Übungen zur Vorlesung ‘Algebra und Zahlentheorie’

V. Hoskins (WS 2018/2019)

Übungsblatt 2

Abgabe: Bis Montag, den 29.10.2018, 14 Uhr.

Aufgabe 1. (12 Punkte) Sei $\varphi : (G, \star_G) \to (H, \star_H)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

a) $\varphi(e_G) = e_H$.
b) $\varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1})$ für $g \in G$.
c) Das Bild $\varphi(G)$ ist eine Untergruppe von H.
d) Der Kern $\ker(\varphi) := \varphi^{-1}(e_H)$ ist eine normale Untergruppe von G.
e) φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker(\varphi) = \{e_G\}$.
f) Wenn φ bijektiv ist, dann ist die Umkehrfunktion $\varphi^{-1} : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 2. (8 Punkte) Sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass

$$\text{für } a, b \in G: \quad a \sim_H b :\Longleftrightarrow a \star b^{-1} \in H$$

eine Äquivalenzrelation auf G ist. Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklasse von $a \in G$ ist die Rechtsnebenklasse

$$Ha := \{h \star a : h \in H\}.$$

Aufgabe 3. (10 Punkte) Seien G_1 und G_2 die beiden Gruppen mit vier Elementen aus Aufgabe 1 Blatt 1. Zeigen Sie, dass eine dieser beiden Gruppen zyklisch ist und somit isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die andere Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 4. (4 + 2 + 4 Punkte) Sei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen und $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ die Gruppe der invertierbaren (2×2)-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

b) Setze $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) : \det(A) = 1\}$. Warum ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ eine normale Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$?

c) Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus

$$\overline{\det} : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

gibt, der eindeutig bestimmt ist durch

$$\overline{\det}(\pi(A)) = \det(A), \quad \text{für alle } A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}).$$

Hierbei ist $\pi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ die Restklassenabbildung, also $\pi(A) = A \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$.