

Brückenkurs Mathematik für Studierende der Chemie

Lösungen zu Übung 9

Differentiation und Integration (Fortsetzung)

1. Berechnung der Ableitungen der gegebenen Funktionen:

$$(a) \ y = (2 + 3x)^{-1} \Rightarrow y' = (-1)(2 + 3x)^{-2} \cdot 3 = -\frac{3}{(2 + 3x)^2};$$

$$(b) \ y = \frac{1}{6} x^6 \Rightarrow y' = \frac{1}{6} 6x^5 = x^5; \quad (c) \ y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2;$$

$$(d) \ y = 3^x \Leftrightarrow \ln(y) = x \ln(3) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln(3) \Leftrightarrow y' = y \ln(3) = 3^x \ln(3).$$

Das letzte Beispiel zeigt logarithmisches Ableiten, d. h. Anwendung der Kettenregel auf $\ln(y)$, um y' zu erhalten.

2. Berechnung der gegebenen Integrale (bestimmte Integrale ergeben reelle Zahlen, unbestimmte Integrale ergeben eine Schar von Funktionen, die Menge aller Stammfunktionen zum Integranden):

$$(a) \ \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C; \quad (b) \ \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = +1 - 0 = 1;$$

$$(c) \ \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1; \quad (d) \ \int_1^3 3^x dx = \frac{3^x}{\ln(3)} \Big|_1^3 = \frac{1}{\ln(3)}(3^3 - 3^1) = \frac{24}{\ln(3)};$$

$$(e) \ \int_1^3 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^3 = \frac{1}{4}(3^4 - 1^4) = \frac{80}{4} = 20;$$

$$(f) \ \int \frac{3 dx}{(2 + 3x)^2} = \left| \begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ u = 2 + 3x \\ du = 3 dx \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{2 + 3x} + C$$

(Probe: Differentiation des Ergebnisses einer unbestimmten Integration muss den Integranden ergeben! $F(x) = -(2 + 3x)^{-1} \Rightarrow F'(x) = -(-1)(2 + 3x)^{-2} \cdot 3 = 3/(2 + 3x)^2$.)

3. (a) Berechnung des unbestimmten Integrals durch zweifache partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(x) dx &= x^2 \sin(x) - \int 2x \sin(x) dx = x^2 \sin(x) + 2 \int x (-\sin(x)) dx \\ &= x^2 \sin(x) + 2 \left(x \cos(x) - \int \cos(x) dx \right) \\ &= x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + C \end{aligned}$$

(Prüfung durch Differentiation liefert den Integranden $x^2 \cos(x)$ zurück.)

- (b) Berechnung des bestimmten Integrals nach Partialbruchzerlegung des Integranden:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) = f(-x)$$

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{(x + 1)(x - 1)} dx &= \frac{1}{2} \int_2^3 \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\ln|x - 1| - \ln|x + 1| \right) \Big|_2^3 \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \left(\ln(2/4) - \ln(1/3) \right) = \frac{1}{2} \ln(3/2) \end{aligned}$$

Veranschaulichung des bestimmten Integrals im Schaubild:

