

Brückenkurs Mathematik für Studierende der Chemie

Lösungen zu Übung 6

Exponentialfunktion und Logarithmen

1. (a) Wertetabelle (Werte auf 1 Dezimale):

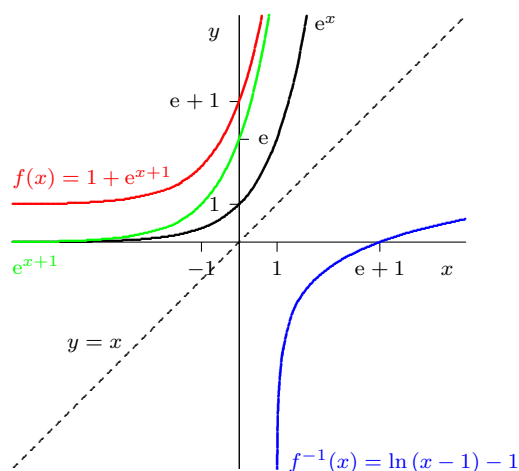
x	$x + 1$	e^x	e^{x+1}	$f(x)$
-1	0	0,4	1	2
0	1	1	2,7	3,7
1	2	2,7	7,4	8,4

Die Funktion $f(x)$ ist in D_f streng monoton. Für die Funktionswerte gilt: $W_f = \{y \in \mathbb{R} | y > 1\}$.

- (b) Berechnung der Umkehrfunktion ($y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$):

$$y = 1 + e^{x+1} \Rightarrow y - 1 = e^{x+1} \Rightarrow x + 1 = \ln(y - 1) \Rightarrow x = \ln(y - 1) - 1$$

Daraus folgt (Vertauschen von x und y): $y = f^{-1}(x) = \ln(x - 1) - 1$. Zum Zeichnen des Schaubilds von $y = f^{-1}(x)$ lassen sich dieselben Zahlenpaare wie für $y = f(x)$ verwenden, aber x - und y -Wert sind zu vertauschen.



2. Berechnung der nach 5 s noch vorhandenen Masse (Anfangsmasse $m_A^0 = 6 \text{ g}$, $k = 0,02 \text{ s}^{-1}$):

$$m_A(5 \text{ s}) = 6 \text{ g} \cdot e^{-0,02 \cdot 5} = 6 \text{ g} \cdot e^{-0,1} = 6 \text{ g} \cdot 0,9048 = 5,429 \text{ g}$$

Berechnung der „Drittelwertszeit“ $t_{1/3}$:

$$m_A(t_{1/3}) = \frac{1}{3} m_A^0 = m_A^0 e^{-k t_{1/3}} \Rightarrow \ln(1/3) = -\ln 3 = -k t_{1/3} \Rightarrow t_{1/3} = \frac{\ln(3)}{k}.$$

Hier also: $t_{1/3} = \frac{\ln(3)}{0,02 \text{ s}^{-1}} = 54,93 \text{ s} \approx 55 \text{ s}.$

(Anmerkung: $t_{1/3}$ ist **nicht** abhängig von der Anfangsmasse m_A^0 ! Es hat sich also immer nach Ablauf einer Zeitspanne $\Delta t = t_{1/3}$ ein Drittel der zu Beginn der Zeitspanne vorhandenen Masse von A in Reaktionsprodukte umgewandelt, unabhängig davon, ob zu Beginn der Zeitspanne noch viel oder wenig von der Substanz A vorhanden war.)

3. Die Definition des pH-Wertes ist gegeben durch $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} \text{ mol/l}$. Also ist hier

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-8} \text{ mol/l} = 0,00000001 \text{ mol/l}.$$

4. Es gilt: $\log_b(x) = y \Leftrightarrow x = b^y$. Also ist hier:

$$\begin{aligned} \lg(100) &= \lg(10^2) = 2, & \lg(10000) &= \lg(10^4) = 4, \\ \lg(0,01) &= \lg(10^{-2}) = -2, & \lg\left(\frac{1}{10000}\right) &= \lg(10^{-4}) = -4. \end{aligned}$$

5. Es gilt: $\log_b(uv) = \log_b(u) + \log_b(v)$. Also ist hier:

$$\begin{aligned} \lg(5000) &= \lg(5 \cdot 10^3) = \lg(5) + 3 \approx 0,699 + 3 = 3,699, \\ \lg(3 \cdot 10^{-2}) &= \lg(3) - 2 \approx 0,477 - 2 = -1,523, \\ \lg(1100) &= \lg((11/10) \cdot 10^3) = \lg(11/10) + 3 \approx 0,041 + 3 = 3,041. \end{aligned}$$