken von schweren Elementen und Aufsteigen von leichten Elementen zufolge der langsamen Abkühlung der Erde).
- 4) Der Boden des EK2 ist nur etwa 10% dichter als die Erdoberfläche, während die solare KS 9 Skalenhöhen der Dichte umfasst. Die magnetische Auftriebskraft, so wichtig in der solaren KS, spielt daher keine Rolle in der Erde.
- 5) Die magnetische Reynoldszahl $R_M \approx 100$ gegen $7 \cdot 10^9$ in der solaren KS: der Erdkern ist kein so idealer Geleiter wie die solare KS. Dadurch ist der Bereich von typischen Längen (Inertialbereich) viel kürzer als in der Sonne, was ein grosser Vorteil ist bei numerischen Simulationen.
- 6) Das Verhältnis Lorentzkraft/Corioliskraft, die *Elsasserzahl*

$$E = \frac{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|}{|2\rho\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}|} \approx \frac{B^2}{\mu_0\rho u_c\Omega L_c} \quad (413)$$

beträgt in EK2 ($\rho \approx 10^4 \text{ kg m}^{-3}$) maximal $E \approx 3$; in der solaren OS ($B \approx 10 \text{ T}$; $u_c \approx 10 \text{ m s}^{-1}$) maximal $E \approx 3 \cdot 10^2$. In beiden Himmelskörpern ist die Lorentzkraft sehr wichtig (*strong field regime*).

Die turbulente Diffusivität ist $\beta \approx L_c^2/\tau_c \approx 1.4 \cdot 10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ($\approx 50\eta$); $|\alpha|$ ist etwa $\tau_c\langle h \rangle/3 \lesssim \tau_c u_c^2/3L_c \approx u_c/3 \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$. Rezente Untersuchungen zeigen dass EK1 etwa 3° pro Jahr schneller dreht als EK2: $\Delta\Omega \approx -1.7 \cdot 10^{-9} \text{ rad s}^{-1}$; die differentielle Rotation unten in EK2 (Dicke $\Delta R \approx 2.3 \cdot 10^8 \text{ m}$) ist daher mindestens $\Omega' \approx \Delta\Omega/\Delta R \approx -7 \cdot 10^{-16} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Es folgt ($R \approx 3.5 \cdot 10^6 \text{ m}$):

$$C_\omega \approx \frac{\Omega'R^3}{\beta} \approx -200; \quad |C_\alpha| \approx \frac{|\alpha|R}{\beta} \approx 1. \quad (414)$$

⁷⁸Merrill, R.T. und McElhinny, M.W., 1983, *The Earth's Magnetic Field*, Academic Press, London

⁷⁹Ghil, M., und Childress, S., 1987, *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory, and Climate Dynamics*, Springer-Verlag

⁸⁰Roberts, P.H., 1993, in *The Cosmic Dynamo*, IAU-Symposium 157, Kluwer (Dordrecht), S. 431-40

In der Sprache der MF-Theorie ist der Erddynamo wahrscheinlich ein $\alpha\omega$ - oder $\alpha^2\omega$ -Dynamo. Die Anwendung der MF-Theorie ist aber für den Erddynamo ebenso problematisch wie für den Sonnendynamo. Zudem sind $\alpha\omega$ -Dynamos meistens periodisch; nur für besondere Werte der Parameter sind auch stationäre (nicht-periodische) Lösungen möglich. Hollerbach und Jones⁸¹ haben mit einem (nicht-linearen) MF-Modell gezeigt dass EK1 einen stabilisierenden Einfluss hat auf das Erdfeld, weil die Diffusionszeit dort länger ist als in EK2 ($\eta_1 < \eta_2$). Statt nur oszillierende Lösungen (um $\mathbf{B}_0 = 0$) erzeugt die MF-Dynamogleichung (zusammen mit einer nicht-linearen Differentialgleichung für \mathbf{u}_0) dann für bestimmte Parameterwerte Lösungen mit einem Dipolmoment das zeichenfest oszilliert um einen endlichen Wert. Das Modell weist also keine Umpolungen auf. Eine Möglichkeit Umpolungen zu erhalten sind α -Fluktuationen der Form $\alpha = \alpha_0 \cos \theta + \delta\alpha(\theta, t)$. Abb. (57) zeigt ein Beispiel einer numerischen Lösung der MF-Dynamogleichung in der $\alpha\omega$ -Annäherung in sphärischer 1D-Geometrie (317-318) unter Verwendung von Ansatz (310-311) mit $kR = 0.5$ und $C = 100$ (die dominante Eigenschwingung ist dann ein nicht-periodischer superkritischer Dipolmode; andere Eigenschwingungen sind periodisch und gedämpft). Zur Stabilisierung der Lösung ist α -Quenching verwendet worden.

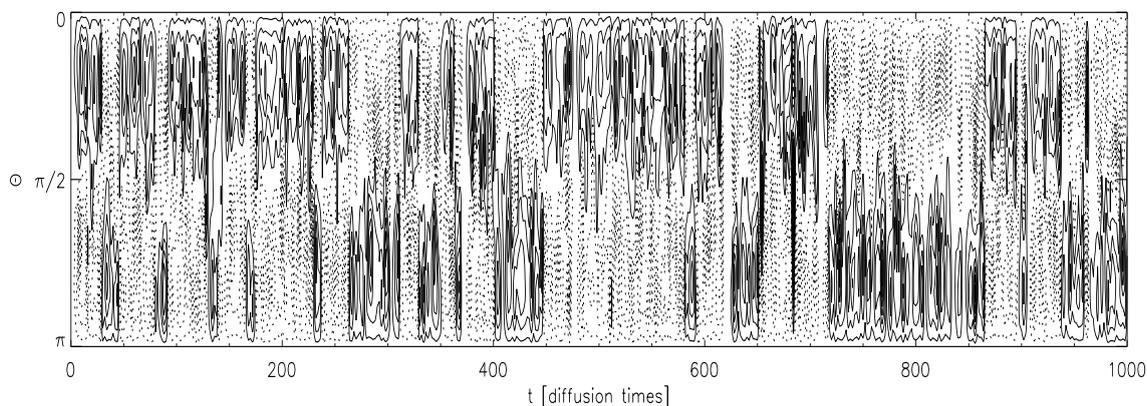


Abbildung 57: 1D-MF-Simulation des Magnetfeldes der Erde mit α -Fluktuationen. Gezeigt sind Konturlinien des toroidalen Magnetfeldes

Die Bedingungen des Erdkerns sind günstiger für MHD-Simulationen als die der solaren KS/OS. Tatsächlich ist man bei der numerischen Simulation des Erddynamos schon viel weiter als beim Sonnendynamo. Glatzmaier und Roberts⁸² haben erstmals in einer realistischen MHD-Simulation des Erdkerns eine (einzelne) Umpolung des Erdfeldes erreicht, nach einer Rechenzeit von 1 Jahr (= 40000 simulierte Jahre). Ihre Simulation bestätigt dass EK2 von sich aus geneigt ist häufig umzupolen und dass diese Umpolungen fast immer verhindert werden durch den stabilisierenden Einfluss von EK1. In einer weiteren Simulation haben Glatzmaier und Roberts⁸³ annehmlich gemacht dass gerade diese Kopplung zwischen EK1 und EK2 verantwortlich ist für die schnellere Rotation von EK1 bezüglich EK2.

⁸¹Hollerbach, R., Jones, C.A., 1993, *Nature* **365**, 541-3

⁸²Glatzmaier, G.A., Roberts, P.H., 1995, *Nature* **377**, 203-9

⁸³Glatzmaier, G.A., Roberts, P.H., 1996, *Science* **274**, 1887-91