Übungen zur Vorlesung 'Algebra und Zahlentheorie'

V. Hoskins (WS 2018/2019)

Übungsblatt 3

Abgabe: Bis Montag, den 05.11.2018, 14 Uhr.

Aufgabe 1. (2 + 3 + 3 + 2 + 4 Punkte)

a) Sei G eine Gruppe mit 5 Elementen und $g \in G \setminus \{e\}$. Beweisen Sie, dass $G \cong < g >$ und deshalb gilt $G \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (d.h. es gibt einen Gruppenisomorphismus von G nach $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$). [*Hinweis:* Benutzen Sie den Satz von Lagrange, um die Ordnung von g zu berechnen.]

b) Sei G eine Gruppe mit 6 Elementen.

   i) Beweisen Sie, dass G ein Element τ der Ordnung 3 besitzt. [*Hinweis*: Wenn jedes $g \in G \setminus \{e\}$ Ordnung zwei hat, schließen Sie, dass G abelsch ist und je zwei Elemente aus $G \setminus \{e\}$ eine Untergruppe der Ordnung 4 erzeugen. Dann benutzen Sie den Satz von Lagrange, um einen Widerspruch zu finden.]

   ii) Schließen Sie, dass G ein Element τ der Ordnung 3 und ein Element σ der Ordnung 2 enthält, so dass
   $$G = \{1, \tau, \tau^2, \sigma, \sigma\tau, \sigma\tau^2\}.$$

   iii) Nehmen Sie an, dass G abelsch ist. Zeigen Sie $\mathrm{ord}(\sigma\tau) = 6$. Schließen Sie, dass G zyklisch ist und $G \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

   iv) Nehmen Sie an, dass G nicht abelsch ist. Zeigen Sie, dass dann $\tau\sigma = \sigma\tau^2$ und $\tau^2\sigma = \sigma\tau$ gelten muss. Dann finden Sie einen Gruppenisomorphismus $\varphi : G \to S_3$.

   Schließen Sie, dass eine 6-elementige Gruppe, entweder isomorph ist zu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ oder S_3.

Aufgabe 2. (8 Punkte) Beschreiben Sie explizit den ersten Isomorphiesatz für die Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit Untergruppen $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ und $N = \mathbb{C}^\times I_2$.

Aufgabe 3. (2 + 2 + 4 Punkte) Sei K ein Körper. Sind die folgende Abbildungen Ringhomomorphismen? Falls ja, was ist das Bild und der Kern des Homomorphismuses?

a) $\varphi_1 : K[t] \to K[t]$ mit $\varphi(P(t)) := P'(t)$ (die Ableitung von P).

b) $\varphi_2 : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(K) \to K$ mit $\varphi_2(A) = a_{11}$ wobei $A = (a_{ij})$.

c) Für $a \in K$ die Abbildung $\varphi_a : K[t] \to K$ mit $\varphi_a(P(t)) := P(a)$ (Evaluation bei a).

Bitte wenden!

Aufgabe 4. (4 + 6 Punkte) Sei $d \in \mathbb{Z}$, so dass $n^2 \nmid d$ für alle ganze Zahlen $n > 1$. Sei

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.

b) Sei $\varphi : \mathbb{Z}[t] \to \mathbb{C}$ die Abbildung mit $\varphi(P(t)) := P(\sqrt{d})$. Beweisen Sie, dass φ ein Ringhomomorphismus ist und finden Sie den Kern und das Bild von φ.