**Brückenkurs Mathematik für Studierende der Chemie**
**Übung 10**

**Lineare Algebra** (Rechnen mit Vektoren und Matrizen, lineare Gleichungssysteme)

1. Gegeben sind die Matrizen

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   Führen Sie die folgenden Matrixoperationen durch: $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ und $\mathsf{CD}$. Überzeugen Sie sich, dass $\mathsf{CD} \neq \mathsf{DC}$ ist.

2. (a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -2 \end{array}$$

   als Matrix-Vektor-Gleichung $\mathsf{A}\,\underline{x} = \underline{b}$.

   (b) Lösen Sie das LGS durch Anwendung des Gauss-Algorithmus auf die erweiterte Koeffizientenmatrix. Prüfen Sie anschliessend Ihr Resultat $\underline{x}$ durch Einsetzen in das ursprüngliche LGS.

3. Die Drehung eines Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ um die $z$-Achse mit Drehwinkel $\phi$ ergibt einen Bildvektor $\boldsymbol{r}'$, der durch Anwendung eines Drehoperators $\widehat{R}(\phi \boldsymbol{e}_z)$ auf den Vektor $\boldsymbol{r}$ erhalten werden kann: $\boldsymbol{r}' = \widehat{R}(\phi \boldsymbol{e}_z)\,\boldsymbol{r}$. In der gewohnten orthonormalen Basis eines kartesischen Achsensystems wird dies übersetzt in die Multiplikation des Spaltenvektors $\underline{r}$ mit einer Drehmatrix

$$\mathsf{R}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   zur Berechnung des Spaltenvektors $\underline{r}'$: $\underline{r}' = \mathsf{R}(\phi)\,\underline{r}$.

   (a) Berechnen Sie die Drehmatrizen $\mathsf{R}(\phi)$ für Drehungen um $\phi = 180°$ und $\phi = 90°$.

   (b) Drehen Sie den Vektor $\underline{r}^\top = (2, 1, 0)$ mit Hilfe der Matrizen aus (a) um 180° und um 90°.

   (c) Bestätigen Sie Ihre Rechnung durch Vergleich mit einer graphischen Lösung (Skizze der $xy$-Ebene mit $\boldsymbol{r}$ und den beiden, daraus durch Drehung erhaltenen Vektoren $\boldsymbol{r}'$).