Übungen zur Vorlesung 'Algebra und Zahlentheorie'

V. Hoskins (WS 2018/2019)

Übungsblatt 4

Abgabe: Bis Montag, den 12.11.2018, 14 Uhr.

Aufgabe 1. (8 Punkte) Sei I, J Ideale eines kommutativen Rings mit Eins R. Beweisen Sie, $I \cup J$ ist ein Ideal von R genau dann, wenn $I \subset J$ oder $J \subset I$ gilt.

Aufgabe 2. (12 Punkte) Welche der folgenden Ideale sind gleich, welche sind ineinander enthalten?

a) In $\mathbb{Z}$: $(2, 3)$, $\mathbb{Z}$, (5), (7), $(10, 15)$.

b) In $\mathbb{Z}[t]$: $(2, t)$, $(2t)$, $(9t, 4t)$, $(t^2 + t^3)$, $(5t^2 + t^3)$, $(5(t^2 + t^3))$.

c) In $\mathbb{Q}[t]$: $(2, t)$, $(2t)$, $(9t, 4t)$, $(t^2 + t^3)$, $(5t^2 + t^3)$, $(5(t^2 + t^3))$.

Warum ist $\mathbb{Z}[t]$ kein Hauptidealring?

Aufgabe 3. (10 Punkte) Beweisen Sie, dass es einen Ringisomorphismus $R[t]/(t^2+1) \cong \mathbb{C}$ gibt.

[*Hinweis:* Betrachten Sie einen surjektiven Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{C}$ und dann benutzen Sie den Homomorphiesatz für Ringe.]

Aufgabe 4. (10 Punkte) Finden Sie die kleinste positive ganze Zahl, die die Reste 1, 2 und 3 bei Teilung durch 5, 7 beziehungsweise 9 hat.