Übungen zur Vorlesung 'Analysis I'

V. Hoskins, V. Trageser (SS 2016)

Übungsblatt 10

Abgabe: Bis Freitag, den 24.06.2016, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sei $n, p \in \mathbb{N}^*$. Auf $\mathbb{R}^n$ definieren wir die Metrik d_p and d_∞ durch

$$d_p((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}$$

und

$$d_\infty((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt[p]{n}} d_p(x, y) \leq d_\infty(x, y) \leq d_p(x, y).$$

Beweisen Sie, dass eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist in dem Metrischen Raum $(\mathbb{R}^n, d_p)$ genau dann, wenn sie offen in dem Metrischen Raum $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ ist.

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei $(\mathbb{R}^n, d)$ die Menge $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidische Metrik $d := d_2$. Beweisen Sie, dass die folgende Funktionen stetig sind.

a) $f : (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^n, d)$, die durch $f(x) := d(x, 0)x$ definiert wird.

b) $f : (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}, d)$, die durch $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ definiert wird.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Beweisen Sie:

a) $\lim_{h \to 0} h \sin(1/h) = 0$.

b) Die Funtkion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

ist stetig.

c) $\lim_{h \to 0} \sin(1/h)$ existiert nicht.

d) f ist nicht bei 0 differenzierbar.

Bitte wenden!

Aufgabe 4. (10 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die differenzierbar bei $a \in \mathbb{R}$ ist, mit $f(a) = 0$.

a) Wenn $f'(a) > 0$ gilt, dann gibt es $\delta > 0$ so dass $f(x) > f(a)$ gilt für alle x mit $a < x < a + \delta$.

b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $g(x) := |f(x)|$. Beweisen Sie, dass g differenzierbar bei a ist genau dann, wenn $f'(a) = 0$.