

## 6. Teil: Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$ , Wurzeln in $\mathbb{C}$ , Stetigkeit

### Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$

#### Polarkoordinaten in der Ebene

Bereits im 4. Teil wurde erwähnt, dass die Lage eines Punktes  $P$  in der Ebene entweder durch seine kartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$  ( $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ) oder durch seinen Abstand  $r$  vom Ursprung ( $r \geq 0$ ) und den Winkel  $\alpha$  zwischen der Richtung zum Punkt und einer Bezugsrichtung (üblicherweise die positive  $x$ -Halbachse) angegeben werden kann ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ ). Es gelten dann die Beziehungen

$$\begin{aligned}(r, \alpha) &\mapsto (x, y): & x &= r \cos(\alpha), & y &= r \sin(\alpha) \\ (x, y) &\mapsto (r, \alpha): & r &= +\sqrt{x^2 + y^2}, & \tan(\alpha) &= \frac{y}{x}, & \cot(\alpha) &= \frac{x}{y}\end{aligned}$$

und das Zahlenpaar  $(r, \alpha)$  (**ebene Polarkoordinaten**) ist gleichwertig zum Zahlenpaar  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  (**kartesische Koordinaten**). **Aber Vorsicht!** Wegen der Periodizität der Kreisfunktionen ist der Winkel nur bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  festgelegt: Die Polarkoordinaten  $(r, \alpha)$  sind äquivalent zu  $(r, \alpha + 2k\pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )! Klar, denn durch eine beliebige Zahl voller Umdrehungen (im oder gegen den Uhrzeigersinn) um den Ursprung ändert sich ja gar nichts an der Lage eines Punktes in der Ebene.

**Anmerkung:** Polarkoordinaten lassen sich in Räumen beliebig hoher endlicher Dimension  $D > 1$  definieren. Es gibt immer einen Radius  $r$  (Abstand zum Ursprung des Koordinatensystems) und  $D - 1$  Winkel. Im dreidimensionalen Fall ( $D = 3$ ) treten also zwei Winkel auf. In der Mathematik sind diese beiden Winkel als Poldistanz(winkel)  $\vartheta$  und Azimut(winkel)  $\varphi$  bekannt ( $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  oder  $-\pi \leq \varphi < \pi$ ), in der Geographie, der Geodäsie und der Navigation verwendet man stattdessen die geographische Breite  $\beta$  (nördl. / südl. vom Äquator,  $+90^\circ \geq \beta \geq -90^\circ$ ) und die geographische Länge  $\lambda$  (westl. / östl. vom Nullmeridian,  $-180^\circ \leq \lambda < +180^\circ$ ). Dreidimensionale Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) sind immer dann sehr nützlich, wenn die zu untersuchenden Systeme Kugelsymmetrie besitzen. Das Wasserstoffatom (oder, allgemeiner, das Ein-Elektronen-Atom:  $\text{H}$ ,  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{2+}$ ,  $\dots$ ,  $\text{U}^{91+}$ ,  $\dots$ ) ist solch ein System. Dessen aus der Quantenmechanik bekannte Schrödingergleichung ist in Kugelkoordinaten geschlossen lösbar (s. Vorlesung Quantenchemie). Der von den Winkelkoordinaten abhängige Teil der Lösung legt den Drehimpuls des Systems fest (soweit dies im Rahmen der Quantenmechanik noch möglich ist) und hängt von den Drehimpuls-Quantenzahlen  $l$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) und  $m_l$  ( $-l \leq m_l \leq +l$ ) ab. Im Ein-Elektronen-Atom mit punktförmigem Kern der Ladung  $+Ze$  tritt  $l$ -Entartung auf, d. h. dass Zustände zur selben Hauptquantenzahl  $n$ , aber mit verschiedener Drehimpulsquantenzahl  $l$  ( $0 \leq l < n$ ), dieselbe Energie  $E_n/E_h = -Z^2/(2n^2)$  haben ( $E_h = e^2/(4\pi\epsilon_0 a_0) \approx 27,2 \text{ eV} \approx 4,36 \text{ aJ}$ ). Im Mehr-Elektronen-Atom gibt es diese  $l$ -Entartung nicht mehr (dort haben, z. B. beim Kohlenstoff-Atom, die  $2p$ -Orbitale [ $n = 2$ ,  $l = 1$ ] stets eine andere Orbitalenergie als das  $2s$ -Orbital [ $n = 2$ ,  $l = 0$ ]).

#### Trigonometrische Form komplexer Zahlen und Euler-Formel

Anwendung der ebenen Polarkoordinaten in der Gaußschen Zahlenebene führt zur trigonometrischen Form der komplexen Zahlen:

$$z = x + iy = r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi) = r [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)], \quad \varphi = \varphi_0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Die zugehörige konjugiert komplexe Zahl ist

$$z^* = x - iy = r \cos(\varphi) - ir \sin(\varphi) = r \cos(-\varphi) + ir \sin(-\varphi).$$

(denn die Kosinusfunktion ist gerade, und die Sinusfunktion ist ungerade).

Betrag von  $z$ :

$$\begin{aligned} |z| &= +\sqrt{z \cdot z^*} = (r^2(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))(\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)))^{1/2} \\ &= r(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))^{1/2} \\ &= r = |z^*| \end{aligned}$$

Von besonderem Interesse ist jetzt die Multiplikation von zwei komplexen Zahlen (für die Addition zweier komplexer Zahlen bietet die trigonometrische Form keine Vorteile):

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 [\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)] \cdot r_2 [\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + i \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + i \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

(im letzten Schritt wurde von den Additionstheoremen der Kreisfunktionen Gebrauch gemacht).

**Frage:** Was ergibt sich nun für  $z^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )?

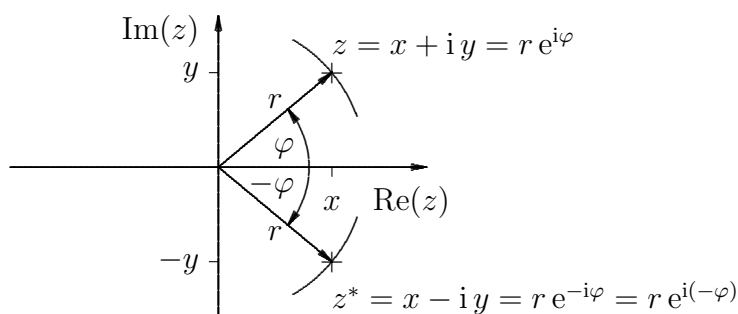
Man erkennt nun, dass Multiplikation in  $\mathbb{C}$  eine Drehstreckung, Drehstauchung oder evtl. auch bloss eine Drehung bedeutet: Die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der beiden Faktoren werden addiert (dies bedeutet „Drehung“ des einen Faktors um den Winkel, den der andere Faktor angibt), die Beträge  $r_1$  und  $r_2$  werden miteinander multipliziert (dies entscheidet, ob mit der Drehung auch eine Streckung oder Stauchung verbunden ist).

Wichtige Beobachtung: Bei der Multiplikation in  $\mathbb{C}$  unter Verwendung der trigonometrischen Form der komplexen Zahlen werden die Winkel addiert. Dies ist ähnlich wie bei den Potenzrechengesetzen: bei der Multiplikation von zwei Zahlen, die als Potenzen zur selben Basiszahl  $b$  geschrieben sind, braucht man nur die Exponenten zu addieren, um das Ergebnis der Multiplikation in gleicher Gestalt, als Potenz von  $b$ , zu bekommen ( $b^s \cdot b^t = b^{s+t}$ ).

Gibt es eine Schreibweise für komplexe Zahlen, die diese bequeme Form des Multiplizierens (nämlich nach den Regeln der Potenzrechnung) auch in  $\mathbb{C}$  gestattet, und zwar für die vom Winkel abhängigen Teile?

Seit über 250 Jahren ist bekannt, dass die Antwort auf diese Frage „Ja“ lautet: Die trigonometrische Form einer komplexen Zahl lässt sich mit Hilfe der Exponentialfunktion noch kompakter fassen (s. auch folgende Abbildung):

$$z = x + iy = r [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] = r e^{i\varphi}, \quad \varphi = \varphi_0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



Damit werden Multiplikation und Division in  $\mathbb{C}$  jetzt geradezu zu einem „Kinderspiel“, denn

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot \frac{1}{r_2} e^{-i\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Zentrales Element dieser neuen Schreibweise für komplexe Zahlen ist die **Euler-Formel** (1748, nach Leonhard Euler, 1707–1783):

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi).$$

Als Spezialfall für  $\varphi = \pi$  ( $\cos(\pi) = -1$ ,  $\sin(\pi) = 0$ ) folgt hieraus, über  $e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0 = -1$  — auf Deutsch: „Wenn ich mich umdrehe, dann schaue ich in die Gegenrichtung“ (denn Multiplikation einer komplexen Zahl mit  $e^{i\varphi}$  bedeutet ja nichts weiter als ihre Drehung um den Winkel  $\varphi$  um den Ursprung, also für den Winkel  $\varphi = \pi$  eben die Hälfte einer vollen Drehung) —, die spezielle Beziehung<sup>5</sup>

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Hier sind die Null (das neutrale Element der Addition), die Eins (das neutrale Element der Multiplikation), die imaginäre Einheit  $i$  und die beiden transzendenten Zahlen  $e$  und  $\pi$  in bemerkenswerter Weise miteinander verknüpft.

Aus der Euler-Formel folgen auch – durch Zerlegen in Real- und Imaginärteil – die Beziehungen

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = \operatorname{Im}(e^{i\varphi}), \quad \cos(\varphi) = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \operatorname{Re}(e^{i\varphi}).$$

Ausserdem gelingt nun auch die Erweiterung des Definitionsbereiches der Exponentialfunktion von der reellen Achse ( $e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ) auf die gesamte Gaussche Zahlenebene ( $e^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ):

$$w = f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y).$$

Dies ist ein Beispiel für eine im allgemeinen komplexwertige Funktion einer komplexen Variablen,  $f: z = x + iy \in \mathbb{C} \mapsto w = f(z) = u + iv \in \mathbb{C}$ . Die Real- und Imaginärteile der Funktionswerte  $w$  sind reellwertige Funktionen von **zwei** reellen Variablen:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos(y), \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin(y).$$

Eine weitere wichtige Konsequenz ist, dass sämtliche Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktionen,  $\sin(\varphi)$  und  $\cos(\varphi)$ , jetzt aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion  $e^z$ ,  $z = i\varphi \in \mathbb{C}$ , — und damit aus den Potenzrechengesetzen — folgen. Beispielsweise sind die Additionstheoreme für die Sinus- und Kosinusfunktionen (s. 4. Teil) jetzt einfach die Konsequenz der einfachen Gleichung  $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$  (und der inzwischen hinlänglich bekannten Symmetrie-Eigenschaften von  $\sin$  und  $\cos$ , wenn  $\beta$  durch  $-\beta$  ersetzt wird).

**Anmerkung:** In der kartesischen Form  $z = x + iy$  sind die beiden „Bestimmungstücke“ einer komplexen Zahl, ihr Realteil  $\operatorname{Re}(z) = x$  und ihr Imaginärteil  $\operatorname{Im}(z) = y$ , *additiv* verknüpft. Dagegen werden die beiden „Bestimmungstücke“ der trigonometrischen Form und der Euler-Form einer komplexen Zahl, das sind ihr Betrag (Abstand vom Ursprung)  $|z| = r$  und ihr (Phasen-)Winkel  $\varphi$ , in *multiplikativer* Weise miteinander verknüpft. Dies lässt sich nutzen, um mit komplexen Zahlen vorteilhaft zu rechnen (Addition/Subtraktion lassen sich mit der kartesischen Form gut ausführen, Multiplikation/Division dagegen am besten mit der Euler-Form).

## Wurzeln in $\mathbb{C}$

Mit Hilfe der Euler-Formel gelingt jetzt auch das Berechnen von Wurzeln in  $\mathbb{C}$  relativ leicht (da es auf die bekannten Multiplikations- und Potenzrechengesetze zurückgreift). Dabei stellt sich heraus, dass die Unbestimmtheit des (Phasen-)Winkels einer komplexen Zahl — oder: die Periodizität von  $e^z$  ( $e^{z+kp} = e^z$ , mit Periode  $p = i2\pi$ ) — eine wichtige Konsequenz hat, nämlich: Die Gleichung

$$z^n = w = r e^{i\varphi}, \quad \varphi = \varphi_0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

<sup>5</sup> Diese Beziehung wurde einmal zum „schönsten mathematischen Theorem“ gewählt (D. Wells, *Mathematical Intelligencer* **12** (3) (1990) 37).

hat in  $\mathbb{C}$  stets genau  $n$  verschiedene Lösungen! Es sind dies die Zahlen

$$z_{k+1} = r^{1/n} \exp \left( i \left( \frac{\varphi_0}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

die — ab  $n = 3$  — die Ecken eines regelmässigen  $n$ -Ecks in der Gaußschen Zahlenebene bilden: Ein (erster) Eckpunkt ist  $z_1 = \sqrt[n]{r} \exp(i\varphi_0/n)$ . Alle weiteren Eckpunkte entstehen daraus durch ein- oder mehrfache Multiplikation mit  $e^{i2\pi/n}$ , d. h. durch Drehung von  $z_1$  um  $2\pi/n$  oder Vielfache davon.

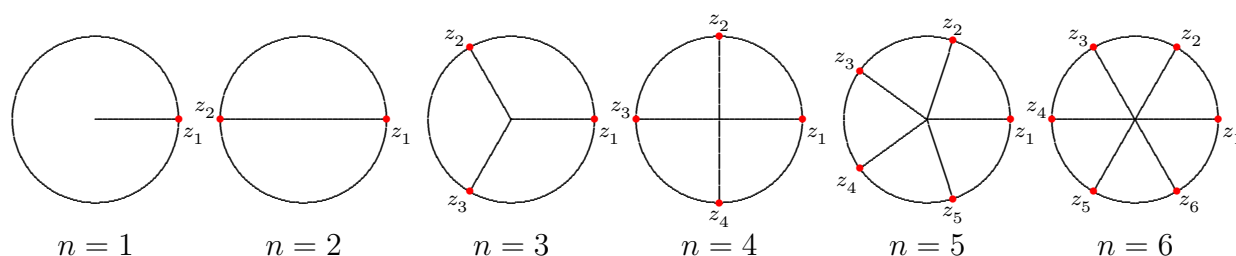
**Frage:** Warum gibt es keine weiteren Lösungen von  $z^n = w$ , z. B. eine für  $k = n$ ?

### Komplexe Einheitswurzeln

Die  $n$ -ten Einheitswurzeln sind die Lösungen der Gleichung  $z^n - 1 = 0$  (solche Gleichungen heissen auch Kreisteilungsgleichungen, es wird unten klar warum). Zur äquivalenten Form  $z^n = 1 = e^{i2k\pi}$  ( $z^n = w$ ,  $w$  mit  $r = 1$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $n > 0$ ) gehören die  $n$  Lösungen

$$z_{k+1} = \exp \left( i \frac{2k\pi}{n} \right) = \cos \left( \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Es gibt immer die reelle Lösung  $z_1 = 1$  ( $k = 0$ ). Für gerades  $n$  ( $n = 2l$ ) gibt es auch immer eine zweite reelle Lösung  $z_{l+1} = -1$  ( $k = n/2$ ). Offensichtlich liegen auch immer sämtliche Lösungen auf dem Einheitskreis. Die folgende Abbildung zeigt die Lage der  $n$ -ten Einheitswurzeln auf dem Einheitskreis für einige kleine Werte von  $n$ . Die anschliessende Tabelle gibt die zugehörigen  $n$ -ten Einheitswurzeln explizit an.



$k$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$k$
0	$z_1 = e^{i0} = 1$	$z_1 = e^{i0} = 1$	$z_1 = e^{i0} = 1$	$z_1 = e^{i0} = 1$	$z_1 = e^{i0} = 1$	$z_1 = e^{i0} = 1$	0
1	—	$z_2 = e^{i\pi} = -1$	$z_2 = e^{i2\pi/3}$	$z_2 = e^{i\pi/2} = i$	$z_2 = e^{i2\pi/5}$	$z_2 = e^{i\pi/3}$	1
2	—	—	$z_3 = e^{i4\pi/3}$	$z_3 = e^{i\pi} = -1$	$z_3 = e^{i4\pi/5}$	$z_3 = e^{i2\pi/3}$	2
3	—	—	—	$z_4 = e^{i3\pi/2} = -i$	$z_4 = e^{i6\pi/5}$	$z_4 = e^{i\pi} = -1$	3
4	—	—	—	—	$z_5 = e^{i8\pi/5}$	$z_5 = e^{i4\pi/3}$	4
5	—	—	—	—	—	$z_6 = e^{i5\pi/3}$	5

Kleine Übungsaufgabe: Überzeugen Sie sich davon, dass jede der fünf 5-ten Einheitswurzeln  $z_j$  ( $j = 1, \dots, 5$ , s. obige Tabelle) tatsächlich die Gleichung  $z^5 = 1$  erfüllt.

### Stetige Funktionen und Unstetigkeiten

**Definition:** Unter der  $\varepsilon$ -**Umgebung** einer Zahl  $a \in \mathbb{R}$  ( $a \in \mathbb{C}$ ) versteht man die Zahlenmenge  $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$  ( $U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \varepsilon\}$ ) mit positivem  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Die  $\varepsilon$ -**Umgebung einer reellen Zahl**  $a$  ist die Menge aller reellen Zahlen  $x$ , die sich auf der Zahlengeraden in einem offenen Intervall befinden, welches die Länge  $2\varepsilon$  hat und dessen Mittelpunkt die Zahl  $a$  ist:  $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ .

Die  $\varepsilon$ -**Umgebung einer komplexen Zahl**  $a$  ist die Menge aller komplexen Zahlen  $z$ , die sich in der Gaußschen Zahlenebene innerhalb eines Kreises um  $a$  mit Radius  $\varepsilon$  befinden (s. o.).

*Definition:* Eine Zahl  $x_0 \in \mathbb{R}$  ( $z_0 \in \mathbb{C}$ ) heisst **Häufungspunkt** (Häufungszahl, Häufungsstelle) einer Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  ( $M \subseteq \mathbb{C}$ ), wenn in jeder(!) noch so kleinen  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$  ( $z_0$ ) mindestens ein von  $x_0$  ( $z_0$ ) verschiedenes Element von  $M$  liegt.  $\square$

Beispiel: Die unendliche Zahlenfolge  $(a_n)$  (d. h., eine Funktion  $f: n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \in M$ ) mit den Elementen  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{6}{7}, \dots$  hat zwei Häufungspunkte: die Zahlen 0 und 1.

*Definition:* Eine unendliche Zahlenfolge  $(a_n)$ , die nur einen Häufungspunkt besitzt, heisst **konvergent**. Sei  $g$  der Häufungspunkt, so heisst dieser jetzt der **Grenzwert der Zahlenfolge**, und man schreibt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$  (lies: „Limes von  $a_n$  für  $n$  gegen unendlich ist  $g$ “). Eine Zahlenfolge mit Grenzwert  $g = 0$  heisst **Nullfolge**.  $\square$

Beispiele für Nullfolgen sind die Zahlenfolgen  $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{1}{n}$  (die Folge der Stammbrüche),  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$  (die alternierende Folge der Stammbrüche) und  $a_n = x^n$  mit  $x \in \mathbb{R}$  und  $|x| < 1$ .

*Definition:* Eine Zahl  $g$  heisst **Grenzwert der Funktion**  $f: x \rightarrow y = f(x)$ ,  $x \in D_f$ , **an der Stelle**  $x_0$ , wenn für jede(!) gegen  $x_0$  konvergierende Zahlenfolge  $(a_n)$  ( $a_n \in D_f \setminus \{x_0\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ ) gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g$ . Man schreibt dann  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$  (lies: „Limes von  $f(x)$  für  $x$  gegen  $x_0$  ist  $g$ “).  $\square$

*Definition:* Eine Funktion  $f$  mit  $y = f(x)$ ,  $x \in D_f$ , heisst **stetig an der Stelle**  $x = a$ , wenn

- $f$  an der Stelle  $x = a$  definiert ist (oder: der Funktionswert  $f(a)$  existiert), und
- der Grenzwert  $g = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a + \varepsilon)$  ( $|\varepsilon| \ll 1$ ) existiert, und
- Funktionswert  $f(a)$  und Grenzwert  $g$  gleich sind ( $g = f(a)$ ).  $\square$

Diese Bedingungen sind — bei Existenz von  $f(a)$  — genau dann erfüllt, wenn es zu jedem vorgegebenen  $\delta > 0$  ein  $\varepsilon(\delta) > 0$  gibt, so dass gilt:

$$|f(x) - f(a)| \leq \delta \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x - a| < \varepsilon.$$

Falls der bei der Prüfung auf Stetigkeit an der Stelle  $x = a$  zu untersuchende Grenzwert  $g$  nur bei einseitiger Annäherung an  $x = a$  existiert, aber die Bedingung  $g = f(a)$  erfüllt wird, so spricht man von einseitiger Stetigkeit.

*Definition:* Eine Funktion  $f$  mit  $y = f(x)$ ,  $x \in D_f$ , heisst **stetig im (oder auf dem) Intervall**  $I \subseteq D_f$ , wenn sie an jeder Stelle  $x \in I$  stetig ist.  $\square$

An Intervallgrenzen, die zugleich Grenzen des Definitionsbereiches sind, kann man nur einseitige Stetigkeit finden.

Auf Deutsch: Bei einer *stetigen* Funktion  $f: x \mapsto y = f(x)$  ( $x \in D_f$ ) gelingt das Zeichnen des Schaubildes *ohne Absetzen des Zeichenstiftes* (damit ist aber nichts darüber gesagt, ob der Funktionsverlauf „glatt“ ist).

### Häufiger auftretende Arten von Unstetigkeiten

Die folgende Liste nennt einige häufiger auftretende Arten von Unstetigkeiten, zusammen mit jeweils einem oder mehreren Beispielen:

- Polstelle bei  $x = a$  (mit/ohne Vorzeichenwechsel [VZW]): Der Funktionswert an der Stelle  $x = a$  existiert nicht, bei Annäherung an die Stelle  $x = a$  strebt der Funktionswert  $f(x)$  nach  $+\infty$  oder nach  $-\infty$  (also  $|f(x)| \rightarrow \infty$ , wenn  $x \rightarrow a$ ), die Parallele zur  $y$ -Achse bei  $x = a$  ist (vertikale) Asymptote der Funktion. Polstellen lassen sich unterteilen in solche mit und solche ohne VZW. Hat  $f(x)$  an der Stelle  $x = a$  eine Polstelle mit (ohne) VZW,

dann hat die zugehörige Kehrwertfunktion  $[(f(x))]^{-1} = 1/f(x)$  an derselben Stelle eine Nullstelle mit (ohne) VZW.

Beispiele:

- ▶  $y = 1/(x - a)$  (Polstelle mit VZW bei  $x = a$ );
- ▶  $y = \tan(x) = 1/\cot(x)$  (Polstellen mit VZW bei  $x = (2k + 1)\pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ );
- ▶  $y = \cot(x) = 1/\tan(x)$  (Polstellen mit VZW bei  $x = (2k)\pi/2 = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ );
- ▶  $y = 1/(x - a)^2$  (Polstelle ohne VZW bei  $x = a$ ).

- Sprungstelle bei  $x = a$  mit Sprunghöhe  $h$ : Der Funktionswert an der Stelle  $x = a$  existiert nicht (oder ist nicht eindeutig definiert, oder ist auf mehrfache Weise definierbar), bei Annäherung an die Stelle  $x = a$  von links und von rechts ergeben sich unterschiedliche Grenzwerte ( $\varepsilon > 0$ ):  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a - \varepsilon) = L \neq R = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a + \varepsilon)$ . Die (endliche) Sprunghöhe ist  $h = |L - R|$ .

Beispiel:

- ▶  $y = \frac{1}{1 + e^{1/(x-1)}}$  (Sprungstelle bei  $x = 1$  mit Sprunghöhe  $h = 1$  [ $L = 1$ ,  $R = 0$ ]).

- (Be)hebbare Definitionslücke bei  $x = a$ : Der Funktionswert an der Stelle  $x = a$  ist (zunächst) nicht definiert, es existiert aber der Grenzwert  $g = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Im Schaubild von  $f(x)$  ist an der Stelle  $x = a$  ein „Loch“. Durch die (oft stillschweigend als bereits erfolgt angenommene) Zusatzdefinition  $f(a) \equiv g$  wird die Definitionslücke geschlossen, und die Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x = a$ , wie man sagt, „stetig ergänzt“.

Beispiel:

- ▶  $y = \frac{\sin(kx)}{x}$  ( $k > 0$ ; hebbare Definitionslücke bei  $x = 0$ , Zusatzdefinition:  $f(0) = k$ ).

Eine Mischform einer Unstetigkeit findet man bei  $y = e^{1/(x-1)}$  an der Stelle  $x = 1$ . Bei Annäherung von links findet man  $L = 0$ , während bei Annäherung von rechts kein Grenzwert existiert (die Funktionswerte streben gegen  $+\infty$ ). Man könnte dies eine Sprungstelle mit unendlicher Sprunghöhe nennen (aber es ist anders als bei einer Polstelle mit Vorzeichenwechsel).

Einige Sätze über stetige Funktionen (Beweise dazu s. (Schul-)Mathematik-Lehrbücher):

Ist die Funktion  $f$  mit  $y = f(x)$  stetig im Intervall  $I = [a, b] \subset D_f \dots$

- ... und haben  $f(a)$  und  $f(b)$  verschiedene Vorzeichen (ist also  $f(a)f(b) < 0$ ), dann gibt es mindestens ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f(\xi) = 0$  (**Nullstellensatz von Bolzano**, nach Bernard Bolzano, 1781–1848).
- ... dann nimmt  $f(x)$  mit  $x \in (a, b)$  alle Werte aus  $[\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$  an (Zwischenwertsatz).
- ... dann gibt es mindestens eine Stelle  $t \in I$  und mindestens eine Stelle  $h \in I$ , so dass  $m \leq f(x) \leq M$ , mit  $m = f(t)$  und  $M = f(h)$ , für alle  $x \in I$  gilt (**Satz vom Minimum und Maximum** oder **Extremwertsatz von Weierstrass**, nach Karl Weierstrass, 1815–1897).

Die folgende Abbildung zeigt beispielhaft die durch diese Sätze beschriebene Situation:

