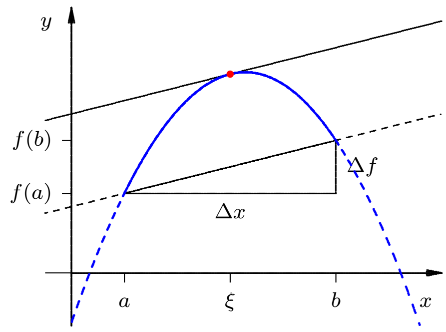
# 8. Teil: Differentialrechnung (Fortsetzung)

*Mittelwertsatz der Differentialrechnung*

Gegeben sei eine Funktion $f\colon x \to y = f(x)$, die in $[a, b]$ stetig und in $(a, b)$ differenzierbar ist. Dann gibt es mindestens eine Stelle $\xi$ mit $a < \xi < b$, so dass gilt (s. nebenstehende Abbildung):




$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)\,.$$

Die Steigung der Tangente von $f(x)$ an der Stelle $x = \xi$ ist gleich der Steigung der Sekanten durch die beiden Punkte an den Intervallgrenzen mit den Funktionswerten $f(a)$ und $f(b)$.

*Spezialfall* (**Satz von Rolle**, nach Michel Rolle, 1652–1719): Falls $f(a) = f(b)$ ist, so gibt es mindestens eine Stelle $\xi$ mit $f'(\xi) = 0$. — Funktionen, die in $(a, b)$ stetig und differenzierbar sind und ausserdem Nullstellen an beiden Intervallgrenzen haben ($f(a) = f(b) = 0$), müssen also zwischen diesen Nullstellen mindestens ein Extremum (Hoch- oder Tiefpunkt) besitzen.

**Anmerkungen: (1)** Eine spezielle Variante des Mittelwertsatzes, mit $\xi = (a + b)/2 = x$, $a = x - h$, $b = x + h$, steht in engem Zusammenhang mit der im 7. Teil gegebenen Definition von $f'(x)$ (s. o.). — **(2)** Löst man die Formel aus dem Mittelwertsatz nach $f(b)$ auf und setzt $b = a + h$ sowie $\xi = a + \vartheta h$ $(0 < \vartheta < 1)$, so erhält man

$$f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a + \vartheta h)\,, \qquad 0 < \vartheta < 1\,.$$

Dies lässt sich auch so lesen, dass der letzte Term den Fehler angibt, den man macht, wenn man $f(a + h) \approx f(a)$ setzt. Der Fehler für diese Approximation von $f(a + h)$ durch die Konstante $f(a)$ (Polynom in $h$ vom Grad 0) ist abhängig von $h^1$ und dem Wert der ersten Ableitung $f'(x)$ an einer Stelle $a + \vartheta h$ $(0 < \vartheta < 1)$.

*Regel von Bernoulli und de l'Hospital*

Diese Regel ermöglicht die Berechnung von Grenzwerten sogenannter „unbestimmer Ausdrücke“. Das sind Terme, bei denen beim Versuch der Grenzwertberechnung für $x \to a$ oder $x \to \infty$ Ausdrücke wie z. B. „0/0“, “$\infty/\infty$“ oder „$\infty - \infty$“ entstehen, die nicht allgemein eindeutig auswertbar sind. Hier wird nur der Fall „0/0“ behandelt.

Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f$ und $g$, die an derselben Stelle $a$ ihres Definitionsbereiches eine Nullstelle haben, $f(a) = g(a) = 0$, für deren Ableitungen dort aber gilt $f'(a) = A$ und $g'(a) = B \neq 0$. Dann ist

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{A}{B}$$

**Anmerkungen: (1)** Die Regel von Bernoulli und de l'Hospital ist ggf. mehrfach anwendbar (z. B. wenn sowohl der Quotient $f(x)/g(x)$ als auch der Quotient $f'(x)/g'(x)$ für $x \to a$ von der Form „0/0“ sind). — **(2)** Die Regel „funktioniert“ so, wie eben beschrieben, auch für den Fall „$\infty/\infty$“ (s. Beispiel unten), bei allen anderen Arten unbestimmter Ausdrücke ist erst auf die Form „0/0“ umzuformen. — **(3)** Die Regel ist benannt nach Johann Bernoulli, 1667–1748, der sie entdeckte, und Guillaume de l'Hospital, 1661–1704, dem Autor des ersten Lehrbuchs der Differentialrechnung, der sie von Bernoulli erwarb und veröffentlichte.

Zwei Beispiele zur Anwendung der Regel von Bernoulli und de l'Hospital:

- Unbestimmter Ausdruck der Form „0/0“ (einmalige Anwendung der Regel):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1\,;$$

- Unbestimmter Ausdruck der Form „$\infty/\infty$“ (mehrfache Anwendung der Regel):

$$\lim_{x\to\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\mathrm{e}^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{\mathrm{e}^x} = 0\,.$$

**Taylor-Reihenentwicklung**

Aus dem Mittelwertsatz (s. o.) wurde die Gleichung $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\vartheta h)$ $(0 < \vartheta < 1)$ erhalten. Diese kann verstanden werden als Approximation des Funktionswerts $f(a+h)$ durch den Wert eines Polynoms in $h$ vom Grad 0 (die Konstante $f(a)$) plus einen Rest- oder Fehlerterm vom Grad 1 in $h$. Verallgemeinerung zu Polynomen in $h$ vom Grad $n$ führt auf die **Taylor-Reihenentwicklung** von $f(x)$ an der Stelle $x = a$ (nach Brook Taylor, 1685–1731):

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(a, a+h)\,.$$

Das hier auftretende Polynom in $h$ vom Grad $n$ heisst **Taylor-Polynom** von $f(x)$ an der Stelle $a$. Durch wenige kleine Änderungen in der Notation ($x_0 = a$, $x = a + h$, $h = x - x_0$) kann man es auch als Polynom in $x$ vom Grad $n$ schreiben:

$$T_n(x_0, x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k\,, \qquad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\,.$$

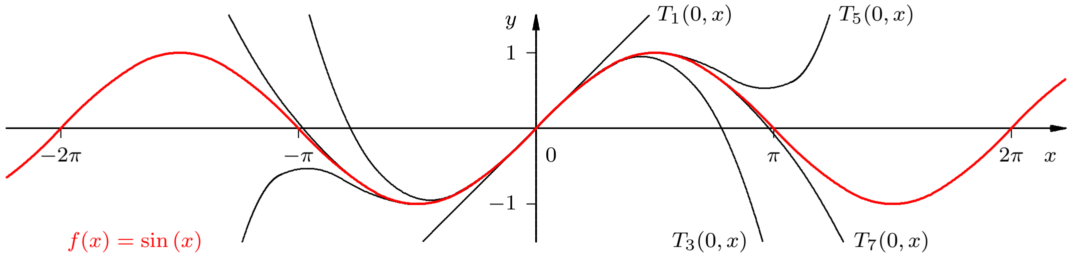
Die Taylor-Polynome von $f(x)$ an der Stelle $x_0$ vom Grad $n = 1$ und $n = 2$,

$$T_1(x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

$$T_2(x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2\,,$$

sind unter den Namen **Tangente** und **Schmiegeparabel** allgemein gut bekannt.

Schaubild der Funktion $f(x) = \sin(x)$ und einiger ihrer Taylor-Polynome $T_n(0, x)$:




Per Konstruktion stimmt das Taylor-Polynom $T_n(x_0, x)$ an der Stelle $x = x_0$ in allen Eigenschaften (Funktionswert und Ableitungen bis einschliesslich zur $n$-ten Ordnung) mit der Funktion $f(x)$, zu der es gehört, überein (s. obige Abbildung für $f(x) = \sin(x)$) — aber eben nur an dieser Stelle $x = x_0$! Bemerkenswert ist dabei, dass mit Zunahme des Grads $n$ der Taylor-Polynome diese die Funktion $f(x)$ in einer zunehmend ausgedehnteren Umgebung von $x_0$ (sehr) gut beschreiben.

Der Rest- oder Fehlerterm zum Taylor-Polynom $T_n(x_0, x)$ lässt sich schreiben als:

$$R_n(x_0, x) = f(x) - T_n(x_0, x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h)\,, \qquad h = x - x_0\,, \qquad 0 < \vartheta < 1\,.$$

Dies sieht fast so aus wie derjenige Term, welcher die Taylor-Polynome $T_{n+1}(x_0, x)$ und $T_n(x_0, x)$ voneinander unterscheidet:

$$T_{n+1}(x_0, x) - T_n(x_0, x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)\,.$$

Aber im Restterm zu $T_n(x_0, x)$ ist die $(n+1)$-te Ableitung an einer (in der Regel [noch] unbekannten) Stelle $x_0 + \vartheta h$ zu berechnen, nicht an der Stelle $x_0$!

Die Taylor-Reihenentwicklung der Funktion $f(x)$ um die Stelle $x = x_0$ bis einschliesslich zur Ordnung $n$ besteht also aus dem Taylor-Polynom vom Grad $n$ und dem zugehörigen Restterm:

$$f(x) = T_n(x_0, x) + R_n(x_0, x)\,.$$

Wenn die Resttermfolge $(R_n(x_0, x))$ für alle $x$ aus dem Intervall $x_0 - R < x < x_0 + R$ eine Nullfolge ist,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x_0, x) = 0 \qquad \text{für alle } |x - x_0| < R,$$

dann kann man den Übergang von den Polynomen (Grad $n$ ist endlich) zur unendlichen Reihe $(n \to \infty)$ ausführen. Die so entstehende Reihe ist die **Taylor-Reihe der Funktion $f(x)$ um die Stelle $x = x_0$** (mit Konvergenzradius $R$):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k\,, \qquad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\,, \qquad |x - x_0| < R \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \ldots \end{aligned}$$

*Taylor-Reihen bekannter Funktionen*

Die folgende Liste gibt die Taylor-Reihen um die Stelle $x_0 = 0$ (auch Maclaurin-Reihen genannt) für einige bekannte Funktionen $f(x)$ an, zusammen mit den jeweiligen Konvergenzbereichen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots \quad (x \in \mathbb{R}) \\
\cosh(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots \quad (x \in \mathbb{R}) \\
\sinh(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots \quad (x \in \mathbb{R}) \\
\cos(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \ldots \quad (x \in \mathbb{R}) \\
\sin(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \ldots \quad (x \in \mathbb{R}) \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots \quad (\text{geometrische Reihe, } |x| < 1) \\
-\ln(1-x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots \quad (-1 \le x < 1) \\
\ln(1+x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \mp \ldots \quad (-1 < x \le 1) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \ldots \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ |x| < 1)
\end{aligned}$$

**Anmerkungen: (1)** Die Reihe für die natürliche Exponentialfunktion $e^x$ ist sogar in der gesamten Gaussschen Zahlenebene gültig, der Konvergenzbereich für $e^z$ ist also $z \in \mathbb{C}$! — **(2)** Die zuletzt genannte Reihe, die sogenannte verallgemeinerte binomische Reihe (Isaac Newton, um 1660), enthält als Spezialfälle einerseits das Binomialtheorem (für $\alpha = n \in \mathbb{N}$, die unendliche Reihe bricht dann ab, und wird zu dem für alle $x \in \mathbb{R}$ definierten Polynom $(1+x)^n$) und andererseits die geometrische Reihe $1/(1-x)$ (man setze $\alpha = -1$ und ersetze $x$ durch $-x$).

Kleine Übungsaufgabe: Überzeugen Sie sich bei zwei dieser Reihen (davon eine die Reihe für $e^x$), dass sie tatsächlich aus der oben genannten allgemeinen Form der Taylor-Reihenentwicklung entstehen.

Beispiele zur Anwendung von Taylor-Reihen:

**(a)** Die Taylor-Reihe für $\ln(1+x)$ um $x_0 = 0$ ($-1 < x \le 1$) ergibt für $x = 1$

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \ldots$$

Dies ist eine bedingt konvergente alternierende Reihe („bedingt konvergent“ heisst, dass man beim Versuch, den Wert der Reihe zu berechnen, die Summanden der Reihe nicht umordnen darf, „alternierend“ bedeutet, dass aufeinanderfolgende Summanden mit wechselndem Vorzeichen beitragen), die so langsam konvergiert, dass sie zur Berechnung von $\ln(2)$ unbrauchbar ist. Diese Reihe taucht auf bei der Berechnung der elektrostatischen Energie je Ionenpaar $A^+{-}B^-$ in einer unendlichen alternierenden Kette einwertiger Ionen $(\ldots{-}A^+{-}B^-{-}A^+{-}B^-{-}\ldots)$. Zumindest formal kann der ideale dreidimensionale Kristall des aus diesen einwertigen Ionen aufgebauten Salzes AB dann aus solchen Ketten aufgebaut werden.

**(b)** Berechnung eines Näherungswertes für $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ mit Hilfe der Taylor-Reihe von $\sqrt{1+x}$ um $x_0 = 0$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} \pm \ldots \qquad (|x| < 1).$$

Aus

$$2 = \frac{50}{25} = \frac{49}{25} + \frac{1}{25} = \frac{49}{25}\left(1 + \frac{1}{49}\right) = \left(\frac{7}{5}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{49}\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} = \frac{7}{5}\sqrt{1 + \frac{1}{49}}$$

ergibt sich dann mit $x = 1/49$ und den ersten beiden Termen der Taylor-Reihe:

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{49} \mp \ldots\right) \approx \frac{99}{70} = \mathbf{1{,}4142}8571\ldots\,,$$

mit drei Termen:

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{49} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{49}\right)^2 \pm \ldots\right) \approx \frac{19403}{13720} = \mathbf{1{,}41421}282\ldots\,,$$

mit vier Termen:

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{49} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{49}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{49}\right)^3 \mp \ldots\right) \approx \frac{380299}{268912} = \mathbf{1{,}4142135}7\ldots\,.$$

**(c)** Kinetische Energie (Bewegungsenergie) eines Massenpunktes mit Masse $m$, der sich mit Geschwindigkeit $v$ bewegt, in der klassischen Mechanik (nicht-relativistisch):

$$E_{\text{kin, nrel}}(v) = \frac{1}{2}mv^2\,.$$

Kinetische Energie desselben Massenpunktes nach der Relativistätstheorie ($c$ Lichtgeschwindigkeit):

$$E_{\text{kin, rel}}(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - mc^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \ldots \qquad (v < c).$$

(Verwendung der Taylor-Reihe von $(1+x)^\alpha$ um $x_0 = 0$, mit $x = -(v/c)^2$ und $\alpha = -1/2$.) Der nicht-relativistische, alltagsrelevante Ausdruck $E_{\text{kin, nrel}}(v)$ ist also im relativistischen Ausdruck $E_{\text{kin, rel}}(v)$ enthalten. Die Relativitätstheorie erweitert die klassische Mechanik, ohne die zuvor bekannten Zusammenhänge ungültig zu machen (für $v \ll c$ bleiben die zuvor bekannten Beziehungen als sehr gute, praktische Näherungen weiter gültig). Als konstanten, auch bei $v = 0$ vorhandenen Beitrag zur Energie eines Körpers der Masse $m$ erhält man aus der Relativitätstheorie übrigens auch die sogenannte Ruhe-Energie $mc^2$.

Zusammenfassend lässt sich feststellen: Für alle $x$ innerhalb des Konvergenzradius $R$ der Taylor-Reihe von $f(x)$ um die Stelle $x = x_0$ ermöglicht diese Reihe die Berechnung eines Näherungswertes für $f(x)$ mit jeder gewünschten Genauigkeit allein durch Auswertung von Teilsummen der Reihe, den Taylor-Polynomen (d. h. Anwendung von nichts weiter als Addition und Multiplikation, denn diese genügen ja zur Berechnung eines Funktionswertes bei Polynomen). Höhere Genauigkeitsansprüche erfordern ggf. die Berechnung weiterer Terme aus der Reihe (was zu Funktionswerten von Taylor-Polynomen höheren Grades führt). Dazu müssen nur alle benötigten Ableitungen $f^{(k)}(x_0)$ bekannt sein. Mit dem inzwischen bekannten vollständigen Satz von Ableitungsregeln ist das erfreulicherweise gar kein Problem mehr.

## Elemente der Kurvendiskussion

Gegeben sei eine mehrfach differenzierbare Funktion $f(x)$. Die Kurvendiskussion umfasst dann in der Regel folgende, hier nur stichwortartig benannten Aufgaben:

- Berechnung von $f'(x)$ und $f''(x)$, evtl. auch noch $f'''(x)$.

Untersuchung einiger Eigenschaften der Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$:

- Achsenschnittpunkte von $f(x)$?
  $\rightsquigarrow$ Funktionswert $f(0)$, Nullstellen (Lösungen von $f(x) = 0$).
  Vorzeichenverlauf von $f(x)$ zwischen den Nullstellen?
  Ableitung $f'(x)$ an den Nullstellen (Steigung von $f(x)$ dort).

- Stationäre Punkte von $f(x)$ (Lösungen von $f'(x) = 0$)?
  $\rightsquigarrow$ Extrema (Hoch- und Tiefpunkte), Wendepunkte mit horizontaler Tangente.
  Meist hinreichende Bedingung für Hochpunkt (Tiefpunkt) bei $x = a$:
  $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$ ($f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$).
  (Falls $f''(a) = 0$, wie bei $x^4$ an der Stelle $x = 0$: $f^{(k)}(x)$ mit $k > 2$ untersuchen!)
  Vorzeichenverlauf von $f'(x)$ zwischen den stationären Punkten?
  $\rightsquigarrow$ Bereiche strenger Monotonie von $f(x)$.
  $f'(x) > 0$: $f(x)$ steigt bei Zunahme von $x$;
  $f'(x) < 0$: $f(x)$ fällt bei Zunahme von $x$.

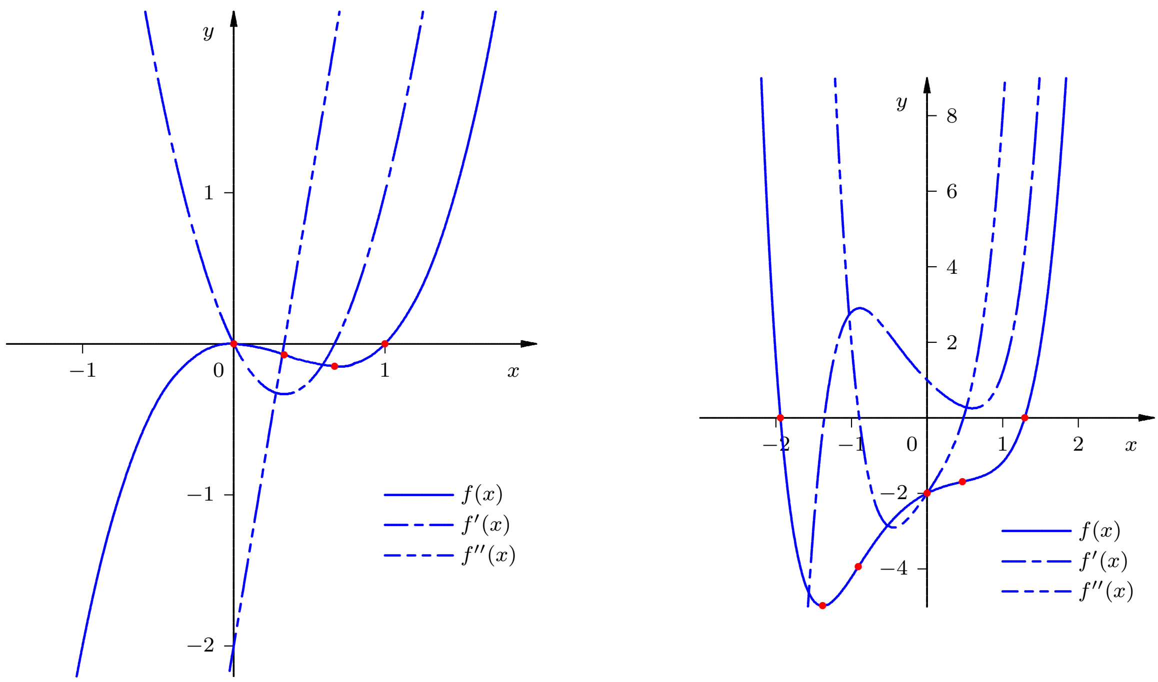
- Wendepunkte von $f(x)$ (notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$)?
  Meist hinreichende Bedingung für Wendepunkt bei $x = a$:
  $f''(a) = 0$ und $f'''(a) \neq 0$.
  (Falls $f'''(a) = 0$, wie bei $x^5$ an der Stelle $x = 0$: $f^{(k)}(x)$ mit $k > 3$ untersuchen!)
  Ableitung $f'(x)$ an den Wendepunkten (Steigung von $f(x)$ dort).

Abschliessend (oder zusammenfassend): Angabe des Definitions- und des Wertebereiches von $f$ (evtl. ebenso von $f'$, $f''$, etc.).

**Achtung!** Es gibt bei einer Kurvendiskussion keine festgelegte Reihenfolge für das Durchführen der genannten Aufgaben. Ausserdem können weitere, oben nicht genannte spezielle Aufgaben dazu kommen, falls erforderlich.

Kleine Übungsaufgabe: Ermitteln Sie die Extrema und die Wendepunkte der Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = x^3 - x^2$ (s. folgende Abbildung).

Schaubilder von zwei ganzrationalen Funktionen (Polynomen) und ihren ersten beiden Ableitungen (spezielle Punkte, wie Achsenschnittpunkte, Extrema und Wendepunkte, wurden jeweils markiert):




(a) $f(x) = x^3 - x^2$

(b) $f(x) = -2 + x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{5}x^6$