Übungen zur Vorlesung 'Algebra und Zahlentheorie'

V. Hoskins (WS 2018/2019)

Übungsblatt 12

Abgabe: Bis Montag, den 21.01.2019, 14 Uhr.

Aufgabe 1. (6 + 6 Punkte) Welche der folgenden Körpererweiterungen sind galoissch?

a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ für Primzahlen $p \neq q$,

b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$,

c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$ wobei $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$.

Für die Galois-Erweiterungen berechnen Sie die Galois-Gruppen.

Aufgabe 2. (12 Punkte) Für eine Körpererweiterung $K \subset L$ haben wir Abbildungen

$$\Psi : \mathrm{ZK}(L/K) \rightleftharpoons \mathrm{UG}(L/K) : \Phi$$

mit $\Psi(M) := \mathrm{Aut}_M(L)$ und $\Phi(H) := L^H$. definiert. Beweisen Sie die folgende Eigenschaften:

a) $\Psi(M) \leq \Psi(M')$ für $M, M' \in \mathrm{ZK}(L/K)$ mit $M' \subset M$,

b) $\Phi(H) \subset \Phi(H')$ für $H, H' \in \mathrm{UG}(L/K)$ mit $H' \leq H$,

c) $H \leq \Psi(\Phi(H))$ für alle $H \in \mathrm{UG}(L/K)$,

d) $M \subset \Phi(\Psi(M))$ für alle $M \in \mathrm{ZK}(L/K)$,

e) $\Phi(H) = \Phi(\Psi(\Phi(H)))$ für alle $H \in \mathrm{UG}(L/K)$,

f) $\Psi(M) = \Psi(\Phi(\Psi(M)))$ für alle $M \in \mathrm{ZK}(L/K)$.

Aufgabe 3. (8 Punkte) Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung und $K \subset M \subset L$ ein Zwischenkörper. Beweisen Sie, dass für jedes Element $\varphi \in \mathrm{Aut}_K(L)$

$$\varphi \, \mathrm{Aut}_M(L) \varphi^{-1} = \mathrm{Aut}_{\varphi(M)}(L)$$

gilt.

Aufgabe 4. (8 Punkte) Finden Sie all zwischen Körper $\mathbb{Q} \subset M \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.