Übungen zur Vorlesung 'Algebra und Zahlentheorie'

V. Hoskins (WS 2018/2019)

Übungsblatt 5

Abgabe: Bis Montag, den 19.11.2018, 14 Uhr.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sind die folgende Polynome irreduzibel?

a) $f_1(t) := t^3 + t + 1 \in \mathbb{F}_2[t]$,

b) $f_2(t) := t^4 + 1 \in \mathbb{Q}[t]$ und $\mathbb{F}_2[t]$,

c) $f_3(t) := t^2 + t + 1 \in \mathbb{F}_5[t]$ und $\mathbb{F}_7[t]$.

Aufgabe 2. (8 Punkte) Finden Sie alle irreduzible Polynome des Grads 2 in $\mathbb{F}_3[t]$.

Aufgabe 3. (2 + 2 + 8 Punkte) Die Teilmenge $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ der *Gaußschen Zahlen* ist ein Unterring (nach dem ÜB 3 Aufgabe 4).

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i]$ mit $\alpha = a + ib \mapsto \bar{\alpha} := a - ib$ ein Ringisomorphismus ist.

b) Ist $2 = 2 + i \cdot 0 \in \mathbb{Z}[i]$ ein Primelement?

c) Sei $\delta : \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ die Abbildung $\alpha = a + ib \mapsto |\alpha|^2 := \alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2$. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Z}[i], \delta)$ ein Euklidischer Ring ist.
[*Hinweis:* Zeigen Sie, dass der Abstand zwischen einer komplexen Zahl z und dem nächsten Punkt in $\mathbb{Z}[i]$ höchstens $\sqrt{2}/2$ ist (Es könnte helfen, $\mathbb{Z}[i]$ als Gitter in $\mathbb{C}$ zu zeichnen). Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\beta \neq 0$ (d.h. $\exists \beta^{-1} \in \mathbb{C}$) und $z := \alpha\beta^{-1} \in \mathbb{C}$. Dann gibt es $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ mit $|z - \gamma| < 1$. Schließen Sie, dass es $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\alpha = \beta q + r$ und $\delta(r) < \delta(\beta)$ gibt.]

Aufgabe 4. (10 Punkte) Sei $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ (ein Unterring nach ÜB 3 Aufgabe 4).

a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ein Integritätsbereich ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht faktoriell ist.
[*Hinweis:* Zeigen Sie, dass $1 \pm \sqrt{-5}$ irreduzibel sind. Dann finden Sie eine zweite Zerlegung von $6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ als ein Produkt von 2 irreduziblen Elementen r_1, r_2, so dass $1 + \sqrt{-5}$ nicht assoziiert zu entweder r_1 oder r_2 ist.]