Übungen zur Vorlesung 'Analysis I'

V. Hoskins, V. Trageser (SS 2016)

Übungsblatt 3

Abgabe: Bis Freitag, den 06.05.2016, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (4 + 8 Punkte) Es sei M eine Menge. Zur Erinnerung: die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M ist die Menge aller Teilmengen von M.

a) Beweisen Sie, dass die innere Kompositionen

$$\cup : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M) \quad \text{und} \quad \cap : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$$

neutrale Elemente haben.

b) Sei $A \subset M$ eine Teilmenge. Beweisen Sie, dass die folgenden Relationen auf $\mathcal{P}(M)$ Äquivalenzrelationen sind:

i) $B \sim_1 C \quad :\Longleftrightarrow \quad B \cap A = C \cap A$,

ii) $B \sim_2 C \quad :\Longleftrightarrow \quad B \cup A = C \cup A$,

wobei $B, C \in \mathcal{P}(M)$. Zeigen sie, dass bijektive Abbildungen

$$f_1 : \mathcal{P}(M)/{\sim_1} \to \mathcal{P}(A) \quad \text{und} \quad f_2 : \mathcal{P}(M)/{\sim_2} \to \mathcal{P}(M \backslash A)$$

existieren.

Aufgabe 2. (8 Punkte) Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Beweisen Sie, dass die Relation auf A

$$(\text{für} \quad a, a' \in A) \quad a \sim a' \quad :\Longleftrightarrow \quad f(a) = f(a')$$

eine Äquivalenzrelation ist. Was kann man über f schließen, wenn alle die Äquivalenzklassen einelemente Mengen sind?

Aufgabe 3. (10 Punkte) Welche der folgenden Relationen auf $\mathbb{N}$ sind reflexiv, welche sind symmetrisch und welche sind transitiv? Es seien $n, m \in \mathbb{N}$:

a) $n \sim m \quad :\Longleftrightarrow \quad n = m$,

b) $n \sim m \quad :\Longleftrightarrow \quad n \mid m$ ('n teilt m' d.h. $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $m = kn$),

c) $n \sim m \quad :\Longleftrightarrow \quad n \nmid m$,

d) $n \sim m \quad :\Longleftrightarrow$ die Reste von n und m nach der Division durch 2016 sind gleich.

e) $n \sim m \quad :\Longleftrightarrow$ $\mathrm{ggT}(n, m) > 2016$ (hier $\mathrm{ggT}(n, m)$ ist 'der größte gemeinsame Teiler': die größte natürliche Zahl, durch die sich beide Zahlen ohne Rest teilen lassen).

Aufgabe 4. (5 + 5 Punkte)

a) Sei $f : A \to \mathbb{N}$ eine injektive Abbildung von einer Menge A nach $\mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die folgende Relation auf A eine Ordnung ist

$$\text{für } a, b \in A : \quad a \leq b \quad :\Longleftrightarrow \quad f(a) \leq f(b).$$

b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$\text{für } n, m \in \mathbb{N} : \quad n < m \quad \Longrightarrow \quad f(n) < f(m)$$

(solch eine Abbildung wird als eine strikt monoton wachsende Abbildung bezeichnet). Beweisen Sie, dass f injektiv ist.