Übungen zur Vorlesung ‘Lineare Algebra II’

V. Hoskins (SS 2018)

Übungsblatt 12

Abgabe: Bis Montag, den 09.07.2018, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Endomorphismus (bzgl. zum Standardskalarprodukt). Beweisen Sie, dass es eine orthonormale Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ gibt mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & D_\theta \end{pmatrix}$$

wobei $\delta = \pm 1$ und $D_\theta \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ eine Drehung mit Winkel θ ist.

Aufgabe 2. (10 Punkte) Finden Sie ein quadratisches Polynom in Normalform, die kartesisch äquivalent zum folgenden reellen quadratischen Polynom Q ist

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 1.$$

Zeichnen Sie den Kegelschnitt in Normalform und den originalen Kegelschnitt.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Finden Sie ein quadratisches Polynom in Normalform, die kartesisch äquivalent zum folgenden reellen quadratischen Polynom Q ist

$$Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2 + 14x_1 + 2x_2 + 5.$$

Zeichnen Sie den Kegelschnitt in Normalform und den originalen Kegelschnitt.

Aufgabe 4. (10 Punkte) Sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring mit Eins. Beweisen Sie, dass R genau dann ein Körper ist, wenn die einzigen Ideale (von R) genau $\{0_R\}$ und R sind.

Aufgabe 5. (Bonus: 10 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Beweisen Sie, dass jedes Ideal I von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ die Form $I = \mathrm{Mat}_{n\times n}(J)$ hat, wobei J ein eindeutig bestimmtes Ideal von R ist.

[Hinweis: Wenn I ein Ideal von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ ist, sei $J := \{r \in R : \exists A \in I \text{ mit } r = a_{11}\}$ und beweisen Sie, dass J ein Ideal von R ist und $I = \mathrm{Mat}_{n\times n}(J)$ (z.B. betrachten der Links- und Rechtsmultiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}).]