Übungen zur Vorlesung ‘Algebra und Zahlentheorie’

V. Hoskins (WS 2018/2019)

Übungsblatt 13

Abgabe: Bis Montag, den 28.01.2019, 14 Uhr.

Aufgabe 1. (1 + 3 + 4 Punkte) Seien $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \zeta_3)$, wobei $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$.

a) Warum ist L/K galoissch?

b) Berechnen Sie $[L : K]$ und finden Sie $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.

c) Finden Sie alle Untergruppen von G und die entsprechende Zwischenkörper von L/K.

Aufgabe 2. (9 Punkte) Sei $f(t) = t^3 + at + b \in K[t]$ und seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Nullstellen von f in einer Körpererweiterung L/K. Sei

$$\Delta(f) := \left(\prod_{1 \leq i < j \leq 3} (\alpha_i - \alpha_j) \right)^2 .$$

Beweisen Sie, dass $\Delta(f) = -4a^3 - 27b^2$.

[*Hinweis*: zeigen Sie, dass $\Delta(f) = -f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) f'(\alpha_3)$].

Aufgabe 3. (15 Punkte) Finden Sie den Zerfällungskörper und die Galois-Gruppe der folgenden Polynome und finden Sie alle Untergruppen und die entsprechenden Zwischenkörper.

a) $f_1(t) = t^5 - 1 \in \mathbb{Q}[t]$,

b) $f_2(t) = t^4 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$,

c) $f_3(t) = t^4 - 4t^2 + 1 \in \mathbb{Q}[t]$.

Aufgabe 4. (8 Punkte) Finden Sie die Galois-Gruppe der folgenden Polynome

a) $f_1(t) = t^3 - 3t - 1 \in \mathbb{Q}[t]$,

b) $f_2(t) = t^4 - t - 1 \in \mathbb{Q}[t]$.