2. Teil

Allgemeines zu Ungleichungen

Die gebräuchlichsten Symbole für Ungleichungen sind $>$ (ist grösser als), $<$ (ist kleiner als), $\geq$ (ist grösser als oder gleich), $\leq$ (ist kleiner als oder gleich), $\neq$ (ist ungleich). Wir betrachten hier nur Ungleichungen, die $>$ oder $<$ enthalten.

Eigenschaften von Ungleichungen: Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ist } a > b, \text{ dann ist } b < a.$$

$$\text{Ist } a < b, \text{ dann ist } b > a.$$

Transitivität:

$$\text{Ist } a > b \text{ und } b > c, \text{ dann ist } a > c.$$

$$\text{Ist } a < b \text{ und } b < c, \text{ dann ist } a < c.$$

Addition und Subtraktion einer reellen Zahl c:

$$\text{Ist } a > b, \text{ dann ist } a \pm c > b \pm c.$$

$$\text{Ist } a < b, \text{ dann ist } a \pm c < b \pm c.$$

Addition von Ungleichungen:

$$\text{Ist } a > b \text{ und } c > d, \text{ dann ist } a + c > b + d.$$

$$\text{Ist } a < b \text{ und } c < d, \text{ dann ist } a + c < b + d.$$

Subtraktion von Ungleichungen:

$$\text{Ist } a > b \text{ und } c < d, \text{ dann ist } a - c > b - d.$$

$$\text{Ist } a < b \text{ und } c > d, \text{ dann ist } a - c < b - d.$$

Multiplikation und Division mit einer reellen Zahl $c \neq 0$:

$$\text{Ist } a > b \text{ und } c > 0, \text{ dann ist } a \cdot c > b \cdot c \text{ und } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

$$\text{Ist } a < b \text{ und } c > 0, \text{ dann ist } a \cdot c < b \cdot c \text{ und } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

$$\text{Ist } a > b \text{ und } c < 0, \text{ dann ist } a \cdot c < b \cdot c \text{ und } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

$$\text{Ist } a < b \text{ und } c < 0, \text{ dann ist } a \cdot c > b \cdot c \text{ und } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Ungleichungen und Kehrwerte:

$$\text{Ist} \quad 0 < a < b \quad \text{oder} \quad a < b < 0, \quad \text{dann ist} \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Es gibt in der Mathematik recht viele Ungleichungen zwischen verschiedenen Grössen, die sich unter anderem besonders in Beweisen verwenden lassen. Eine dieser Ungleichungen ist die **Dreiecksungleichung**:

Für alle reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|a+b| \leq |a| + |b| \ .$$

Frage: Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Ungleichung für den Betrag der Differenz zweier Zahlen:

Für alle reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|a| - |b| \leq |a-b| \leq |a| + |b| \ .$$

Im Fall von komplexen Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \ .$$

Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel:

In einer Messreihe seien n positive Messwerte a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bestimmt worden. Dann gilt die folgende Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \, .$$

Frage: In welchem Fall gilt das Gleichheitszeichen?

Physikalische Konstanten und Exponentialschreibweise

Einige wichtige physikalische Konstanten sind durch sehr grosse oder sehr kleine Zahlen gegeben. Zu ihrer Darstellung werden üblicherweise Zehnerpotenzen verwendet. Einige Beispiele:[1]

Planck-Konstante (Plancksches Wirkungsquantum, nach Max Planck, 1858–1947):

$$h = (6{,}626070040 \pm 0{,}000000081) \cdot 10^{-34} \ \mathrm{J\ s}$$

Boltzmann-Konstante (nach Ludwig Boltzmann, 1844–1906):

$$k_\mathrm{B} = (1{,}38064852 \pm 0{,}00000079) \cdot 10^{-23} \ \mathrm{J\ K^{-1}}$$

Avogadro-Konstante (nach Amedeo Avogadro, 1776–1856):

$$N_\mathrm{A} = (6{,}022140857 \pm 0{,}000000074) \cdot 10^{23} \ \mathrm{mol^{-1}}$$

Allgemeine molare Gaskonstante:

$$R = k_\mathrm{B} \cdot N_\mathrm{A} = (8{,}3144598 \pm 0{,}0000048) \ \mathrm{J\ mol^{-1}\ K^{-1}}$$

Fakultät und Binomialkoeffizienten

Für natürliche Zahlen n ist die Fakultät von n, $n!$ (lies „n Fakultät"), definiert als

$$\begin{aligned} 0! &= 1 && \text{für } n = 0, \\ 1! &= 1 && \text{für } n = 1, \\ n! &= n \cdot (n-1)! && \text{für } n > 1. \end{aligned}$$

[1] CODATA internationally recommended values of fundamental physical constants (2014 adjustment), http://physics.nist.gov/cuu/Constants/ (abgerufen 2015-Dez-22).

Damit lassen sich die sogenannten Binomialkoeffizienten sehr kompakt notieren:

$$\binom{n}{k} \;\text{(lies „}n\text{ über }k\text{“)}\; = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}\,.$$

Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ kann k alle natürlichen Zahlen von 0 bis n annehmen. Fasst man diese $n+1$ Binomialkoeffizienten in einer Zeile zusammen, und ordnet diese Zeilen nach aufsteigendem n untereinander an, so entsteht das Pascalsche Dreieck (nach Blaise Pascal, 1623–1662):

$$\begin{array}{lcc}
n=0 & \binom{0}{0} & 1 \\
n=1 & \binom{1}{0}\;\binom{1}{1} & 1\quad 1 \\
n=2 & \binom{2}{0}\;\binom{2}{1}\;\binom{2}{2} & 1\quad 2\quad 1 \\
n=3 & \binom{3}{0}\;\binom{3}{1}\;\binom{3}{2}\;\binom{3}{3} & 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\
n=4 & \binom{4}{0}\;\binom{4}{1}\;\binom{4}{2}\;\binom{4}{3}\;\binom{4}{4} & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1
\end{array}$$

Die Koeffizienten in Zeile n dieses Schemas treten im Binomialtheorem für $(a+b)^n$ auf:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k\,.$$

Für $n = 3$ heisst das also $(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b + 3ab^2 + 1a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Fakultäten und Binomialkoeffizienten treten in der Kombinatorik auf. Sie spielen auch eine Rolle bei den Teilchenstatistiken (Fermi-Dirac- und Bose-Einstein-Statistik), die in der statistischen Thermodynamik von grundlegender Bedeutung sind. Dort geht es dann um Anordnungsmöglichkeiten von n nicht unterscheidbaren Teilchen (Fermionen oder Bosonen) auf Gitterplätzen oder Energieniveaus, und n ist von der Grössenordnung der Masszahl der Avogadro-Konstanten ($n \approx 10^{23}$).

Proportionalität am Beispiel der thermischen Zustandsgleichung für das ideale Gas

Notation:
n steht für Stoffmenge (SI-Einheit: $[n] = \text{mol}$).
p steht für den Druck (SI-Einheit: $[p] = \text{Pa} = \text{N m}^{-2}$).
T bedeutet die (absolute) Temperatur (SI-Einheit: $[T] = \text{K}$).
V ist das Volumen (SI-Einheit: $[V] = \text{m}^3$).

Experimentell wurde gefunden:

- Gesetz von Boyle (1662) und Mariotte (1676): Bei gegebener Stoffmenge und konstanter Temperatur ist V proportional zu $1/p$.

  $$V \sim \frac{1}{p} \quad \text{oder} \quad V = \text{const}\cdot\frac{1}{p} \quad \text{oder} \quad pV = \text{const} \qquad (n\text{ konstant, }T\text{ konstant}).$$

- Gesetz von Amontons (nach Guillaume Amontons, 1663–1705): Bei gegebener Stoffmenge und konstantem Volumen ist p proportional zu T.

  $$p \sim T \quad \text{oder} \quad p = \text{const}\cdot T \quad \text{oder} \quad p/T = \text{const} \qquad (n\text{ konstant, }V\text{ konstant}).$$

- Gesetz von Charles (1787): Bei gegebener Stoffmenge und konstantem Druck ist V proportional zu T.

  $$V \sim T \quad \text{oder} \quad V = \text{const}\cdot T \quad \text{oder} \quad V/T = \text{const} \qquad (n\text{ konstant, }p\text{ konstant}).$$

- Gesetz von Avogadro (1811): Alle Gase enthalten bei gleichem Druck und gleicher Temperatur in gleichen Volumina V die gleiche Teilchenzahl N.

$$V \sim N \quad \text{oder} \quad V = \text{const} \cdot N \quad \text{oder} \quad V/N = \text{const} \qquad (p \text{ konstant}, T \text{ konstant}).$$

Die Gleichung, die alle diese Gesetze zusammenfasst, ist die thermische Zustandsgleichung des sogenannten idealen (oder perfekten) Gases, oder kurz: das ideale Gasgesetz (erstmals 1834 von Émile Clapeyron, 1799–1864, formuliert). Dieses Gesetz wird in den Vorlesungen zur Physikalischen Chemie noch ausführlich behandelt. In heutiger Schreibweise lautet es (mit Boltzmann-Konstante k_B, Avogadro-Konstante N_A und allgemeiner Gaskonstante R):

$$p\,V = k_\mathrm{B}\,N\,T = n\,N_\mathrm{A}\,k_\mathrm{B}\,T = n\,R\,T\,.$$

Das ideale Gasgesetz beschreibt vollständig die Abhängigkeit der physikalischen Grössen, die den Zustand einer Gasmenge bestimmen, voneinander. Daraus folgt beispielsweise, dass für eine gegebene Gasmenge (Stoffmenge n konstant) der Druck p eine Funktion des Volumens V und der Temperatur T ist, und zwar

$$p(V,T) = \frac{n\,R\,T}{V} \qquad (n \text{ konstant}).$$

Unter Temperatur- und Druckbedingungen in der Nähe der sogenannten Standardbedingungen (T = 273,15 K = 0 °C, p = 1013,25 hPa = 1 atm) wird trockene Luft in sehr guter Näherung durch das ideale Gasgesetz beschrieben.

Weiteres zu Funktionen

Symmetrie

Eine Funktion f heisst **gerade**, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt.
Eine Funktion f heisst **ungerade**, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt.

Jede Funktion $f(x)$ lässt sich als Summe aus ihrem geraden Teil $g(x)$ und ihrem ungeraden Teil $u(x)$ schreiben:

$$f(x) = g(x) + u(x) \quad \text{mit} \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(-x)\,,\ u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = -u(-x)\,.$$

Ist $f(x)$ eine gerade Funktion, so ist ihr ungerader Teil gleich Null ($u(x) = 0$).
Ist $f(x)$ eine ungerade Funktion, so ist ihr gerader teil gleich Null ($g(x) = 0$).

Finden Sie Beispiele für gerade und ungerade Funktionen. Was bedeutet das Vorhandensein der einen oder anderen dieser beiden Symmetrien für das Schaubild der Funktion? Lässt sich jede Funktion als „gerade“ oder „ungerade“ klassifizieren?

Gebrochen-rationale Funktionen

Sind $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome in der Variablen x, so heisst ein Ausdruck der Form

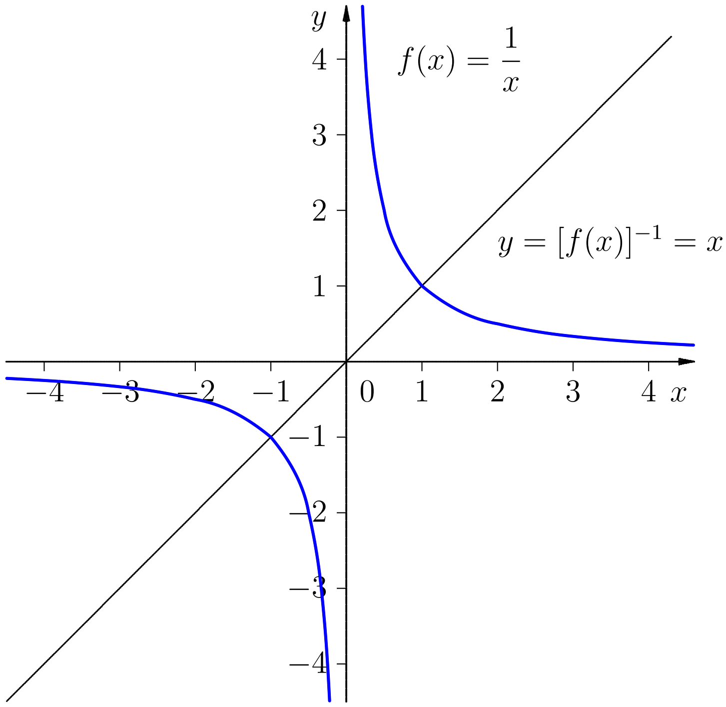
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

eine **gebrochen-rationale Funktion**. Ist $Q(x)$ eine konstante Funktion (ein Polynom vom Grad 0), so erhält man eine ganzrationale Funktion.

Der einfachste Fall einer gebrochen-rationalen Funktion ist die **(Normal-)Hyperbel** (siehe Abbildung auf der nächsten Seite):

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Dies ist die Kehrwertfunktion zur Geraden $y = x$. An der Stelle $x = 0$ ist die Hyperbel nicht definiert. Nähert man sich der Stelle $x = 0$ von links (von rechts), so strebt ihr Funktionswert nach $-\infty$ (nach $+\infty$). Man sagt, die Funktion $1/x$ habe an der Stelle $x = 0$ eine **Polstelle mit Vorzeichenwechsel** (Anmerkung: Die zugehörige Kehrwertfunktion, x, hat dort eine **Nullstelle mit Vorzeichenwechsel**). Die beiden Geraden $y = 0$ (die x-Achse) und $x = 0$ (die y-Achse), denen die Funktionswerte der Hyperbel beliebig nahe kommen, die sie aber für endliche Werte im Zahlenpaar $(x, y = 1/x)$ niemals erreichen, heissen **Asymptoten**. Das Schaubild zeigt die beiden Zweige (oder Äste) der Hyperbel $f(x) = 1/x$. Weil $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt, handelt es sich hier um eine ungerade Funktion.



Sieht man sich im Vergleich dazu nun die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

an (dies ist die Kehrwertfunktion der Normalparabel $y = x^2$, s. folgende Abbildung), so findet man wiederum die Koordinatenachsen als Asymptoten. Nähert man sich der Stelle $x = 0$, so strebt jetzt aber der Funktionswert nach $+\infty$, egal ob man sich von links oder von rechts nähert. Man sagt, die Funktion $1/x^2$ hat an der Stelle $x = 0$ eine **Polstelle ohne Vorzeichenwechsel** (Anmerkung: Die zugehörige Kehrwertfunkton, x^2, hat dort eine **Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel**). Weil $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt, handelt es sich hier um eine gerade Funktion.