Übungen zur Vorlesung 'Analysis I'

V. Hoskins, V. Trageser (SS 2016)

Übungsblatt 4

Abgabe: Bis Freitag, den 13.05.2016, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (8 Punkte) Beweisen Sie, dass jede nicht leere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ ein Infimum $\mathrm{Inf}\,(M) \in M$ hat.

Aufgabe 2. (12 Punkte) Sei $K := \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Beweisen Sie, dass K mit der Addition $+ : K \times K \to K$

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

und der Multiplikation $\cdot\ : K \times K \to K$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}$$

ein Körper ist. Zeigen Sie, dass es zwei Ordnungen $\leq_1$ und $\leq_2$ auf K gibt:

$$(a + b\sqrt{2}) \leq_1 (c + d\sqrt{2}) :\iff (a - c) + (b - d)\sqrt{2} \leq 0$$

und

$$(a + b\sqrt{2}) \leq_2 (c + d\sqrt{2}) :\iff (a - c) - (b - d)\sqrt{2} \leq 0,$$

wobei $\leq$ die Ordnung auf $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Seien N und M endliche Mengen. Beweisen Sie:

a) Wenn $f : M \to N$ eine injektive Abbildung ist, gilt $|M| \leq |N|$.

b) Wenn $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung ist, gilt $|M| \geq |N|$.

Aufgabe 4. (10 Punkte) Beweisen Sie:

a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.

b) Die Menge $\{M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : |M| = n\}$ ist abzählbar.

c) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.