Übungen zur Vorlesung 'Algebra und Zahlentheorie'

V. Hoskins (WS 2018/2019)

Übungsblatt 8

Abgabe: Bis Montag, den 10.12.2018, 14 Uhr.

Aufgabe 1. (12 Punkte) Mit dem Eisensteinsches Irreduzibilitätskriterium zeigen Sie, dass die folgende Polynome $f_i(t) \in \mathbb{Q}[t]$ irreduzibel sind.

a) $f_1(t) = t^5 + 4t^2 - 6$,

b) $f_2(t) = 2t^3 + 100t^2 + 250t + 20$,

c) $f_3(t) = \frac{2}{9}t^5 - 5t^3 + 2t - \frac{1}{3}$,

d) $f_4(t) = t^3 + t^2 - 48t + 128$ [Hinweis: Betrachten Sie $f_4(t+3)$].

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei $\zeta_8 = e^{2\pi i/8} \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta_8) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.

b) Berechnen Sie $[\mathbb{Q}(\zeta_8) : \mathbb{Q}]$.

c) Finden Sie das Minimalpolynom von ζ_8 über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3. (8 Punkte) Seien $p \neq q$ Primzahlen. Beweisen Sie, dass

$$f(t) = t^4 - 2(p+q)t^2 + (p-q)^2 \in \mathbb{Q}[t]$$

irreduzibel ist.

[Hinweis: Zeigen Sie, dass $f(t)$ das Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$ von $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ ist].

Aufgabe 4. (10 Punkte) Für den algebraischen Abschluss

$$\overline{\mathbb{Q}} := \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \text{ ist algebraisch über } \mathbb{Q}\}$$

von $\mathbb{Q}$ berechnen Sie $[\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}]$.