Übungen zur Vorlesung ‘Algebra und Zahlentheorie’

V. Hoskins (WS 2018/2019)

Übungsblatt 9

Abgabe: Bis Montag, den 17.12.2018, 14 Uhr.

Aufgabe 1. (8 Punkte) Mit dem Reduktionskriterium zeigen Sie, dass die folgende Polynome irreduzibel sind.

a) $f(t) = t^4 + 3t^3 + t^2 - 2t + 1 \in \mathbb{Q}[t]$,

b) $g(t, x) = xt^2 + x^2t - t - x + 1 \in R[t]$ mit $R = \mathbb{Q}[x]$.

Aufgabe 2. (10 Punkte) Finden Sie Zerfällungskörper L_i der folgenden Polynom $f_i \in K[t]$ über K (Sie sollten die Zerfällungskörper mit der minimalen Anzahl von erzeugenden Elementen beschreiben) und berechnen Sie $[L_i : K]$.

a) $f_1(t) = t^4 - 1$ über $\mathbb{Q}$,

b) $f_2(t) = t^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$,

c) $f_3(t) = t^6 - 1$ über $K = \mathbb{F}_7$.

Aufgabe 3. (12 Punkte)

a) Sei $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ irreduzibel mit $\mathrm{Grad}(f) = 2$. Zeigen Sie, dass der Zerfällungskörper L von f über $\mathbb{Q}$ die Form $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ mit $n^2 \nmid d$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ hat.

b) Sei $g(t) = t^3 - 3t + 1 \in \mathbb{Q}[t]$. Beweisen Sie, dass es ein Zerfällungskörper L von f über $\mathbb{Q}$ mit $L \subset \mathbb{R}$ gibt.

Aufgabe 4. (10 Punkte) Sei L ein Zerfällungskörper über K eines Polynom $f \in K[t]$ mit $n := \mathrm{Grad}(f) \geq 1$. Beweisen Sie, dass $[L : K] \leq n!$ [Hinweis: Induktion nach n].