

Brückenkurs Mathematik für Studierende der Chemie

Lösungen zu Übung 1

1. (a)

$\begin{array}{rcl} 200 \text{ g} & \text{Cr vor der Reaktion} & \\ - 122 \text{ g} & \text{Cr nach der Reaktion} & \\ \hline 78 \text{ g} & \text{Cr im Oxid} & \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 126 \text{ g} & \text{Masse des Oxids} & \\ - 78 \text{ g} & \text{Cr im Oxid} & \\ \hline 48 \text{ g} & \text{O im Oxid} & \end{array}$
---	---

Massenverhältnisse in Bezug auf die jeweiligen relativen Atomgewichte:

$$\text{Cr: } \frac{78 \text{ g}}{52 \text{ g}} = \frac{3}{2} \qquad \text{O: } \frac{48 \text{ g}}{16 \text{ g}} = 3$$

Atomzahlverhältnis Cr zu O:

$$\Rightarrow n : m = (3/2) : 3 = 1 : 2 \Rightarrow \text{Reaktionsgleichung: } \text{Cr} + \text{O}_2 \longrightarrow \text{CrO}_2$$

Bei dieser Reaktion ist Chrom(IV)oxid (CrO_2) entstanden. Dies ist ein braun-schwarzer, ferromagnetischer Feststoff mit Rutil-Struktur, der früher zur Herstellung von Magnetbändern verwendet wurde.

(b)

$\begin{array}{rcl} 200 \text{ g} & \text{Cr vor der Reaktion} & \\ - 44 \text{ g} & \text{Cr nach der Reaktion} & \\ \hline 156 \text{ g} & \text{Cr im Oxid} & \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 204 \text{ g} & \text{Masse des Oxids} & \\ - 156 \text{ g} & \text{Cr im Oxid} & \\ \hline 48 \text{ g} & \text{O im Oxid} & \end{array}$
---	--

Massenverhältnisse in Bezug auf die jeweiligen relativen Atomgewichte:

$$\text{Cr: } \frac{156 \text{ g}}{52 \text{ g}} = 3 \qquad \text{O: } \frac{48 \text{ g}}{16 \text{ g}} = 3$$

Atomzahlverhältnis Cr zu O:

$$\Rightarrow n : m = 3 : 3 = 1 : 1 \Rightarrow \text{Reaktionsgleichung: } 2 \text{Cr} + \text{O}_2 \longrightarrow 2 \text{CrO}$$

Bei dieser Reaktion ist Chrom(II)oxid (CrO) entstanden. Dies ist ein schwarzer Feststoff mit Natriumchlorid-Struktur.

(c)

$\begin{array}{rcl} 200 \text{ g} & \text{Cr vor der Reaktion} & \\ - 44 \text{ g} & \text{Cr nach der Reaktion} & \\ \hline 156 \text{ g} & \text{Cr im Oxid} & \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 228 \text{ g} & \text{Masse des Oxids} & \\ - 156 \text{ g} & \text{Cr im Oxid} & \\ \hline 72 \text{ g} & \text{O im Oxid} & \end{array}$
---	--

Massenverhältnisse in Bezug auf die jeweiligen relativen Atomgewichte:

$$\text{Cr: } \frac{156 \text{ g}}{52 \text{ g}} = 3 \qquad \text{O: } \frac{72 \text{ g}}{16 \text{ g}} = \frac{9}{2}$$

Atomzahlverhältnis Cr zu O:

$$\Rightarrow n : m = 3 : (9/2) = 2 : 3 \Rightarrow \text{Reaktionsgleichung: } 4 \text{Cr} + 3 \text{O}_2 \longrightarrow 2 \text{Cr}_2\text{O}_3$$

Bei dieser Reaktion ist das dunkelgrüne Chrom(III)oxid (Cr_2O_3) entstanden.

2. (a) Aus der gegebenen Gleichung wird zunächst $36 - 12x + x^2 + 5x - 24 = x^2 - 7x + 12 = 0$.
Die entstandene quadratische Gleichung ist von der Form $x^2 + px + q = 0$, deren beide Lösungen durch die **pq-Formel**

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

gegeben sind. Anwenden dieser Formel ergibt hier ($p = -7$, $q = 12$):

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 12} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49 - 48}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Die beiden Lösungen der gegebenen quadratischen Gleichung sind also $x_1 = 3$ und $x_2 = 4$.
Probe: $(x - x_1)(x - x_2) = (x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12 \checkmark$.

(b) $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Anwenden der pq -Formel ergibt hier ($p = -4$, $q = 5$, $i^2 = -1$):

$$x_{1,2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 - 5} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i$$

Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind die zueinander konjugiert komplexen Zahlen $x_1 = 2 - i$ und $x_2 = 2 + i$.

Probe: $[x - (2 - i)][x - (2 + i)] = x^2 - (2 + i)x - (2 - i)x + (2 - i)(2 + i) = x^2 - 4x + (4 - i^2) = x^2 - 4x + 5 \checkmark$.

3. (a)

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^4 \frac{1}{n!} &= 1 + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{48}{24} + \frac{12}{24} + \frac{4}{24} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24} = 2,708\bar{3} \end{aligned}$$

Zum Vergleich: Die Euler-Zahl e ist

$$e = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2,718281828 \dots$$

- (b)

$$\sum_{k=0}^3 (-1)^k (k+2) = 2 - 3 + 4 - 5 = -2$$