LINEARE ALGEBRA II : PROBEKLAUSUR

PRÜFUNGSFRAGEN

V. Hoskins, D. Bunnett

Anweisungen:

- Es gibt 4 Aufgaben, von denen Sie **genau 3 Aufgaben** bearbeiten müssen. Lesen Sie alle Aufgaben und wählen Sie dann die 3 Aufgaben, die Sie bearbeiten wollen.
- Beantworten Sie die Aufgaben im Antwortheft. Schreiben Sie die Nummer der Aufgabe, an der Sie arbeiten, am Anfang jeder Seite.
- Der Lösungsweg einer Aufgabe muss stets klar erkennbar sein. Anderenfalls wird die Teilaufgabe mit null Punkten bewertet.
- Insgesamt gibt es 90 Punkte und Sie brauchen 40 Punkte um zu bestehen.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Sätze aus der Vorlesungen können verwendet werden, aber die Aussage muss deutlich erklärt werden.
- Alle Antworten sind zu begründen.

Aufgabe 1. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein linearer Endomorphismus.

a) (7 Punkte) Definieren Sie das charakteristische Polynom $\chi_f(t)$ von f und beweisen Sie, dass die Nullstellen von $\chi_f(t)$ genau die Eigenwerte von f sind.

b) (6 Punkte) Geben Sie (ohne Beweis) äquivalente Bedingungen, die das charakteristische Polynom $\chi_f(t)$ von f beinhalten, für i) die Diagonalisierbarkeit und ii) die Trigonalisierbarkeit von f.

c) (5 Punkte) Finden Sie zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, so dass $\chi_A(t) = \chi_B(t)$, aber $m_A(t) \neq m_B(t)$.

d) (12 Punkte) Für $V = K^2$ und die Abbildung $f \in \mathrm{End}_K(V)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

berechnen Sie das charakteristische Polynom von f. Ist f diagonalisierbar (bzw. triagonalisierbar) über den folgenden Körpern:

i) $K = \mathbb{F}_3$,
ii) $K = \mathbb{F}_5$,
iii) $K = \mathbb{R}$,
iv) $K = \mathbb{C}$.

Aufgabe 2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

a) (6 Punkte) Definieren Sie den Hauptraum $\mathrm{Hau}(f, \lambda)$ eines Eigenwerts λ von f mit algebraischen Vielfachheit $\mu_a(f, \lambda)$ und beweisen Sie, dass der Eigenraum $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ eine Teilmenge von $\mathrm{Hau}(f, \lambda)$ ist.

b) (6 Punkte) Formulieren Sie den Satz über die Jordan-Zerlegung für einen linearen Endomorphismus $f : V \to V$.

c) (8 Punkte) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Haupträume für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

d) (7 Punkte) Finden Sie eine nilpotente obere Dreiecksmatrix N, eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix P, so dass $P^{-1}AP = D + N$, wobei A die obige Matrix ist.

e) (3 Punkte) Was ist das Minimalpolynom von A? Erklären Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit einer geordneten Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$. Sei $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$ eine Bilinearform auf V.

a) (4 Punkte) Geben Sie die Definition, dass b nicht ausgeartet ist.

b) (6 Punkte) Wenn $B := b(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ die entsprechende Matrix bzgl. der Basis $\mathcal{A}$ ist, beweisen Sie, dass für alle $v, v' \in V$ gilt
$$b(v, v') = \Phi_{\mathcal{A}}(v)^t B \Phi_{\mathcal{A}}(v'),$$
wobei $\Phi_{\mathcal{A}} : V \to K^n$ der lineare Isomorphismus mit $\Phi_{\mathcal{A}}(v_i) = e_i$ für $1 \leq i \leq n$ ist.

c) (6 Punkte) Für $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$ und $B := b(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ beweisen Sie, dass
$$V^{\perp} := \{v \in V : b(w, v) = 0 \, \forall w \in V\}$$
genau dann der Nullvektor ist, wenn die Lösungsmenge $\mathcal{L}(B, \mathbf{0}) = \{x \in K^n : Bx = \mathbf{0}\}$ gleich der Nullvektor ist.

d) (6 Punkte) Finden Sie eine Matrix $C \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$, so dass
$${}^{\perp}V = \{0_v\} \iff \mathcal{L}(C, \mathbf{0}) = \{0\}.$$

e) (8 Punkte) Beweisen Sie, dass $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$ genau dann nicht ausgeartet ist, wenn $B := b(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ invertierbar ist.

Aufgabe 4. Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum.

a) (4 Punkte) Sei $v_1, \cdots, v_n$ eine Familie von Vektoren aus V. Geben Sie die Definition, dass diese Familie orthogonal bzw. orthonormal (bzgl. $\langle -, - \rangle$) ist.

b) (4 Punkte) Wenn $v_1, \cdots, v_n$ eine orthogonale Familie von nicht-Null Vektoren aus V ist, beweisen Sie, dass diese Familie linear unabhängig ist.

c) (6 Punkte) Sei $w_1, \cdots, w_n$ eine orthonormale Familie von nicht-Null Vektoren aus V und $v \notin \mathrm{Span}(w_1, \cdots, w_n)$. Sei $u := v - \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie $\langle w_i, u \rangle$ und erklären Sie, wie man λ_i wählen kann, so dass $\{w_1, \dots, w_n, u\}$ eine orthogonale Familie ist.

d) (8 Punkte) Formulieren Sie und beweisen Sie den Satz über das Verfahren von Gram-Schmidt.

e) (8 Punkte) Für das Skalarprodukt auf $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2} := \{P(t) : \mathrm{grad}(P) \leq 2\}$, das durch
$$\langle P(t), Q(t) \rangle := \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$
definiert wird, verwenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren zu der Basis $\mathcal{A} = \{1, t, t^2\}$ um eine ON-Basis zu finden.