

# Übungen zur Vorlesung ‘Algebra und Zahlentheorie’

V. Hoskins (WS 2018/2019)

## Übungsblatt 7

Abgabe: Bis Montag, den 03.12.2018, 14 Uhr.

**Aufgabe 1.** (10 Punkte) Sei  $K$  ein Körper mit Charakteristik  $p > 0$ .

- a) Beweisen Sie, dass  $(a + b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a, b \in K$ .
- b) Beweisen Sie, dass die Abbildung  $F : K \rightarrow K$  mit  $F(a) = a^p$  ein Körperhomomorphismus ist.

**Aufgabe 2.** (8 Punkte) Zeigen Sie, dass eine Körpererweiterung  $K \subset L$  mit  $[L : K] = p$  für eine Primzahl  $p$  einfach ist.

**Aufgabe 3.** (12 Punkte) Für Primzahlen  $p \neq q$  beweisen Sie, dass

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p} + \sqrt{q})$$

und berechnen Sie den Grad  $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}]$ .

**Aufgabe 4.** (10 Punkte) Sei  $K \subset L$  eine Körpererweiterung. Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{A}_{L/K} := \{\alpha \in L : \alpha \text{ ist algebraisch über } K\}$$

eine algebraische Körpererweiterung von  $K$  ist (Insbesondere müssen Sie zeigen, dass  $\mathbb{A}_{L/K}$  ein Körper ist).