

Brückenkurs Mathematik für Studierende der Chemie Lösungen zu Übung 8

Differentiation und Integration

1. (a) $y = x^2 \sin(x) \Rightarrow y' = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$ (Produktregel)
- (b) $y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$ (Quotientenregel)
- (c) $y = \frac{x^2}{2-x} \Rightarrow y' = \frac{2x(2-x) - x^2 \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{x(4-x)}{(2-x)^2}$ (Quotientenregel)
- (d) $y = x^2 e^x \Rightarrow y' = 2x e^x + x^2 e^x = x(2+x)e^x$ (Produktregel)
- (e) $y = 2^x x^2 = e^{x \ln(2)} x^2 \Rightarrow y' = \ln(2) e^{x \ln(2)} x^2 + 2^x 2x = x 2^x ((\ln(2))x + 2)$ (Produktregel)
- (f) $y = \sin(x^2) \Rightarrow y' = 2x \cos(x^2)$ (Kettenregel)
- (g) $y = \sin^2(x) \Rightarrow y' = 2 \sin(x) \cos(x)$ (Kettenregel oder Produktregel)
- (h) $y = (x + \cos(x))^2 \Rightarrow y' = 2(x + \cos(x))(1 - \sin(x))$ (Kettenregel)
2. (a) $y = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ ($D = \mathbb{R}$). Die Funktion ist ein Polynom vom Grad 4. Das Schaubild zeigt die um 1 nach unten verschobene Funktion x^4 ($W = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$). Für $|x| \rightarrow \infty$ geht $y \rightarrow +\infty$. Von den vier Nullstellen des Polynoms ($x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = i, x_4 = -i$) liegen nur zwei auf der reellen Achse (x_1 und x_2). Ableitungen und deren Nullstellen: $y' = 4x^3$ ($y'(0) = 0$), $y'' = 12x^2$ ($y''(0) = 0$), $y''' = 24x$ ($y'''(0) = 0$). An der Stelle $x_5 = 0$ liegt also ein stationärer Punkt vor. Dieser ist kein Wendepunkt mit horizontaler Tangente, sondern ein Minimum.
- (b) $y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ ($D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$). Die Funktion ist eine *unechte* gebrochenrationale Funktion, die auch als Summe aus der konstanten Funktion 1 und der um 1 nach rechts verschobenen Hyperbel $1/(x-1)$ ($1/t$ mit $t = x-1$) geschrieben werden kann ($W = \mathbb{R}$). An der Stelle $x_1 = 0$ (einfache Nullstelle des Zählers) hat die Funktion ihre einzige Nullstelle (mit Vorzeichenwechsel). Die Stelle $x_2 = 1$ (einfache Nullstelle des Nenners) ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel ($\varepsilon > 0$):

$$\begin{aligned}
 x = 1 - \varepsilon \text{ (von links): } & \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon - 1} = \frac{1 - \varepsilon}{-\varepsilon} \rightarrow -\infty \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \\
 x = 1 + \varepsilon \text{ (von rechts): } & \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon - 1} = \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow +\infty \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Das Verhalten für $|x| \rightarrow \infty$ wird durch die Asymptote $y = 1$ beschrieben. Es gibt ausser der Nullstelle $x_1 = 0$ keine weiteren Achsenschnittpunkte. Die ersten Ableitungen — $y' = -1/(x-1)^2$ (s. oben Aufg. 1(b)), $y'' = +2/(x-1)^3$, $y''' = -6/(x-1)^4$ — besitzen keine Nullstellen, es gibt daher weder Extrema noch Wendepunkte.

3. Hier ist zu beachten, dass jeweils alle drei Funktionen $f'(x)$, $f(x)$ und $F(x)$ denselben Definitionsbereich haben sollen (soweit möglich).

$f'(x) \Leftrightarrow f(x) \Leftrightarrow F(x) + C$	$f'(x) \Leftrightarrow f(x) \Leftrightarrow F(x) + C$	$f'(x) \Leftrightarrow f(x) \Leftrightarrow F(x) + C$
1 x $\frac{1}{2}x^2 + C$	$-1/x^2$ $1/x$ $\ln x + C$	$-\sin(x)$ $\cos(x)$ $\sin(x) + C$
$2x$ x^2 $\frac{1}{3}x^3 + C$	$-2/x^3$ $1/x^2$ $-1/x + C$	e^x e^x $e^x + C$
$5x^4$ x^5 $\frac{1}{6}x^6 + C$	$\cos(x)$ $\sin(x)$ $-\cos(x) + C$	0 c $cx + C$