Übungen zur Vorlesung ‘Lineare Algebra II’

V. Hoskins (SS 2018)

Übungsblatt 13 - Bonusblatt

Abgabe: Bis Montag, den 16.07.2018, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Für $R = \mathbb{Z}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) $\langle n, m \rangle = \langle \mathrm{ggT}(n, m) \rangle$,

b) $\langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ ist ein Hauptideal (wobei $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$).

c) $\langle m \rangle$ ist genau dann ein Primideal, wenn entweder $m = 0$ oder $m = p$ prim ist.

Was sind die Ideale von $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n)$?

Aufgabe 2. (10 Punkte)

a) Beweisen sie, dass der Durchschnitt einer Familie $(I_j)_{j \in J}$ von Idealen eines Rings R auch ein Ideal von R ist.

b) Für eine Teilmenge A eines kommutativen Rings R beweisen Sie

$$\langle A \rangle = \bigcap_{\substack{A \subset J \subset R \\ J \text{ Ideal}}} J.$$

d.h. $\langle A \rangle$ ist das kleinste Ideal in R, das A enthält.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Für ein Ideal I eines komm. Rings R mit Eins beweisen Sie:

a) I ist genau dann ein maximales Ideal, wenn R/I ein Körper ist.

b) I ist genau dann ein Primideal, wenn R/I ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 4. (10 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und M ein R-Modul. Beweisen Sie:

a) $0_R \cdot m = 0_M$ für alle $m \in M$.

b) $r \cdot 0_M = 0_M$ für alle $r \in R$.

c) $(-1_R) \cdot m = -m$ (das additive inverses Element von m) für alle $m \in M$.

d) Wenn $r \cdot m = 0_M$ für $m \neq 0_M$, beweisen Sie, dass r nicht invertierbar (für die Multiplikation auf R) ist.