

LINEARE ALGEBRA I : PROBEKLAUSUR

PRÜFUNGSFRAGEN

V. Hoskins, V. Trageser

Anweisungen:

- Es gibt 4 Aufgaben, von denen Sie **genau 3 Aufgaben** bearbeiten müssen. Lesen Sie alle Aufgaben und dann wählen Sie die 3 Aufgaben, die Sie bearbeiten wollen.
 - Antworten Sie die Aufgaben im Antwortheft. Schreiben Sie die Nummer der Aufgabe, an der Sie arbeiten, am Anfang jeder Seite.
 - Der Lösungsweg einer Aufgabe muss stets klar erkennbar sein. Anderenfalls wird die Teilaufgabe mit null Punkten bewertet.
 - Insgesamt gibt es 90 Punkte und Sie brauchen 40 Punkte um zu bestehen.
 - Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
 - Sätze aus der Vorlesungen können verwendet werden, aber die Aussage muss deutlich erklärt werden.
 - Alle Antworten sind zu begründen.
-

Aufgabe 1. Seien G und H Gruppen, $\varphi : G \rightarrow H$ eine Abbildung und $N \subset G$ eine Teilmenge.

- a) (8 Punkte) Definieren Sie die folgende Begriffe:
- i) N ist eine Untergruppe von G ,
 - ii) N ist eine normale Untergruppe von G ,
 - iii) φ ist ein Gruppenhomomorphismus,
 - iv) N ist der Kern von φ .
- b) (8 Punkte) Wenn φ ein Gruppenhomomorphismus ist, beweisen Sie, dass der Kern von φ eine normale Untergruppe von G ist.

- c) (8 Punkte) Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$Z(G) := \{g_0 \in G : gg_0 = g_0g \text{ für alle } g \in G\}$$

eine normale Untergruppe von G ist.

- d) (6 Punkte) Wenn der Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ surjektiv ist, zeigen Sie, dass

$$\varphi(Z(G)) \subset Z(H).$$

Zeigen Sie, dass diese Aussage ohne die Annahme der Surjektivität von φ nicht gilt (z.B. betrachten Sie einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : S_2 \rightarrow S_3$).

Aufgabe 2.

- a) (10 Punkte) Sei K ein Körper und $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ und $b \in \text{Mat}_{m \times 1}(K)$. Definieren Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A, \mathbf{b})$ des zugehörigen linearen Gleichungssystems. Beweisen Sie, dass $\mathcal{L}(A, \mathbf{0})$ ein Untervektorraum von K^n ist.

- b) (8 Punkte) Beweisen Sie, dass für $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ die Abbildung $F_A : K^n \rightarrow K^m$

$$F_A(x) = Ax \quad \text{für } x \in K^n$$

eine lineare Abbildung ist. Wie kann man den Kern und das Bild von F_A mit den Lösungsmengen $\mathcal{L}(A, \mathbf{b})$ ausdrücken?

- c) (12 Punkte) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_\beta := \begin{pmatrix} -1 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für alle $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ berechnen Sie $\mathcal{L}(A_\alpha, \mathbf{b}_\beta)$ in Abhängigkeit von α und β .

[Sie sollten die verschiedenen Fälle, die abhängig von α und β sind, unterscheiden (keine Lösung, genau eine Lösung, oder unendliche viele Lösungen).]

Aufgabe 3. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien v_1, \dots, v_n Vektoren aus V .

- (6 Punkte) Definieren Sie den Spann, $\text{Span}(v_1, \dots, v_n)$, von v_1, \dots, v_n . Geben Sie die Definition der linearen Unabhängigkeit für die Vektoren v_1, \dots, v_n .
- (8 Punkte) Wenn v_1, \dots, v_n linear unabhängig sind und $w \in V$, beweisen Sie, dass $w \notin \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ genau dann, wenn v_1, \dots, v_n, w linear unabhängig sind.
- (8 Punkte) Wenn $v_1, v_2, v_3 \in V$ linear unabhängig sind, beweisen Sie für alle $1 \leq i \neq j \leq 3$, dass v_i, v_j linear unabhängig sind. Gilt die gegensätzliche Implikation?
- (8 Punkte) Sei $M := \{f \in K[t] : \text{Grad von } f \text{ ist gerade}\} \subset K[t]$. Ist M ein Untervektorraum von $K[t]$? Beweisen Sie, dass $\text{Span}(M) = K[t]$ und finden Sie eine Basis \mathcal{B} von $K[t]$ mit $\mathcal{B} \subset M$.

[Sie dürfen annehmen, dass $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von $K[t]$ ist.]

Aufgabe 4. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K .

- (8 Punkte) Definieren Sie einen linearen Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$. Geben Sie die Definition für den Kern und das Bild von f . Beweisen Sie, dass $\text{Bild}(f)$ ein Untervektorraum von V ist.
- (5 Punkte) Formulieren Sie die Dimensionsformel für $f \in \text{End}_K(V)$.
- (9 Punkte) Für $f \in \text{End}_K(V)$ beweisen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:
 - $\text{Bild}(f^2) = \text{Bild}(f)$,
 - $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$,
 - $\text{Bild}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_V\}$.
- (4 Punkte) Wenn eine dieser äquivalenten Bedingungen in c) gilt, zeigen Sie, dass $V = \text{Ker}(f) \oplus \text{Bild}(f)$.

[Sie können annehmen, dass

$$\dim_K(U_1 + U_2) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) - \dim_K(U_1 \cap U_2)$$

für zwei Untervektorräumen U_1 und U_2 eines endlichdimensionalen K -Vektorraumes V .]

- (4 Punkte) Geben Sie ein Beispiel eines K -Vektorraumes V mit einem Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$, so dass die obige Bedingungen in c) nicht gelten.