Übungen zur Vorlesung 'Analysis I'

V. Hoskins, V. Trageser (SS 2016)

Übungsblatt 5

Abgabe: Bis Freitag, den 20.05.2016, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (12 Punkte) Welche dieser Folgen konvergiert? Wenn die Folge konvergiert, berechnen Sie den Grenzwert.

$a)\quad \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\geq 0} \qquad b)\quad \left(\frac{2^n+1}{2^n-1}\right)_{n\geq 1}$

$c)\quad \left(\frac{7n^2+8}{4n^2-3n+1}\right)_{n\geq 0} \qquad d)\quad \left((-1)^n\frac{n^2+1}{8n+2}\right)_{n\geq 0}$

$e)\quad (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})_{n\geq 0} \qquad f)\quad \left(\frac{1+\cdots+n}{n^2}\right)_{n\geq 1}.$

Aufgabe 2. (8 Punkte) Es seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ Folgen und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$, so dass $a_n \to a$ und $b_n \to b$, wenn $n \to \infty$. Beweisen Sie:

a) Es gibt $m \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt.

b) Es gibt $m' \in \mathbb{N}$, so dass $bb_n > b^2/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m'$ gilt.

c) Die Folge $(\frac{1}{b_n})_{n\geq m}$ gegen $\frac{1}{b}$ konvergiert.

d) Die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq m}$ gegen $\frac{a}{b}$ konvergiert.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Für $r \in \mathbb{R}$, betrachten Sie die Folge $(r^n)_{n\geq 0}$.

a) Für $|r| < 1$, beweisen Sie, dass $(r^n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist.

b) Was passiert für $|r| = 1$?

c) Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, beweisen Sie $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $n \in \mathbb{N}$.

d) Für $|r| > 1$, beweisen Sie, dass $(r^n)_{n\geq 0}$ divergent ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 4. (10 Punkte) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ durch

$$\begin{aligned} a_0 &:= 1, \\ a_{n+1} &:= \tfrac{1}{2}\left(a_n + \tfrac{x}{a_n}\right) \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie:

a) $a_n^2 \geq x$ für $n \geq 1$.
b) Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend.
c) Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gegen eine reelle Zahl a.
d) Der Grenzwert a erfüllt die Ungleichung: $a^2 \geq x$.
e) $a^2 = x$.

Hinweis für e): betrachten Sie die Folge $b_n := \frac{1}{2}(a_n + x/a_n)$.