

## 7. Teil: Differentialrechnung

### Differenzierbarkeit und Differentiation

*Definition:* Sei  $f(x)$  eine für  $x \in [a, b] \subseteq D_f$  stetige Funktion. Dann heisst die für  $x \in (a, b)$  durch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{oder} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad \text{oder} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

definierte und mit  $f'(x)$  oder  $\frac{df}{dx}$  (lies: „df nach dx“) bezeichnete Funktion die **erste Ableitung** von  $f(x)$ , falls dieser Grenzwert für alle  $x \in (a, b)$  existiert. Ist dies der Fall, so heisst  $f(x)$  in  $(a, b)$  **differenzierbar** (ableitbar).  $\square$

Diese Art von Grenzwertberechnung lässt sich wiederholen, und führt dann zu **höheren Ableitungen**:

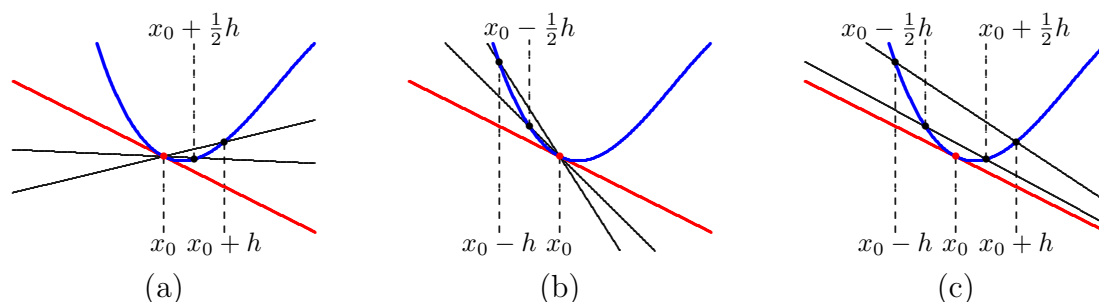
$$\text{Zweite Ableitung: } f''(x) = (f'(x))'; \text{ andere Schreibweisen: } f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right).$$

$$n\text{-te Ableitung: } f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \frac{d^n f}{dx^n} = \left( \frac{d}{dx} \right)^n f(x) \quad (n \in \mathbb{N}, n > 0).$$

Der Ausdruck  $\frac{d}{dx}$  heisst **Differentialoperator** (oder, noch genauer, der Operator für die Differentiation nach  $x$ ). Zur Berechnung höherer Ableitungen  $f^{(n)}(x)$  ( $n > 1$ ) ist dieser Operator mehrfach auf  $f(x)$  anzuwenden — was leicht fällt, wenn man verstanden hat, (i) dass es hierfür einen vollständigen Satz von Regeln gibt, und (ii) wie diese Regeln funktionieren (Details s. unten).

**Anmerkung:** Die Funktion  $f(x)$  selbst kann man als die nullte Ableitung auffassen.

Der Fachbegriff für das Berechnen einer Ableitung ist **Differentiation**. Mit  $\Delta x = h$  ist der Quotient  $(f(x + \Delta x) - f(x))/\Delta x = \Delta f/\Delta x$ , dessen Grenzwert für  $\Delta x \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ) betrachtet werden soll (s. o.), als Quotient von Differenzen, kurz: **Differenzenquotient**, erkennbar. Der Ausdruck  $df/dx$ , eine alternative Notation für die erste Ableitung (s. o.), heisst dagegen **Differentialquotient**, denn die im Zähler und im Nenner stehenden Ausdrücke  $df$  und  $dx$  heissen Differentiale. Die oben gegebene Definition sagt also ganz einfach, dass der *Differentialquotient* als Grenzwert eines *Differenzenquotienten* definiert ist. Da mit  $\Delta x = h \rightarrow 0$  auch stets  $\Delta f = f(x + h) - f(x) \rightarrow 0$  geht, streben Zähler und Nenner des Differenzenquotienten beide gegen Null und es liegt ein sogenannter „unbestimmter Ausdruck“ vor (hier: von der Form „0/0“). Der Differenzenquotient (das Verhältnis der beiden Differenzen  $\Delta f$  und  $\Delta x$ ) kann aber beliebige reelle Werte haben, und auch im Grenzfall  $\Delta x \rightarrow 0$  definiert sein und einen sinnvollen reellen Wert annehmen.



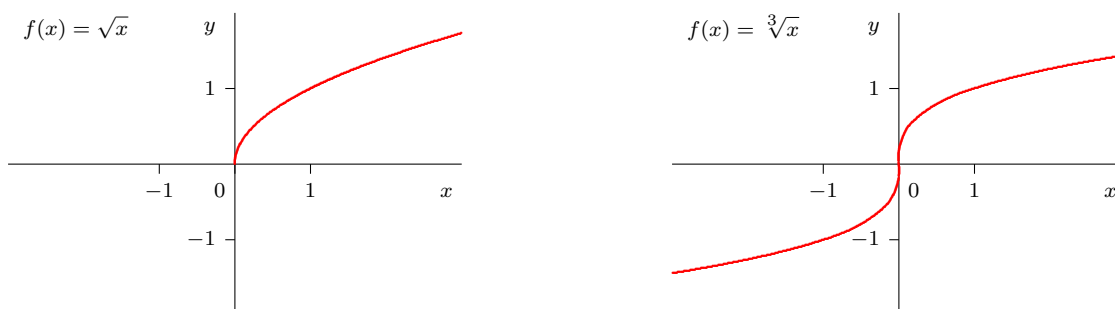
**Geometrische Bedeutung der ersten Ableitung** (s. obige Abbildung): Ein Differenzenquotient (beachte: unbestimmter Artikel), wie z. B.  $\Delta f/\Delta x$ , der aus Funktionswerten an zwei Stellen  $x_0$  und  $x_1 = x_0 + \Delta x$  ( $\Delta x \neq 0$ ) berechnet wird, gibt die Steigung einer Sekanten durch

den Punkt  $P(x_0, y_0)$  an ( $y_0 = f(x_0)$ ). Der Differentialquotient (beachte: bestimmter Artikel),  $f'(x) = df/dx$ , der an der Stelle  $x_0$  berechnet wird (das ergibt  $f'(x_0) = df/dx|_{x_0}$ ), gibt die Steigung der Tangente an  $f(x)$  an dieser Stelle  $x_0$  an. Dies ist — definitionsgemäss — auch die Steigung von  $f(x)$  selbst an der Stelle  $x_0$ . Die obige Abbildung zeigt die Situation für eine Funktion  $f(x)$  (in blau) bei Verwendung von Vorwärtsdifferenzen in (a), bei Verwendung von Rückwärtsdifferenzen in (b), und bei Verwendung des Mittelwertes aus Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen in (c). Die Tangente an der Stelle  $x_0$  ist in rot, zwei jeweils passende Sekanten sind in schwarz gezeichnet.

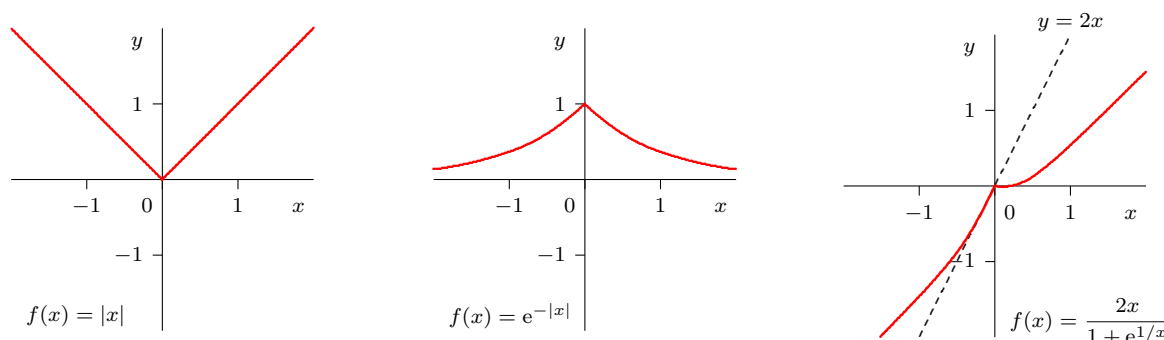
Die Gleichung der Tangente an der Stelle  $x_0$  ist  $t(x) = m_t x + b_t$ , mit Tangenten-Steigung  $m_t = f'(x_0)$  und Tangenten-Achsenabschnitt  $t(0) = b_t = y_0 - m_t x_0 = f(x_0) - f'(x_0) x_0$ . In der Umgebung der Stelle  $x_0$  kann die Funktion  $f(x)$  dann näherungsweise durch ihre Tangente beschrieben werden:  $f(x) \approx t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

**Frage:** Um differenzierbar zu sein, muss eine Funktion  $f(x)$  stetig sein (s. Definition). Gibt es denn stetige Funktionen  $f(x)$ , die an bestimmten Stellen  $x = a$  nicht differenzierbar sind? Ja, gibt es! An diesen Stellen existiert die Ableitung  $f'(a)$  nicht. Das kann verschiedene Gründe haben:

- Bei den beiden Funktionen  $\sqrt{x} = x^{1/2}$  ( $x \geq 0$ ) und  $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) strebt  $f'(x)$  gegen  $+\infty$ , wenn man sich der Stelle  $x = 0$  nähert (an der Stelle  $x = 0$  ist die Steigung unendlich gross, die Tangente — die  $y$ -Achse — verläuft vertikal):



- Jede der drei Funktionen  $|x| = \sqrt{x^2}$ ,  $e^{-|x|}$  und  $2x/(1 + e^{1/x})$  (alle stetig in  $\mathbb{R}$ ) hat an der Stelle  $x = 0$  einen „Knick“ oder eine „Spitze“ (linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert von  $f'(x)$  bei Annäherung an  $x = 0$  sind verschieden):



Es gibt sogar Funktionen, die in einem Intervall stetig, aber an keinem Punkt in dem Intervall differenzierbar sind!

**Differentiation im Alltag:** Von der Vielzahl an Beispielen aus dem Alltag, bei denen es um die Betrachtung der (Ver-)Änderung einer Grösse geht (Zunahme oder Abnahme), sei nur eines erwähnt: Bei der Bewegung eines Körpers entlang seiner Bahnkurve (Trajektorie) ändert sich die Position  $s$  mit der Zeit:  $s(t)$  (d. h., die Position  $s$  ist eine Funktion der Zeit  $t$ ). Dann bedeutet ein

*Differenzenquotient*  $\Delta s/\Delta t = \bar{v}$  eine mittlere Geschwindigkeit, der *Differentialquotient*  $\dot{s}(t) = ds/dt = v(t)$  dagegen die Momentangeschwindigkeit (Ableitungen nach der Zeit werden in der Physik mit einem Punkt statt mit einem Strich notiert). Nochmalige Differentiation liefert die Momentanbeschleunigung  $a(t) = \dot{v}(t) = dv/dt = \ddot{s}(t) = (d/dt)^2 s(t) = d^2 s/dt^2$ . Diese ist also die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit. Die SI-Einheiten der hier auftretenden Größen sind:  $[t] = \text{s}$ ,  $[s] = \text{m}$ ,  $[v] = \text{m/s}$ ,  $[a] = \text{m/s}^2$  (die Einheiten von Größen, die durch Differentiation erhalten werden, wie Geschwindigkeit oder Beschleunigung, ergeben sich aus den Einheiten der im Zähler und Nenner des *Differentialquotienten* auftretenden Größen nach den bekannten Regeln der Bruchrechnung).

## Die Berechnung von Ableitungen

Berechnung der ersten Ableitung der Normalparabel  $f(x) = x^2$  mit Hilfe der Definition („Die Ableitung [ $\equiv$  der Differentialquotient] ist der Grenzwert eines Differenzenquotienten“):

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h \\ f'(x) &= \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x\end{aligned}$$

Die Funktion  $f'(x) = 2x$  gibt also zu jedem  $x$  die Antwort auf die Frage, welche Steigung die Funktion  $f(x) = x^2$  dort hat:

- Bei  $x_0 = -1$  hat die Funktion  $f(x) = x^2$  den positiven Funktionswert  $f(-1) = (-1)^2 = +1$  und die Steigung  $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$ . Die Funktion  $x^2$  fällt also in der Umgebung dieser Stelle, ihre Tangente dort ist  $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 - 2(x + 1) = -2x - 1$  (eine fallende Gerade);
- Bei  $x_0 = 0$  hat sie den Funktionswert  $f(0) = (0)^2 = 0$  und die Steigung  $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$ . Die Funktion  $x^2$  ändert sich in der Umgebung von  $x_0 = 0$  nur sehr wenig, ihre Tangente dort ist  $t(x) = 0 + 0(x - 0) = 0$  (das ist die  $x$ -Achse);
- Bei  $x_0 = 2$  hat sie den positiven Funktionswert  $f(2) = (2)^2 = 4$  und die Steigung  $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ . Die Funktion  $x^2$  steigt also in der Umgebung von  $x_0 = 2$ , ihre Tangente dort ist  $t(x) = 4 + 4(x - 2) = 4x - 4$  (eine steigende Gerade).

**Zur Beachtung:** Für nach oben oder unten verschobene Normalparabeln,  $f(x) = x^2 + C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ), wird dieselbe Ableitung, nämlich  $f'(x) = 2x$ , erhalten! Das ist selbstverständlich, wenn man sich (a) die geometrische Bedeutung der Ableitung in Erinnerung ruft, und (b) die Definition des Zählerterms im Differenzenquotienten ansieht (bei der Differenzbildung fällt die Konstante  $C$  wieder heraus).

Obwohl die Verwendung der Definition von  $f'(x)$  einen allgemeinen Weg zur Berechnung der Ableitung bietet, wird dies für Funktionen  $f(x)$ , die etwas komplizierter sind, schnell sehr mühsam. Erfreulicherweise gibt es einen vollständigen(!) Satz allgemeiner Regeln zur Berechnung der Ableitung  $f'(x)$  zu gegebener Funktion  $f(x)$ . Das heisst, dass mit Kenntnis der Definition der Ableitung und dieser allgemeinen Regeln, ggf. ergänzt durch eine kleine Liste der Ableitungen elementarer Funktionen, recht rasch *jede* differenzierbare (oder ableitbare) Funktion tatsächlich abgeleitet werden kann! Das können Sie also bald auch!

Allgemeine Differentiationsregeln

**(1) Linearität<sup>6</sup>:** Die Ableitung einer „gewichteten Summe von Funktionen“ (fachsprachlich: einer Linearkombination von Funktionen) ist die entsprechend gewichtete Summe der Ableitungen dieser Funktionen ( $\alpha, \beta$  sind Konstanten):

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

*Spezialfälle:*  $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$  (Faktorregel);  $(\alpha)' = 0$ .

Diese Regel löst das Problem, wie das Berechnen einer Ableitung zusammen mit dem Auftreten der Grundrechenoperationen Addition und Subtraktion auszuführen ist.

**(2) Produktregel:** Die Ableitung eines Produktes  $u(x) = f(x) g(x)$  ist *nicht* das Produkt der Ableitungen der einzelnen Faktoren, sondern:

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x).$$

Durch Umstellen dieses Ergebnisses (für  $f'(x)$  zu  $f(x) = u(x)/g(x)$ ) folgt die **Quotientenregel**:

$$\left(\frac{u(x)}{g(x)}\right)' = \frac{u'(x) g(x) - u(x) g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

*Spezialfall:*  $([g(x)]^{-1})' = (1/g(x))' = -g'(x)/[g(x)]^2$  (Ableitung des Kehrwerts von  $g(x)$  bei Kenntnis der Ableitung von  $g(x)$ ).

Produkt- und Quotientenregel lösen das Problem, wie das Berechnen einer Ableitung zusammen mit dem Auftreten der Grundrechenoperationen Multiplikation und Division auszuführen ist.

Kleine Übungsaufgabe: Was ist die Ableitung  $f'(x)$  von  $f(x) = p(x) q(x) r(x)$ ?

**(3) Kettenregel:** Die Ableitung einer verketteten Funktion  $f(g(x))$  ist:

$$(f(g(x)))' = \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}.$$

Der Faktor  $df/dg$  heisst auch „äussere Ableitung“ (weil die „äussere“ Funktion  $f$  abzuleiten ist, allerdings nach  $g$ , nicht nach  $x$ ), und der Faktor  $dg/dx$  heisst „innere Ableitung“ (weil die „innere“ Funktion  $g$  abzuleiten ist, nach  $x$ ). Hier wird deutlich, dass die Notation mit Differentialen der (Schul-)Notation mit dem Strich vorzuziehen ist (die Strich-Notation sagt nicht genau genug, nach welcher Variablen abgeleitet werden soll).

*Spezialfall:* Es sei  $g = f^{-1}$  die Umkehrfunktion (inverse Funktion, inverse Operation) zu einer Funktion (Operation)  $f$ . Gesucht wird die Ableitung  $y' = dy/dx$  von  $y = g(x) = f^{-1}(x)$ . Aus der Umkehrung dazu,  $x = f(y) = f(g(x)) = f(f^{-1}(x))$ , folgt:

$$1 = (x)' = (f(f^{-1}(x)))' = \frac{df}{df^{-1}} \frac{df^{-1}}{dx} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}.$$

Die Ableitung  $y' = dy/dx$  von  $y = f^{-1}(x)$  ergibt sich also als Kehrwert der Ableitung von  $x = f(y)$  nach  $y$ ,  $dx/dy$ . Die anschliessende Substitution  $y = f^{-1}(x)$  liefert einen von  $x$  abhängigen Ausdruck als Endergebnis.

Kleine Übungsaufgabe: Was ist die Ableitung  $f'(x)$  von  $f(x) = p(q(r(x)))$ ?

<sup>6</sup> Differentiation ist, wie Integration, eine sogenannte lineare Operation. Solche Operationen werden auf eine Summe von Termen einfach so angewandt, dass jeder einzelne Summand „bearbeitet“ wird. „Quadrieren“ ist *keine* lineare Operation, s. die binomische Formel  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2$  (dennoch wird in fast jeder Klausur dieser letzte Ausdruck immer wieder von einigen Klausurteilnehmerinnen und -teilnehmern verwendet um  $(a+b)^2$  zu „vereinfachen“, mit dem unbefriedigenden Ergebnis des völligen Punkteverlustes bei der entsprechenden Aufgabe).

Tabellen mit den Ableitungen elementarer Funktionen finden sich in jeder (Schul-)Formelsammlung. Hier ist eine kleine Übersicht:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n$ ( $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ )	$nx^{n-1}$	$e^x$	$e^x$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$x^{-n}$ ( $x \neq 0, n \in \mathbb{N}$ )	$-nx^{-(n+1)}$	$b^x$	$(\ln(b))b^x$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$x^s$ ( $x > 0, s \in \mathbb{R}$ )	$sx^{s-1}$	$\ln x $ ( $x \neq 0$ )	$1/x$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\sqrt{x}$ ( $x \geq 0$ )	$1/(2\sqrt{x})$ ( $x > 0$ )	$\log_b x $ ( $x \neq 0$ )	$1/(x \ln(b))$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$

**Beachtenswert:** Die natürliche Exponentialfunktion  $e^x = \exp(x)$  ist *invariant* (unveränderlich) unter Differentiation nach  $x$ ! Sie reproduziert sich dabei einfach selbst:

$$(e^x)' = e^x.$$

Zu  $x = f(y) = e^y$  gehört dann also die Ableitung  $dx/dy = e^y$ . Damit folgt aber für die Ableitung der Funktion  $y = \ln(x)$  ( $x > 0$ ) sofort  $y' = dy/dx = (dx/dy)^{-1} = (d(e^y)/dy)^{-1} = (e^y)^{-1} = (e^{\ln(x)})^{-1} = (x)^{-1} = 1/x$ . Kombination mit dem Ergebnis einer analogen Betrachtung bei  $y = \ln(-x)$  ( $x < 0$ ) führt dann zu dem in der obigen Tabelle gemachten Eintrag  $(\ln|x|)' = 1/x$  ( $x \neq 0$ ).

Kleine Übungsaufgabe: Berechnen Sie die Ableitungen  $y'$  von (1)  $y = \tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$  und (2)  $y = \arctan(x)$ .

Einige weitere Beispiele zur Anwendung der o. g. Ableitungsregeln:

- (1)  $f(x) = x^2, f'(x) = \frac{df}{dx} = 2x, f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = 2$   
(verwendete Regeln:  $(x^n)' = nx^{n-1}, (\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$ )
- (2)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = (x^2 - 1)^{-1}, f'(x) = \frac{df}{dx} = (-1)(x^2 - 1)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2},$   
 $f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{2 \cdot (x^2 - 1)^2 - 2x \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} = -\frac{2x^2 - 2 - 8x^2}{(x^2 - 1)^3} = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$   
(verwendete Regeln:  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , Kettenregel, Quotientenregel)
- (3)  $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$   
 $f'(x) = (\sinh(x))' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x),$   
 $f''(x) = (\cosh(x))' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x) = f(x)$   
(verwendete Regeln: Linearität, Kettenregel)

**Historische Anmerkung zu Differentiation (und Integration):** Die Grundlagen der modernen Differential- und Integralrechnung (zusammengefasst auch als Infinitesimalrechnung bezeichnet) wurden in der zweiten Hälfte des 17. Jhdts. von Isaac Newton (1643–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) gelegt, und zwar unabhängig voneinander. Seit dieser Zeit, also seit über 300 Jahren, sind die oben angegebenen allgemeinen Regeln zur Berechnung von Ableitungen fester Bestandteil des „Grundwortschatzes“ für ein tieferes Verständnis der Welt (soweit wir uns anmassen dürfen, überhaupt von „Verständnis“ zu sprechen): sehr viele „Naturgesetze“ lassen sich als Gleichungen formulieren, in denen Ableitungen auftreten. Solche Gleichungen heissen Differentialgleichungen. Beispiele hierfür sind das Newtonsche Kraftgesetz (klassische Mechanik), die Schrödingergleichung (Quantenmechanik), die Maxwellschen Gleichungen (Elektrodynamik). — Seit wann gehört dieses Wissen über die Ableitungsregeln zu Ihrem persönlichen „Grundwortschatz“ in der Sprache Mathematik?