Brückenkurs Mathematik
für Studierende der Chemie

PD Dr. Dirk Andrae
(nach Vorlagen von Dr. Werner Gans vom WS 2015/2016)
Institut für Chemie und Biochemie
Freie Universität Berlin

14. Februar 2019

1. Teil: Zahlenmengen, Grundrechenarten

Natürliche Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

Jede natürliche Zahl hat eine Nachfolgerin, das heisst, wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist $n+1$ ebenfalls eine natürliche Zahl. Daraus folgt, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Die natürlichen Zahlen dienen zum Abzählen. Die **Menge der natürlichen Zahlen** wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.

Sind a und b natürliche Zahlen, so ist auch ihre Summe $a + b$ eine natürliche Zahl. Dagegen ist die Differenz $a - b$ dann und nur dann eine natürliche Zahl (also $a - b \geq 0$), wenn $b \leq a$ gilt. Ist jedoch $b > a$, so folgt $a - b < 0$. Dies führt aus der Menge der natürlichen Zahlen heraus.

Ganze Zahlen

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Die **Menge der ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ enthält, zusätzlich zu den natürlichen Zahlen, auch die negativen ganzen Zahlen.

Sind a und b ganze Zahlen, so sind sowohl ihre Summe $a + b$ als auch ihre Differenz $a - b$ wiederum ganze Zahlen.

Frage: Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

Rationale Zahlen

$$0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \dots, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{3}{4}, \dots, \pm 1, \dots, \pm\frac{7}{5}, \dots, \pm 2, \dots$$

Hierzu gehören, zusätzlich zu den ganzen Zahlen, auch die positiven und negativen Brüche, deren Zähler (die Zahl über dem Bruchstrich) und Nenner (die Zahl unter dem Bruchstrich) ganze Zahlen sind (dabei ist die Null als Nenner selbstverständlich ausgenommen). Die **Menge der rationalen Zahlen** wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Es lässt sich zeigen, dass es eine umkehrbar eindeutige Abbildung der natürlichen Zahlen auf die rationalen Zahlen gibt (Abzählverfahren nach Georg Cantor, 1845–1918). Folgerung: Es gibt genauso viele rationale Zahlen wie natürliche Zahlen, nämlich abzählbar unendlich viele. Für „abzählbar unendlich“ wird das Symbol $\aleph_0$ („aleph null“) verwendet. Die rationalen Zahlen umfassen alle endlichen oder periodischen Dezimalbrüche.

Irrationale Zahlen

Nicht jede Zahl lässt sich als endlicher oder periodischer Dezimalbruch darstellen. Ein Beispiel: Das Verhältnis der Länge der Diagonalen d zur Länge der Seite a in einem Quadrat. Die Diagonale bildet mit zwei Seiten des Quadrats ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck. Es gilt dann nach dem Satz des Pythagoras (benannt nach Pythagoras von Samos, ca. 570 v. Chr. bis ca. 510 v. Chr.):

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad d/a = \sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242\text{0...}$$

Weitere Beispiele für Zahlen dieser Art sind $\pi \approx 3{,}14159$ (das Verhältnis von Umfang U zu Durchmesser d im Kreis) und $\mathrm{e} \approx 2{,}71828$ (die Basis der natürlichen Logarithmen, siehe später). Die beiden zuletzt genannten Zahlen sind nicht nur irrational, sondern auch transzendent, d. h.

sie lassen sich nicht mehr mit endlich vielen Rechenschritten, einschliesslich Wurzelziehen, aus rationalen Zahl berechnen ($\sqrt{2}$ ist zwar irrational, aber nicht transzendent). Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich (siehe oben), die Menge der irrationalen Zahlen ist jedoch überabzählbar unendlich, d. h. es gibt „mehr“ irrationale Zahlen als rationale Zahlen.

Reelle Zahlen

Die Vereinigungsmenge aller bisher genannten Zahlen heisst die **Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$. In geometrischer Darstellung spricht man auch von der Zahlengeraden. Da es überabzählbar unendlich viele reelle Zahlen gibt, sagt man, die Menge $\mathbb{R}$ habe eine andere „Mächtigkeit“ als die Mengen der natürlichen, der ganzen oder der rationalen Zahlen. Die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ wird mit $\mathfrak{c}$ (für „continuum“) bezeichnet. Das heisst, dass es auf der Zahlengeraden keine „Löcher“ oder „Lücken“ gibt. Jedem Punkt P auf der Geraden kann umkehrbar eindeutig eine reelle Zahl a zugeordnet werden. Die reellen Zahlen sind geordnet: Zwischen zwei reellen Zahlen a und b gilt genau eine (und nur eine) der Beziehungen $a < b$, $a = b$ oder $a > b$.

Grundrechenregeln mit reellen Zahlen

Addition

Sind a und b zwei reelle Zahlen, dann ist ihre Summe $a + b$ ebenfalls eine reelle Zahl. Die Zahl 0 (Null) ist das neutrale Element bezüglich der Addition, denn es gilt sowohl $a + 0 = a$ als auch $a - a = a + (-a) = 0$. Also gibt es zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl $b \in \mathbb{R}$, so dass $a + b = 0$ ist, nämlich $b = -a$.

Anmerkung: Damit ist Subtraktion als eigenständige Rechenoperation überflüssig geworden, denn es ist $a - b = a + (-b) \in \mathbb{R}$. Subtraktion von b ist also nichts anderes als Addition von $-b$. Z. B. ist mit $a = 2$ und $b = -5$ also $a - b = 2 - (-5) = 2 + (-(-5)) = 2 + 5 = 7$.

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt
- das Kommutativgesetz der Addition: $a + b = b + a$, und
- das Assoziativgesetz der Addition: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Aus diesen Rechenregeln folgt: Zu zwei reellen Zahlen a und b gibt es immer genau eine reelle Zahl x, so dass $a + x = b$ gilt. Diese Zahl x heisst die Differenz von b und a: $x = b - a = b + (-a)$.

Achtung: Im allgemeinen ist $a - b \neq b - a$.

Multiplikation

Sind a und b zwei reelle Zahlen, dann ist ihr Produkt $a \cdot b$ ebenfalls eine reelle Zahl. Die Zahl 1 (Eins) ist das neutrale Element bezüglich der Multiplikation, denn es gilt sowohl $a \cdot 1 = a$ als auch $a/a = a \cdot (1/a) = 1$ (letzteres jedoch nur falls $a \neq 0$ ist). Also gibt es zu jeder reellen Zahl $a \neq 0$ eine reelle Zahl b, so dass $a \cdot b = 1$, nämlich $b = 1/a$ (den Kehrwert von a).

Anmerkung: Damit ist Division als eigenständige Rechenoperation überflüssig geworden, denn es ist $a/b = a \cdot (1/b) \in \mathbb{R}$ für alle $b \neq 0$. Division einer Zahl durch b ist also nichts anderes als Multiplikation dieser Zahl mit dem Kehrwert $1/b$. Z. B. ist mit $a = 4$ und $b = \frac{1}{2}$ also $a/b = 4/\frac{1}{2} = 4 \cdot 2 = 8$.

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt
- das Kommutativgesetz der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$, und
- das Assoziativgesetz der Multiplikation: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Aus diesen Rechenregeln folgt: **(1)** Zu zwei reellen Zahlen a und b (wobei $a \neq 0$) gibt es immer genau eine reelle Zahl x, so dass $a \cdot x = b$ gilt. Diese Zahl x heisst der Quotient von b und a

(oder das Verhältnis von b zu a): $x = b/a = b \cdot (1/a)$. — **(2)** Aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.

Ausserdem gilt das Distributivgesetz, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$. Diese Rechenregel legt also fest, was zu tun ist, wenn Addition und Multiplikation zusammen auftreten: „Ausmultiplizieren" (von links nach rechts) oder „Ausklammern eines gemeinsamen Faktors" (von rechts nach links).

Betrag (oder Absolutwert) einer reellen Zahl: Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann ist $|a| = |-a| = a$. Insbesondere gilt $|a - b| = |b - a|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Einfache algebraische Ausdrücke

Um algebraische Ausdrücke, in denen Klammern, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (Bruchstriche) vorkommen, zu vereinfachen, nutzt man die gerade genannten Rechenregeln. Betrachten wir den recht harmlosen Ausdruck

$$\frac{4x - 25x^3}{2 + 5x} \,.$$

Um diesen Ausdruck (und ähnliche Ausdrücke) vereinfachen zu können, ist es nötig, sich ein paar Formeln einzuprägen, deren Verallgemeinerung zum Binomialtheorem und zu den Binomialkoeffizienten führt (siehe später). Die einfachsten Formeln dieser Art sind:

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \,, \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \,. \end{aligned}$$

Damit kann der oben genannte Ausdruck zu $x(2 - 5x)$ vereinfacht werden.

Einfache Gleichungen mit einer Unbekannten

Gleichungen mit einer Unbekannten (die x heisse) lassen sich immer in der Form $f(x) = 0$ schreiben. Die Suche nach Antworten auf die Frage „Für welche x ist $f(x) = 0$?" heisst **Nullstellensuche**. Eine Zahl x, das diese Frage beantwortet, heisst Lösung (oder auch „Wurzel") der Gleichung $f(x) = 0$, oder eben Nullstelle der Funktion $f(x)$ (mehr zu Funktionen s. unten). Die Anzahl solcher Lösungen einer Gleichung ist eine natürliche Zahl (einschliesslich Null). Es kann also sein, dass eine Gleichung keine Lösung hat, oder dass sie eine einzige Lösung hat, oder dass es mehr als eine Lösung gibt.

Lineare Gleichungen: Allgemeine Form: $ax + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$). Lösung: $x = -b/a$.

Quadratische Gleichungen: Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).
Multiplikation mit $1/a$ ergibt die Normalform: $x^2 + px + q = 0$ ($p = b/a$, $q = c/a$).
Aus den Koeffizienten (a, b, c bzw. p, q) lässt sich die Diskriminante $D = \Delta/(4a^2)$ berechnen:

$$\Delta = b^2 - 4ac \,, \qquad D = \frac{\Delta}{(2a)^2} = \frac{p^2}{4} - q \,.$$

Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung sind dann (*pq*-**Formel**):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \,.$$

Die Diskriminante heisst so, weil sich mit ihrer Hilfe entscheiden lässt von welcher Art die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung sind:

• $D > 0$ ($\Delta > 0$): Es gibt zwei verschiedene reelle Lösungen $x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{D}$.
• $D = 0$ ($\Delta = 0$): Es gibt eine doppelte reelle Lösung $x_1 = x_2 = -p/2$.
• $D < 0$ ($\Delta < 0$): Es gibt zwei komplexe Lösungen $x_{1,2} = -p/2 \pm \mathrm{i}\sqrt{|D|}$ ($\mathrm{i}^2 = -1$).
Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung haben stets folgende Eigenschaften:

$$x_1 + x_2 = -p = -b/a\,, \qquad x_1 \cdot x_2 = q = c/a\,,$$

denn $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q$. Dies ist auch als **Satz von Vieta** bekannt (nach François Viète, 1540–1603) und kann zum raschen Finden der Lösungen genutzt werden (oft viel rascher als die Anwendung der pq-Formel). Ein Beispiel: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, denn $2 \cdot 3 = 6$ und $2 + 3 = 5$. Also sind $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ die beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Kubische Gleichungen: Hierzu nur ein Beispiel, das sich relativ einfach lösen lässt:

$$x^3 + x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x(x + 3)(x - 2)\,.$$

Die Lösungen sind also $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$.
Angaben zum allgemeinen Vorgehen bei kubischen Gleichungen findet man in Formelsammlungen.

Komplexe Zahlen

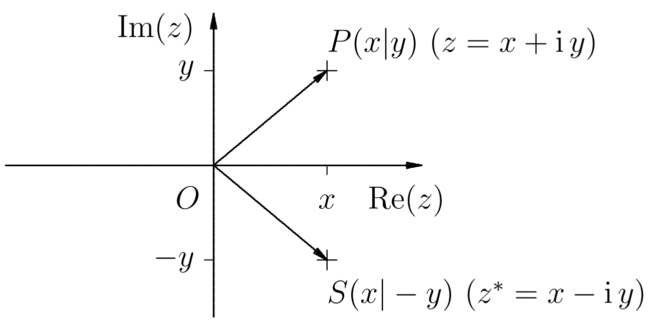
Wie oben erwähnt hat eine quadratische Gleichung auch im Fall einer negativen Diskriminante zwei Lösungen. Einfachstes Beispiel: $x^2 + 1 = 0$ ($p = 0$, $q = 1$) $\Rightarrow D = (p/2)^2 - q = -1 < 0$ $\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm\mathrm{i}$. Diese beiden Lösungen sind jedoch keine reellen Zahlen mehr. Die Zahl i heisst **imaginäre Einheit**. Sie hat die Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$. Die (eine) Quadratwurzel aus -1 wird mit i bezeichnet (die andere ist $-\mathrm{i}$).

Eine komplexe Zahl z ist eigentlich bloss ein geordnetes Paar (x, y) reeller Zahlen: $z = x + \mathrm{i}\,y$, mit Realteil $x = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ und Imaginärteil $y = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$. Für die imaginäre Einheit i selbst also: $z = 0 + \mathrm{i} \cdot 1 = \mathrm{i}$ ($x = 0$ und $y = 1$). Die **Menge der komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ schliesst die reellen Zahlen als Spezialfall ein (für $y = 0$). Addition und Multiplikation sind erklärt durch

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}\,y_1) + (x_2 + \mathrm{i}\,y_2) \\
&= (x_1 + x_2) + \mathrm{i}\,(y_1 + y_2)\,, \\
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}\,y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}\,y_2) \\
&= x_1x_2 + \mathrm{i}\,x_1y_2 + \mathrm{i}\,y_1x_2 + \mathrm{i}^2y_1y_2 \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}\,(x_1y_2 + y_1x_2)\,.
\end{aligned}$$

Ausser der Regel $\mathrm{i}^2 = -1$, die bei der Multiplikation eine Rolle spielt, ist hier nichts besonderes zu beachten, und für reelle Zahlen ($y_1 = 0$ und $y_2 = 0$) ergeben sich wieder die für diese Art von Zahlen altbekannten, gewohnten Rechenregeln (was nicht anders zu erwarten war).

Geometrisch lässt sich die Menge $\mathbb{C}$ durch die Punkte einer Ebene darstellen: Der komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}\,y$ ist der Punkt $P(x|y)$ in der Ebene zugeordnet, und umgekehrt. Heute wird diese Ebene meist **Gausssche Zahlenebene** genannt (nach Carl Friedrich Gauss, 1777–1855).



Zu jeder komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}\,y$ existiert eine konjugiert komplexe Zahl $z^* = x - \mathrm{i}\,y$. Es ist $x = \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z^*) = (z + z^*)/2$ und $y = \mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(z^*) = (z - z^*)/(2\,\mathrm{i})$.

Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}\,y$, $|z|$, ist der Abstand zwischen dem Ursprung $O(0|0)$ und dem Punkt $P(x|y)$ in der Gaussschen Zahlenebene: $|z| = \overline{OP}$. Es ist $|z|^2 = z \cdot z^* = (x + \mathrm{i}\,y)(x - \mathrm{i}\,y) = x^2 + y^2 \geq 0$, also $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Anwendung des Satzes des Pythagoras liefert dasselbe Ergebnis).

Frage: Welche wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen fehlt den komplexen Zahlen?

Reellwertige Funktionen einer reellen Variablen

Funktionen sind eine Art von Abbildungen, die Elementen einer gegebenen Menge Elemente einer anderen (oder derselben) Menge zuordnen. Die Abbildung muss in der „Vorwärtsrichtung“ eindeutig sein, die Umkehrabbildung (Abbildung in „Rückwärtsrichtung“) existiert nur, wenn sie ebenfalls eindeutig ist (oder durch zusätzliche Angaben eindeutig gemacht wird). In unserem Fall bildet die **Funktion** f die Menge $\mathbb{R}$ (oder eine Teilmenge davon) auf die Menge $\mathbb{R}$ (oder eine Teilmenge davon) ab:

$$f:\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\,.$$

Statt $\mathbb{R}$ können hier auch Teilmengen davon (z. B. bestimmte Intervalle) stehen. Eine Funktion f hat einen **Definitionsbereich** $D_f \subseteq \mathbb{R}$ (die Teilmenge von $\mathbb{R}$, für die die Funktion definiert ist) und einen **Wertebereich** $W_f \subseteq \mathbb{R}$ (die Menge aller Funktionswerte). Ausführlicher (und genauer) schreibt man daher:

$$f:\ x \in D_f \mapsto y = f(x) \in W_f\,.$$

Hier ist x das **Argument** der Funktion, y der **Funktionswert**, und $f(x)$ der **Funktionsterm**. Die Gleichung $y = f(x)$ heisst **Funktionsgleichung**.

Zur Veranschaulichung einer reellwertigen Funktion einer reellen Variablen ($x \in \mathbb{R} \mapsto y = f(x) \in \mathbb{R}$) verwendet man ein **Schaubild** (einen Graphen), üblicherweise mit einem kartesischen Koordinatensystem (nach René Descartes, latin.: Renatus Cartesius, 1596–1650), das im gewählten Ausschnitt — das ist ein Teil einer Ebene — sämtliche geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen zeigt, die die Funktionsgleichung $y = f(x)$ erfüllen. Die Menge all dieser Zahlenpaare $(x, y = f(x))$ bildet dann, im gewählten Ausschnitt, die Kurve der Funktion f.

An unterschiedlichen Funktionenarten herrscht kein Mangel, damit wurden schon viele Bücher gefüllt. Wir betrachten zunächst einen einfachen Typ von Funktionen, nämlich die ganzrationalen Funktionen (oder Polynome) vom Grad n in der Variablen x,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (a_n \neq 0).$$

Die Zahlen $a_k \in \mathbb{R}$ heissen Koeffizienten des Polynoms.

Konstante Funktionen

Der einfachste Fall ist die konstante Funktion, $f(x) = c$ (oder $f(x) = a_0$ in obiger Notation).

Lineare Funktionen

Allgemeine Form: $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$ (oder $f(x) = a_0 + a_1 x$ in obiger Notation).
Hier ist m (oder a_1) die Steigung und $f(0) = b$ (oder a_0) der y-Achsenabschnitt (Schnittpunkt mit der y-Achse). Lässt man $m = 0$ zu, so sind die konstanten Funktionen als Spezialfall der linearen Funktionen eingeschlossen. Die linearen Funktionen sind im gesamten Definitionsbereich eineindeutig, sofern die beiden Bedingungen $m \neq 0$ und $|m| < \infty$ erfüllt sind: Jedem x

wird genau ein y zugeordnet, und umgekehrt. Die folgende Abbildung zeigt links die Funktion $f(x) = 2x + 3$ als ein Beispiel für eine lineare Funktion.

Die Steigung $m = \tan(\varphi)$ der linearen Funktion bestimmt den Winkel φ ($-90^\circ < \varphi < 90^\circ$), den die Gerade im Schaubild mit der in positiver Richtung betrachteten x-Achse bildet (mehr dazu später bei trigonometrischen Funktionen und bei Differentiation).

Quadratische Funktionen

Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ (oder $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ in obiger Notation). Im Schaubild sind dies Parabeln. Die einfachste quadratische Funktion, $f(x) = x^2$, ergibt die sogenannte **Normalparabel** (siehe rechte Seite der folgenden Abbildung). Die Normalparabel ist spiegelsymmetrisch zur Geraden $x = 0$ (y-Achse). Zu jedem Funktionswert $y = x^2 > 0$ führen zwei x-Werte, nämlich $+x$ und $-x$. Ihr Scheitelpunkt $S(0|0)$ ist zugleich (doppelte) Nullstelle.