

# Übungen zur Vorlesung ‘Analysis I’

V. Hoskins, V. Trageser (SS 2016)

## Übungsblatt 12

Abgabe: Bis Freitag, den 08.07.2016, 16 Uhr.

**Aufgabe 1.** (12 Punkte) Wir definieren den Hyperbolische Sinus,  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , und den Hyperbolische Kosinus,  $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , durch

$$\sinh(x) := \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) := \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$

- Stellen Sie die beiden Funktionen als Potenzreihen dar.
- Beweisen Sie, dass  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- Beweisen Sie, dass  $\text{Bild}(\sinh) = \mathbb{R}$  und  $\text{Bild}(\cosh) = [1, \infty)$ .
- Zeigen Sie, dass  $\sinh$  und  $\cosh$  differenzierbar sind und berechnen Sie ihre Ableitung.
- Überprüfen Sie, dass die Funktion  $\text{arcsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{arcsinh}(x) := \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

die Umkehrfunktion von  $\sinh$  ist und berechnen Sie ihre Ableitung.

**Aufgabe 2.** (10 Punkte) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- Wenn  $f$  differenzierbar ist mit  $f'(x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , beweisen Sie dass, es eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$  gibt mit  $f(x) = C \exp(x)$ . [Hinweis: Berechnen Sie die Ableitung der Funktion  $F(x) := f(x) \exp(-x)$ ]
- Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Wenn  $f$  differenzierbar ist mit  $f'(x) = af(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , beweisen Sie dass  $f(x) = C \exp(ax)$  für eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$ .
- Wenn  $f$  zwei mal differenzierbar ist mit  $f''(x) = 5f'(x) - 6f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , beweisen Sie, dass  $f(x) = A \exp(2x) + B \exp(3x)$  für Konstanten  $A, B \in \mathbb{R}$ . [Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen  $g(x) = f'(x) - 2f(x)$  und  $h(x) = f'(x) - 3f(x)$ .]

**Aufgabe 3.** (8 Punkte) Berechnen Sie die Taylorpolynome der folgenden Funktionen bei  $x_0 = 0$  für  $n = 3$ .

- $f(x) := \sin(x^2) - (\sin(x))^2$ ,
- $g(x) := \exp(ax) \cos(bx)$  (für  $a, b \in \mathbb{R}$ ).

Bitte wenden!

**Aufgabe 4.** (10 Punkte) Durch Anwendung der l'Hôpitalische Regeln (wenn sie anwendbar ist), bestimmen Sie die folgenden Limites.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x/100)}{x},$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp(x),$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x-1},$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^2}.$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos(x))}{x^2}.$