Übungen zur Vorlesung ‘Algebra und Zahlentheorie’

V. Hoskins (WS 2018/2019)

Übungsblatt 6

Abgabe: Bis Montag, den 26.11.2018, 14 Uhr.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus von Ringen gibt

$$\mathbb{R}[t]/(t^4-1) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}, \quad f(t)+(t^4-1) \mapsto (f(1), f(-1), f(i)).$$

(*Hinweis:* Chinesischer Restsatz.)

Aufgabe 2. (2 + 3 + 3 Punkte) Für die folgende Polynome in $\mathbb{Q}[t]$ berechnen Sie:

a) $\mathrm{ggT}(t^2-4, t+2)$,

b) $\mathrm{ggT}(t^6+t^5+t^3+t+1, t^4+t^2+1)$,

c) $\mathrm{ggT}(t^6+t^5+t^3+t+1, t^4+t^3+t+1)$.

Aufgabe 3. (3 + 3 + 3 + 3 Punkte) Seien

$$f(t) = t^5+t^3+t^2+1 \quad \text{und} \quad g(t) = t^4+t^3+t-1 \in \mathbb{F}_3[t].$$

a) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(f,g) \in \mathbb{F}_3[t]$.

b) Ist $\mathrm{ggT}(f,g)$ irreduzibel in $\mathbb{F}_3[t]$?

c) Sei (f,g) das von f und g erzeugte Ideal. Ist $\mathbb{F}_3[t]/(f,g)$ ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Wie viele Elemente hat $\mathbb{F}_3[t]/(f,g)$?

Aufgabe 4. (4 + 6 Punkte) Sei R ein Integritätsbereich. Beweisen Sie, dass die folgende Relation auf $R\times(R\setminus\{0\})$ eine Äquivalenzrelation ist

$$\forall (a,b),(c,d) \in R\times(R\setminus\{0\}) : \quad (a,b)\sim(c,d) :\Longleftrightarrow ad = bc$$

Wir schreiben $\frac{a}{b} := [(a,b)]$ für die Äquivalenzklassen und $Q(R) := (R\times(R\setminus\{0\}))/\sim$ für die Menge der Äquivalenzklassen. Beweisen Sie, dass die folgende Addition und Multiplikation auf $Q(R)$ wohldefiniert sind

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Hat $\frac{a}{b} \in Q(R)\setminus\{0\}$ ein inverses Element für die Multiplikation?