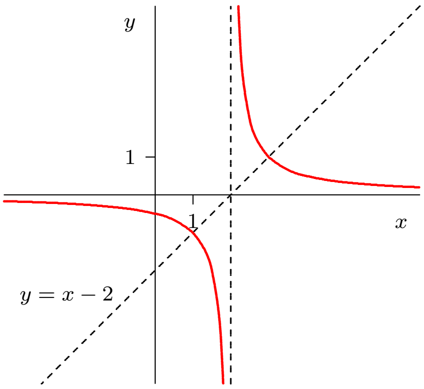
Brückenkurs Mathematik für Studierende der Chemie
Lösungen zu Übung 2

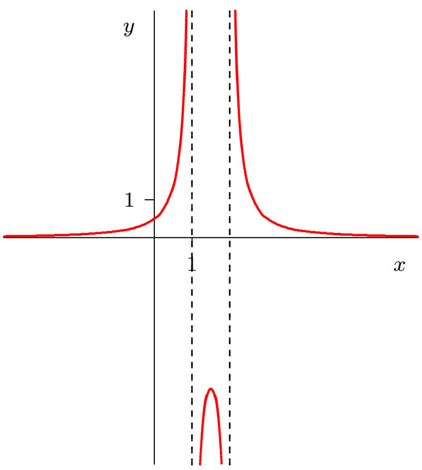
Gebrochen-rationale Funktionen

1. Nach rechts verschobene (Normal-)Hyperbel ($y = 1/x$), keine Nullstellen, einfache Polstelle (Polstelle mit VZW) bei $x = 2$.



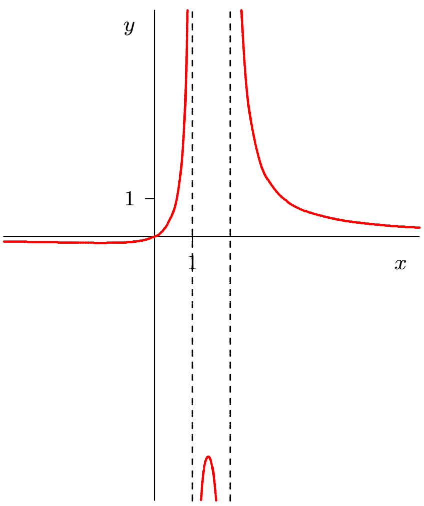
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, Achsenschnittpunkt: $f(0) = -\frac{1}{2}$.
Vorzeichen der Funktionswerte:
$f(x) < 0$ für $x < 2$, $f(x) > 0$ für $x > 2$.
Verhalten in der Umgebung der Polstelle:
$f(x) \to -\infty$ für $x \to 2$ von links,
$f(x) \to +\infty$ für $x \to 2$ von rechts.
Verhalten für $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (von unten).
Verhalten für $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (von oben).
$\rightsquigarrow$ Asymptote $y = 0$ (x-Achse)

2. $f(x)$ mit zwei einfachen Polstellen bei $x = 1$ und $x = 2$, keine Nullstellen, Schaubild symmetrisch zur Vertikalen bei $x = \frac{3}{2}$ ($f(\frac{3}{2} - x) = f(\frac{3}{2} + x)$).



$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$, Achsenschnittp.: $f(0) = \frac{1}{2}$.
Vorzeichen der Funktionswerte:
$f(x) < 0$ für $1 < x < 2$,
$f(x) > 0$ für $x < 1$ oder $x > 2$.
Verhalten in der Umgebung der Polstellen:
$f(x) \to -\infty$ für $x \to 1$ von rechts,
$f(x) \to -\infty$ für $x \to 2$ von links,
$f(x) \to +\infty$ für $x \to 1$ von links,
$f(x) \to +\infty$ für $x \to 2$ von rechts.
Verhalten für $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (von oben).
Verhalten für $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (von oben).
$\rightsquigarrow$ Asymptote $y = 0$ (x-Achse)

3. $f(x)$ mit zwei einfachen Polstellen bei $x = 1$ und $x = 2$, einfache Nullstelle bei $x = 0$.



$f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$, Achsenschnittp.: $f(0) = 0$.
Vorzeichen der Funktionswerte:
$f(x) < 0$ für $x < 0$ und $1 < x < 2$,
$f(x) > 0$ für $0 < x < 1$ oder $x > 2$.
Verhalten in der Umgebung der Polstellen:
$f(x) \to -\infty$ für $x \to 1$ von rechts,
$f(x) \to -\infty$ für $x \to 2$ von links,
$f(x) \to +\infty$ für $x \to 1$ von links,
$f(x) \to +\infty$ für $x \to 2$ von rechts.
Verhalten für $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (von unten).
Verhalten für $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (von oben).
$\rightsquigarrow$ Asymptote $y = 0$ (x-Achse)

Proportionalität

1. Bei fester Strecke s ist die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ **umgekehrt proportional** zur Zeit t: $\overline{v} = s/t$. Oder gleichbedeutend: $t = s/\overline{v}$. Führt eine Geschwindigkeit $\overline{v}_1$ zu einer Reisezeit $t_1 = s/\overline{v}_1 = 1{,}5$ h, so ergibt sich mit verdoppelter Geschwindigkeit $\overline{v}_2 = 2\,\overline{v}_1$ eine im Vergleich zu t_1 halbierte Reisezeit $t_2 = s/\overline{v}_2 = s/(2\,\overline{v}_1) = (1/2)t_1 = 0{,}75$ h $= 45$ min.

2. Sieht man von Rabattregelungen ab, dann darf bei Waren angenommen werden, dass das Preisverhältnis $V = B/M$, also das Verhältnis von Geldbetrag B zu Warenmenge M, konstant ist. Damit ist der zu zahlende Betrag B der Warenmenge M **direkt proportional**: $B = V \cdot M$ (das Preisverhältnis V ist der Proportionalitätsfaktor). Aus $B_1/M_1 = V = B_2/M_2$ folgt dann $B_2 = V \cdot M_2 = (B_1/M_1) \cdot M_2 = B_1 \cdot M_2/M_1 =$ 7 EUR $\cdot$ 7 kg/3 kg $= 16{,}33$ EUR.

3. Bei konstantem Druck p sind Volumen V und Temperatur T einer Gasmenge zueinander **direkt proportional** (aus dem idealen Gasgesetz folgt $V = (nR/p) \cdot T$). Also ist das Verhältnis von Volumen V zu Temperatur T konstant, woraus zunächst folgt $V_1/T_1 = V_2/T_2$. Daraus ergibt sich hier $V_2 = (V_1/T_1) \cdot T_2 = V_1 \cdot T_2/T_1 = 3$ l $\cdot$ 320 K/295 K $= 3{,}254$ l.

4. Bei konstanter Temperatur T sind Volumen V und Druck p einer Gasmenge zueinander **umgekehrt proportional** (aus dem idealen Gasgesetz folgt $p = nRT/V$). Also ist das Produkt von Druck p und Volumen V konstant, woraus zunächst folgt $p_1V_1 = p_2V_2$. Für $V_2 = (2/3) \cdot V_1$ ergibt dies hier $p_2 = p_1V_1/V_2 = (3/2) \cdot p_1 = (3/2) \cdot 1$ atm $= 1{,}5$ atm.

5. Wie bereits festgestellt (siehe 3.) sind Volumen V und Temperatur T einer Gasmenge bei konstantem Druck p zueinander **direkt proportional**. Es ist $V_2 = V_1 \cdot (T_2/T_1) =$ 75 l $\cdot$ 280 K/350 K $= 60$ l.

6. Wie bereits festgestellt (siehe 4.) sind Volumen V und Druck p einer Gasmenge bei konstanter Temperatur T zueinander **umgekehrt proportional**. Es ist $p_2 = p_1V_1/V_2 =$ 1 atm $\cdot$ 60 l/80 l $= (3/4)$ atm $= 0{,}75$ atm.