

Übungen zur Vorlesung ‘Analysis I’

V. Hoskins, V. Trageser (SS 2016)

Übungsblatt 1

Abgabe: Bis Montag, den 25.04.2016, 10 Uhr.

Aufgabe 1.(2+2+3+3 Punkte) Es sei M eine Menge und $A, B, C \subset M$ Teilmengen. Beweisen Sie:

- i) ‘ \cup ist kommutativ’: $A \cup B = B \cup A$.
- ii) ‘ \cup ist assoziativ’: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- iii) ‘ \cup hat ein neutrales Element’: es gibt eine Teilmenge von M , deren Vereinigung mit jeder Teilmenge $A \subset M$ die gleiche Menge A ergibt.
- iv) ‘Distributivgesetze’: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Aufgabe 2.(4+3+3 Punkte) Es seien M, N Mengen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Beweise Sie die folgenden Aussagen:

- i) Wenn f bijektiv ist, existiert es eine Umkehrfunktion $f^{-1} : N \rightarrow M$ so dass $f^{-1} \circ f = \text{Id}_M$ und $f \circ f^{-1} = \text{Id}_N$.
- ii) f ist surjektiv genau dann, wenn eine Abbildung $f' : N \rightarrow M$ existiert, so dass $f \circ f' = \text{Id}_N$.
- iii) Sei $M \neq \emptyset$. Dann gilt: f ist injektiv genau dann, wenn eine Abbildung $f' : N \rightarrow M$ existiert, so dass $f' \circ f = \text{Id}_M$.

Aufgabe 3.(2+2+2+2+2 Punkte) Es seien M, N Mengen, $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung, $A, B \subset M$ Teilmengen und $C, D \subset N$ Teilmengen. Wir erinnern daran, dass das Urbild von einer Teilmenge $C \subset N$ unter f die Menge $f^{-1}(C) := \{m \in M : f(m) \in C\}$ ist. Beweisen Sie:

- i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- ii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- iii) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
- iv) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
- v) Geben Sie ein Beispiel, so dass $f(A \cap B)$ und $f(A) \cap f(B)$ nicht die gleiche Menge sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 4.(10 Punkte) Für $n, k \in \mathbb{N}$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ für $k \leq n$ durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

definiert. Für $n < k$ setzen wir $\binom{n}{k} := 0$. Beweisen Sie

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Durch die vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$ beweisen Sie

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

[Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Fakultät $n!$ rekursiv durch

$$0! = 1 \quad \text{und} \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

definiert.]