

Übungen zur Vorlesung ‘Algebra und Zahlentheorie’

V. Hoskins (WS 2018/2019)

Bonus Übungsblatt

Abgabe: Bis Montag, den 11.02.2019, 14 Uhr.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Finden Sie einen ggT h von

$$f(t) = t^7 - 4t^6 + t^3 - 3t + 5 \quad \text{und} \quad g(t) = 2t^3 - 2 \in \mathbb{F}_7[t]$$

und finden Sie Polynome $r, s \in \mathbb{F}_7[t]$ mit $h = rf + sg$.

Aufgabe 2. (2 + 4 + 4 Punkte) Finden Sie das Minimalpolynom von

- a) $\zeta := e^{2\pi i/5}$ über \mathbb{Q} ,
- b) $\zeta + \zeta^{-1}$ über \mathbb{Q} .
- c) ζ über $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$.

Aufgabe 3. (8 Punkte) Berechnen Sie den Grad eines Zerfällungskörpers von $f(t) = t^3 + t + 1$ über \mathbb{Q} .

[Hinweis: zeigen Sie, dass f genau eine reelle Nullstelle hat.]

Aufgabe 4. (1 + 3 + 3 + 4 + 1 Punkte) Sei L ein Zerfällungskörper von $f(t) = t^8 - 2$ über \mathbb{Q} .

- a) Warum ist L/\mathbb{Q} galoissch?
- b) Berechnen Sie $[L : \mathbb{Q}]$.
- c) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\alpha, i)$, wobei α eine Nullstelle von f ist.
- d) Finden Sie $\sigma, \tau \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ mit $|\sigma| = 8$ und $|\tau| = 2$, so dass $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau \rangle$.
- e) Berechnen Sie $L^{\langle \sigma \rangle}$ und $L^{\langle \tau \rangle}$.