

ANALYSIS I: LEHRPLAN

VICTORIA HOSKINS

1. ZAHLEN

1.1. **Überblick.** (19.04) Der naive Aufbau der reellen Zahlen.

Referenz: [B] §1.1.

1.2. **Mengenlehre.** (19.04) Definitionen: Mengen, Mengenoperation und Abbildungen.

Referenz: [B] §1.2.

1.3. **Die natürliche Zahlen und die vollständige Induktion.** (21.04 - 26.04) Die Dedekind-Peano Axiome, die natürliche Zahlen \mathbb{N} , das Prinzip der vollständigen Induktion und Rekursiv Definitionen (keiner Beweis des Dedekindscher Rekursionssatzes). Die Addition und Multiplikation auf \mathbb{N} , Innere Kompositionen (Assoziativität und Kommutativität und neutrales Element).
Referenz: [B] §1.5 und 1.11.

1.4. **Die ganze Zahlen.** (26.04) Äquivalenzrelationen, der Aufbau der ganzen Zahlen \mathbb{Z} , die Addition und Multiplikation auf \mathbb{Z} .

Referenz: [B] §1.6 und 1.11.

1.5. **Die rationale Zahlen und Ordnungen.** (28.04) Der Aufbau der rationalen Zahlen \mathbb{Q} und die Addition und Multiplikation auf \mathbb{Q} . Ordnungen und angeordnete Körper, \mathbb{Q} ist einen angeordneten Körper, und das Archimedische axiom für \mathbb{Q} .

Referenz: [B] §1.3-1.4,1.6-1.7 und 1.11.

1.6. **Vollständigkeit.** (28.04 - 03.05) Die Definition des Supremums und des Infimums, der Begriff des Vollständigkeit, \mathbb{Q} ist nicht vollständig, Dedekindsche Schnitte (nicht Klausur-relevant).

Referenz: [B] §1.8, 1.11 und 2.3.

1.7. **Die reelle Zahlen.** (03.05) Der Aufbau der reellen Zahlen \mathbb{R} (nicht Klausur-relevant), die Vollständigkeit von \mathbb{R} (keiner Beweis), die Axiomsystem von \mathbb{R} , das Achimedische Axiom für \mathbb{R} (keiner Beweis).

Referenz: [B] §1.8 und 1.11.

1.8. **Mächtigkeiten.** (10.05) Die Kardinalzahl, (über)abzählbar, \mathbb{Q} ist abzählbar unendlich - Cantorsches Diagonalverfahren (keiner Beweis), \mathbb{R} ist überabzählbar (keiner Beweis).

Referenz: [B] §1.10.

2. FOLGEN UND REIHEN

2.1. **Folgen.** Definitionen: Folgen, Teilfolgen.

Referenz: [B] §2.1.

2.2. **Konvergenz.** (10.05) Der Begriff der Konvergenz und der Grenzwerte. Eindeutigkeit des Grenzwerts und Rechenregeln für Grenzwerte. Beschränkte Folge und der Satz: jede konvergente Folge ist beschränkt. Der Satz: Monotonieverhalten des Grenzwerts und das Sandwich-Lemma.

Referenz: [B] §2.2.

2.3. Satz von Bolzano–Weierstraß. (10.05-12.05) Definitionen: (streng) monoton wachsend (s).m.w. und (streng) monoton fallend (s).m.f. Folgen. Satz: eine nach oben (bzw. nach unten) beschränkte m.w. (bzw. m.f.) Folge reeller Zahlen ist konvergent. Der Satz: jede Folge reeller Zahlen hat eine Teilfolge, die s.m.w. oder m.f. ist (keiner Beweis). Der Satz von Bolzano–Weierstraß.

Referenz: [B] §3.2.

2.4. Cauchy-Folgen. (12.05) Definition von Cauchy-Folgen und der Satz: eine Folge reeller Zahlen ist konvergent genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Das Lemma: die Summe und das Produkt von Cauchy-Folgen sind Cauchy-Folgen.

Referenz: [B] §2.3.

2.5. Vollständigkeit und Cauchy-Folgen. (12.05) Der Satz über die äquivalente Charakterisierungen der Vollständigkeit (nicht Klausur-relevant). Der zweite Aufbau der reellen Zahlen mit Cauchy-Folgen in \mathbb{Q} (nicht Klausur-relevant).

Referenz: [B] §2.3.

2.6. Konvergenz gegen $\pm\infty$. (17.05) Die Definition. Der Satz: wenn $a_n \rightarrow \pm\infty$, dann $\exists N \in \mathbb{N}$ so dass $(1/a_n)_{n \geq N}$ wohldefiniert und eine Nullfolge ist.

[AE] Kapitel II §5.

2.7. Reihen. (17.05) Reihen und die Definition der Konvergenz einer Reihe. Die geometrische Reihe und die (alternierende) harmonische Reihe. Der Satz: die Summe von konvergente Reihen ist konvergent.

Referenz: [B] §2.4.

2.8. Konvergenzkriterien für Reihen. (19.05) Das Cauchy-Kriterium und die Korollare. Das Leibniz-Kriterium für alternierender Reihen.

Referenz: [B] §2.4.

2.9. Absolute Konvergenz und Konvergenzkriterien. (24.05) Definition von absolute Konvergenz für Reihen und das Lemma: eine absolut konvergente Reihe ist konvergent (Bemerkung: die Umkehrung ist falsch). Das Majorantenkriterium, das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium. Der Satz: Umordnung absolut konvergenter Reihen (nicht Klausur-relevant).

Referenz: [B] §2.4.

2.10. Das Cauchy-Produkt. (24.05) Definition des Cauchy-Produkts und der Satz über das Cauchy-Produkt (keiner Beweis).

Referenz: [B] §2.4.

3. STETIGKEIT

3.1. Stetige reelle Funktionen. (26.05) Die Folge-Definition der Stetigkeit, die (ϵ, δ) -Definition und die Umgebung-Definition; der Satz: diese Definitionen sind äquivalent. Rechenregeln für stetige Funktionen und der Satz: die Komposition von stetigen Funktionen ist stetig.

Referenz: [B] §3.3.

3.2. Sätze über stetige Funktionen. (31.05) Nullstelle von Funktionen und der Satz (Existenz von Nullstellen). Der Zwischenwertsatz und die Existenz von Minima und Maxima. Der Satz: die Umkehrfunktion von einer s.m.w (bzw. s.m.f) stetige Funktion (keiner Beweis). Lipschitzabbildungen und gleichmäßig Stetigkeit. Der Satz: jede stetige Funktion auf einer abgeschlossen Intervall ist gleichmäßig stetig.

Referenz: [B] §3.3.

3.3. Funktionenfolgen. (02.06) Funktionenfolgen und punktweise- und gleichmäßige Konvergenz. Der Satz: der Grenzwert einer Funktionenfolge der stetige Funktionen, die gleichmäßig konvergent ist, ist stetig. [AE] Kapitel V §1-2.

3.4. Potenzreihen. (02.06) Definition von Potenzreihen und der Konvergenzradius einer Potenzreihe und der Satz und das Korollar über die gleichmäßige Konvergenz einer Potenzreihe. Der Satz: Eine Potenzreihe ist stetig auf der offenen Kugel um Entwicklungspunkt mit Radius der Konvergenzradius.

Referenz: [B] §4.4.

3.5. Neue Funktionen. (07.06) Definition: die Exponentialfunktion, der Sinus und der Kosinus als Potenzreihen und alle drei Potenzreihen haben den Konvergenzradius unendlich (alle drei Funktionen sind stetig). Der Binomische Lehrsatz und die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. Der Satz: Eigenschaften der Exponentialfunktion. Der natürlicher Logarithmus und die Stetigkeit von Log.

Referenz: [B] §4.5.

3.6. Metrische Räume und Stetigkeit. (09.06) Definitionen: metrischer Raum, offen und abgeschlossen Mengen in einem metrischen Raum.

Referenz: [B] §3.1.

3.7. Folgen und Stetigkeit in einem Metrischen Raum. Definitionen: Konvergenz einer Folge in einem metrischen Raum und stetige Funktionen zwischen metrische Räume. Der Satz über die äquivalente Charakterisierungen der Stetigkeit (keiner Beweis).

Referenz: [B] §3.3.

3.8. Kompaktheit. Der Begriff der Kompaktheit. Der Satz: eine Teilmenge A eines metrischen Raums M ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede Folge in A , die konvergent in M ist, der Grenzwert in A ist. Der Satz: eine Teilmenge von \mathbb{R} ist Kompakt genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist (keiner Beweis). Der Satz: das Bild einer kompakte Teilmenge eines metrischen Raums unter eine stetige Funktion ist kompakt.

Referenz: [B] §3.2.

4. DIFFERENTIATION

4.1. Differenzierbarkeit. (14.06) Definition der Differenzierbarkeit und die Ableitung einer differenzierbare Funktion.

Referenz: [B] §4.1.

4.2. Ableitungsregeln. (14.06-16.06) Die Summe-, Produkt- und Quotientenregeln, die Kettenregel und die Ableitung einer Umkehrfunktion.

Referenz: [B] §4.1.

4.3. Mittelwertsatz. (16.06-21.06) Definition: lokales/globales Minimum/Maximum. Der Satz von Rolle, der Mittelwertsatz, ein Korollar des Mittelwertsatz (für zwei differenzierbare Funktionen), und noch ein Korollar (Konsequenz von $f' = 0$, $f' > 0$ u.s.w.). L'Hôpitalischen Regeln (Zwei Fällen: $0/0$ und ∞/∞) - keiner Beweis.

Referenz: [B] §4.2.

4.4. Höhere Ableitungen und Taylorpolynome. (23.06) Definition der höheren Ableitungen und Taylorpolynome. Satz von Taylor (Restgliedformel) - keiner Beweis. Hinreichende Bedingungen für ein lokales Maximum/Minimum.

Referenz: [B] §4.3.

4.5. Differentiation von Potenzreihen. (28.06) Satz über die Differentiation für Funktionenfolgen (keiner Beweis), Satz über die Differentiation der Potenzreihen (keiner Beweis). Die Potenzreihen \exp , \sin und \cos sind differenzierbar (und ihre Ableitungen) und \log ist differenzierbar auf $(0, \infty)$.

Referenz: [B] §4.4.

4.6. Die Zahl π . (30.06) Die Additionsregeln für den Sinus und den Kosinus, die Definition von $\pi/2$ (als kleinste positive Nullstelle von \cos), der Satz über die Nullstellen von \sin und \cos .

Referenz: [B] §4.5.

5. INTEGRATION

Dieses Kapitel ist nur für die Nachklausur relevant.

5.1. Riemannische Integral. (05.07-07.07) Definition einer Treppenfunktion, das Integral einer Treppenfunktion und Eigenschaften. Definitionen: das Ober- und Unterintegral, Integrierbarkeit. Das Lemma: Charakterisierung der Integrierbarkeit. Der Sätze: eine stetige (bzw. m.f. oder m.w.) Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist integrierbar. Der Satz: Eigenschaften des Integrals. Der Satz: der Betrag einer integrierbaren Funktion ist integrierbar und das Produkt integrierbarer Funktionen ist integrierbar.

[AE] Kapitel VI §1, §3

5.2. Mittelwertsatz der Integralrechnung. (12.07) Der Mittelwertsatz.

[AE] Kapitel VI §4

5.3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. (12.07) Stammfunktion und der Hauptsatz.

[AE] Kapitel VI §4

5.4. Integrationsregeln. (14.07) Die Substitutionsregel und partielle Integration.

[AE] Kapitel VI §5

6. LITERATUR

[AE] H. Amann und J. Escher 'Analysis I-III' Birkhäuser.

[B] E. Behrends 'Analysis Band 1' (6. Auflage), Springer Spektrum.

Freie Universität Berlin, Arnimallee 3, Raum 011, 14195 Berlin, Germany

hoskins@math.fu-berlin.de